MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, OTTO HÖLDER, HERMANN MINKOWSKI, CARL NEUMANN
MAX NOETHER, KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

Otto Blumenthal
in Aachen.

66. Band.

Mit 34 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1909.

Inhalt des sechsundsechzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Über Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen.

Von

Emil Hilb in Erlangen.

In der letzten Zeit hat das Problem der Darstellung willkürlicher Funktionen durch in Fourierscher Weise gebildete Reihen die Aufmerksamkeit auf sich gezogen und ist in mannigfacher Weise gelöst worden; es sei hier nur an die grundlegenden Arbeiten von Herrn D. Hilbert in den Göttinger Nachrichten seit 1904 und an die Inauguraldissertation von Herrn Erhard Schmidt (Göttingen 1905)*) erinnert. In diesen Resultaten sind alle bisher bekannten Entwicklungen, wie die nach trigonometrischen Funktionen, nach Besselschen, Sturmschen, Kugel- und Laméschen Funktionen, ferner aber auch nach den von Herrn Poincaré entdeckten, von den Herren Le Roy, Stekloff, Zaremba, Korn u. a. weiter untersuchten Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\lambda u=0$ als Spezialfälle enthalten, indem die Frage nach der Existenz der sogenannten „Normalfunktionen" bei gewöhnlichen**) und partiellen linearen Differentialgleichungen sowie die Frage nach der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach ihnen auf die Untersuchung der Integralgleichung

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(st)\,\varphi(t)\,dt$$

zurückgeführt wird. $K(st)$ ist der sogenannte Kern, eine in s und t symmetrische Funktion und soll der Bedingung genügen, daß

$$\int_a^b\int_a^b (K(st))^2\,ds\,dt$$

einen endlichen Wert besitzt.

$K(st)$ wird durch die Greensche Funktion der als Ausgangspunkt dienenden Differentialgleichung dargestellt.

Die Normal- oder Eigenfunktionen ergeben sich dann als Lösungen der homogenen Integralgleichung:

*) Abgedruckt in Math. Ann. Bd. 63.

**) Vergl. auch A. Kneser, Math. Ann. Bd. 63, S. 477 u. f.

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(st)\,\varphi(t)\,dt,$$

welche nur dann eine Lösung besitzt, wenn λ ein Eigenwert ist. Die Eigenwerte λ liegen isoliert und können sich nur im Unendlichen häufen. Es gilt dann der Satz, daß jede Funktion $f(s)$, die sich vermittelst einer stetigen Funktion $h(s)$ in der Form

$$f(s) = \int_a^b K(st)\,h(t)\,dt$$

darstellen läßt, nach den zu $K(st)$ gehörigen Eigenfunktionen entwickelbar ist.

Es kann aber eintreten, daß $\int_a^b\int_a^b (K(st))^2\,ds\,dt$ einen unendlich großen Wert hat. Dieses ist z. B. dann der Fall, wenn man eine Differentialgleichung als Ausgangspunkt nimmt und das Intervall, für welches Normalfunktionen postuliert sind, sich bis zu geeigneten singulären Stellen erstrecken läßt. Der einfachste solche Fall ergibt sich, wenn man von der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$ ausgeht und das Intervall, in dessen Endpunkten die Normalfunktionen verschwinden sollen, in das Unendliche wachsen läßt. Hierbei häufen sich die Eigenwerte auf der ganzen positiven Hälfte der λ-Achse überall dicht an, die Eigenwerte bilden ein kontinuierliches Spektrum oder ein Streckenspektrum, ein Ausdruck, der von Herrn Hilbert*) in seiner Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen eingeführt wurde. Statt der Reihenentwicklungen erhält man daher bekanntlich das Fouriersche Integraltheorem. Mit Ausnahme der Integraldarstellungen vermittelst Besselscher Funktionen und Kegelfunktionen ist nun die Verallgemeinerung des Fourierschen Integraltheorems, wie sie der oben erwähnten Verallgemeinerung der Fourierschen Reihen entspricht, bis jetzt nicht näher durchgeführt. (Die hochinteressanten Untersuchungen von Hamilton**) stellen auch eine Verallgemeinerung des Fourierschen Integraltheorems dar, jedoch nach einer anderen Richtung hin, und kommen so hier nicht direkt in Betracht.) Es sind z. B. die Integraldarstellungen, welche sich aus den allgemeinen Reihenentwicklungen der Potentialtheorie ergeben, wenn sich ein Intervall bis an zwei zusammengefallene singuläre Punkte erstreckt, nicht näher untersucht, wenn wir von einigen Bemerkungen von Herrn Bôcher***) absehen.

*) D. Hilbert, Göttinger Nachrichten 1906, 4. Mitteilung S. 172.

**) Hamilton, On fluctuating fonctions. Trans. of Irish Ac. 19, 1842.

***) M. Bôcher, Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894, S. 227.

Die Art der Darstellung von willkürlichen Funktionen durch die Normalfunktionen einer Differentialgleichung mit einem singulären Punkte am Ende des Intervalls ist nun eine sehr mannigfaltige. Neben einem kontinuierlichen Spektrum kann noch, wie wir sehen werden, ein Punktspektrum auftreten; wir erhalten dadurch eine gemischte Darstellung, teils durch eine in Fourierscher Weise gebildete Reihe, teils durch ein Integral, analog der Fourierschen Integraldarstellung. Es kann aber auch vorkommen, daß man eine Integraldarstellung erhält, bei welcher das Integral nach den Eigenwerten über getrennte Intervalle zu nehmen ist; die Eigenwerte bilden eine unendliche Folge getrennter Streckenspektren. Herr Wirtinger*) kam im Falle der schwingenden Saite bei Ausdehnung des Intervalles in das Unendliche zuerst auf die Existenz einer solchen Verteilung der Eigenwerte, welche sich nur längs gewisser Strecken anhäufen; er nannte diese Verteilung „Bandenspektrum". Allein es findet sich bei Herrn Wirtinger keine weitere Durchführung bezüglich der Darstellung willkürlicher Funktionen, „da der Durchführung der Grenzübergänge sich mannigfaltige Schwierigkeiten entgegenstellen", von denen die wesentlichste eben im Auftreten des Bandenspektrums besteht. Jedoch ist schon die Aufdeckung der Existenz eines Bandenspektrums im Jahre 1897 äußerst bemerkenswert. Erst durch die grundlegende Arbeit von Herrn Hilbert**) über die Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen ist ein Mittel geschaffen worden, das alle bis jetzt erwähnten Probleme behandeln läßt.

Es soll nun die Aufgabe der folgenden Abhandlung sein, die Darstellungen willkürlicher Funktionen durch Eigenfunktionen von Differentialgleichungen mit singulären Punkten vermittelst der eben zitierten Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen zu behandeln. Als Bindeglied benutzen wir nach wie vor die Integralgleichungen, bei denen der Kern $K(st)$ aber nicht mehr die Eigenschaft hat, daß $\int_a^b\int_a^b (K(st))^2 ds\, dt$ endlich ist, was eine wesentliche Voraussetzung für die am Anfang erwähnten Methoden der Integralgleichungen war. Dagegen wird eine geringe Modifikation der Hilbertschen Methode, die er in seiner 4. und 5. Mitteilung***) niedergelegt hat, zum Ziele führen und uns gleichzeitig gestatten, gewisse Integralgleichungen zu behandeln, welche bis jetzt unzugänglich waren; jedoch gedenke ich, diesen letzten

*) Mathematische Annalen 48, S. 387.

**) Göttinger Nachrichten 1906, 4. Mitt. S. 157—227. 5. Mitt. S. 439—480.

***) Wir werden diese beiden Arbeiten in der Folge unter H. 4 bez. H. 5 zitieren.

Punkt erst in einer folgenden Abhandlung ausführlicher zu behandeln und nur beim einfachsten Falle, der sich an das Fouriersche Integraltheorem anschließt, aber typisch ist, wirklich durchzuführen. Das Hauptaugenmerk soll auf die Darstellung willkürlicher Funktionen gerichtet sein.

Was nun die Benützung der quadratischen Formen betrifft, so werden die wichtigsten Tatsachen dieser Theorie nachher zusammengestellt werden. Eine wesentliche Abweichung von der Hilbertschen Theorie wird nur daraus entspringen, daß die quadratischen Formen unendlich vieler Variablen hier nicht nur als Grenzfall von quadratischen Formen mit endlich vielen Variablen sich ergeben, sondern als Grenzfall von, dem Problem angepaßten, sogenannten stetigen quadratischen Formen unendlich vieler Veränderlicher aufgefaßt werden, die nach den quadratischen Formen mit endlich vielen Veränderlichen die einfachsten sind. Demzufolge werden im folgenden auch nur diejenigen Resultate der 4. Hilbertschen Note benutzt, welche sich auf vollstetige Formen und die allgemeine Theorie der orthogonalen Transformation unendlich vieler Variabeln beziehen.

In Kap. I wird nun ausführlich von diesem Standpunkte aus das Fouriersche Integraltheorem entwickelt und gleichzeitig die allgemein zu benützende Methode auseinandergesetzt. Kap. II behandelt einen etwas allgemeineren Fall, welcher auf eine gemischte Darstellung durch Reihe und Integral führt, die der Verallgemeinerung der sogenannten Sturmschen Entwicklungen entspricht. In Kap. III ist dann das von Wirtinger aufgestellte Problem durchgeführt, in Kap. IV die oben erwähnten Darstellungen, die sich an die Potentialtheorie anschließen. Die Darstellungen willkürlicher Funktionen, wie sie sich aus den Kap. II, III, IV ergeben, sind meines Wissens bisher nicht einmal nur formal angegeben.

Kapitel I.

Das Fouriersche Integraltheorem.

§ 1.

Aufstellung der Integralgleichung.

Um das Fouriersche Integraltheorem zu erhalten, müssen wir von derselben Methode ausgehen, welche zur Ableitung der Fourierschen Reihenentwicklung vermittelst der Theorie der quadratischen Formen dient; jedoch müssen bei diesen Betrachtungen zur Ermöglichung des Überganges zur Integraldarstellung einige Modifikationen getroffen werden,

deren Notwendigkeit sich erst später ergeben wird. Wir gehen also darauf aus, die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} + (\lambda - 1) u_1(x) = 0 \tag{1}$$

zu bestimmen, welche für $x = 0$ und $x = l$ verschwinden; diese Lösungen nennt man Eigenfunktionen, die dazugehörigen Werte λ Eigenwerte; es ist dann die Möglichkeit der Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach diesen Eigenfunktionen zu untersuchen und zu sehen, was aus den Eigenfunktionen und der Entwicklung wird, wenn l unendlich große Werte annimmt, und gerade dabei wird uns die Theorie der quadratischen Formen wesentliche Dienste leisten. Um die für $l = \infty$ auftretende Singularität der Behandlung zugänglich zu machen, transformieren wir (1) vermittelst der Substitution: $x = |\lg s|$ in

$$\frac{d}{ds}\left(s \frac{du(s)}{ds}\right) + \frac{(\lambda - 1)}{s} u(s) = 0, \tag{2}$$

wobei dann $u(s)$ für $s = e^{-l} = \varepsilon$ und für $s = 1$ verschwinden muß.

Den Übergang zu der Integralgleichung und der Theorie der quadratischen Formen vermittelt bekanntlich die Greensche Funktion*) $G_\varepsilon(st)$, die in s und t symmetrisch ist, für $s = \varepsilon$ und $s = 1$ bei beliebigem t verschwindet, deren 1. Ableitung für $s = t$ eine Unstetigkeit besitzt, definiert durch

$$\lim_{\delta = 0} \left[\frac{d}{ds} G_\varepsilon(s\,t)\right]_{s = t + \delta} - \lim_{\delta = 0} \left[\frac{d}{ds} G_\varepsilon(s\,t)\right]_{s = t - \delta} = -\frac{1}{t} \tag{3}$$

und die der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d}{ds} s \frac{d}{ds} v(s) - \frac{v(s)}{s} = 0 \cdot \tag{4}$$

Man findet durch leichte Rechnung:

$$G_\varepsilon(st) = \frac{\left(\frac{1}{s} - s\right)\left(t - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)}{2(1 - \varepsilon^2)} \text{ für } s > t; \quad G_\varepsilon(st) = \frac{\left(\frac{1}{t} - t\right)\left(s - \frac{\varepsilon^2}{s}\right)}{2(1 - \varepsilon^2)} \text{ für } s < t. \tag{5}$$

Sei nun allgemein: $L_s(u) = \frac{d}{ds} p \frac{du}{ds} + qu$, so gilt bekanntlich die Greensche Formel

$$\int_a^b [v L_t(u) - u L_t(v)]\, dt = \left[p\left(v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt}\right)\right]_a^b, \tag{6}$$

wenn u und v stetige 1. und 2. Ableitungen besitzen. Wir wählen nun für $L_s(u)$ die linke Seite der Differentialgleichung (4), für u eine Eigen-

*) Hilbert, 2. Mitt., Göttinger Nachrichten 1904, S. 217.

funktion $\psi_\varepsilon(s)$ von (2), die in ε und 1 verschwindet, für v aber $G_\varepsilon(st)$; dann findet man unter Berücksichtigung der durch (3) definierten Unstetigkeit:

$$\psi_\varepsilon(s) - \lambda \int_\varepsilon^1 G_\varepsilon(st)\,\psi_\varepsilon(t)\,\frac{dt}{t} = 0 \tag{7}$$

und diese Integralgleichung definiert die Eigenfunktionen $\psi_\varepsilon(s)$, da sie nur für Eigenwerte λ eine Lösung zuläßt. Der Kern $\frac{G_\varepsilon(st)}{t}$ ist noch nicht symmetrisch; um ihn symmetrisch zu machen, setzen wir

$$\varphi_\varepsilon(s) = \frac{\psi_\varepsilon(s)}{\sqrt{s}} \quad \text{für } s \geqq \varepsilon; \quad \varphi_\varepsilon(s) = 0 \quad \text{für } 0 \leqq s \leqq \varepsilon, \tag{8}$$

$$\frac{G_\varepsilon(st)}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}} = K_\varepsilon(st) = \frac{\left(\frac{1}{s} - s\right)\left(t - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)}{2\sqrt{s}\,\sqrt{t}\,(1-\varepsilon^2)} \quad \text{für } s \geqq t, \tag{9}$$

$$\frac{G_\varepsilon(st)}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}} = K_\varepsilon(st) = \frac{\left(\frac{1}{t} - t\right)\left(s - \frac{\varepsilon^2}{s}\right)}{2\sqrt{s}\,\sqrt{t}\,(1-\varepsilon^2)} \quad \text{für } s \leqq t;$$

$$K_\varepsilon(st) = 0, \quad \text{wenn } s \leqq \varepsilon \text{ oder } t \leqq \varepsilon;$$

dann ist $K_\varepsilon(st) = K_\varepsilon(ts)$ und man erhält als definitive Integralgleichung:

$$\varphi_\varepsilon(s) - \lambda \int_0^1 K_\varepsilon(st)\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt = 0. \tag{10}$$

Aus der definierenden Differentialgleichung (2) ersieht man, daß die Eigenwerte, für welche (10) allein lösbar ist,

$$\lambda_p^{(\varepsilon)} = 1 + \frac{p^2\pi^2}{|\lg \varepsilon|^2} \quad \text{für } p = 1, 2 \ldots \tag{11}$$

sind; die dazu gehörigen Eigenfunktionen sind:

$$\varphi_{p,\varepsilon}(s) = \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_p^{(\varepsilon)} - 1}\,|\lg s|\right)}{\sqrt{s}} \quad \text{für } s \geqq \varepsilon; \quad \varphi_{p,\varepsilon}(s) = 0 \quad \text{für } s \leqq \varepsilon. \tag{12}$$

Durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor entstehen daraus die normierten Eigenfunktionen $\bar{\varphi}_{p,\varepsilon}(s)$, für welche neben

$$\int_0^1 \bar{\varphi}_{p,\varepsilon}(s)\,\bar{\varphi}_{q,\varepsilon}(s)\,ds = 0 \quad \text{für } p \neq q$$

auch noch die Relationen gelten

$$\int_0^1 (\bar{\varphi}_{p,\varepsilon}(s))^2\,ds = 1.$$

Es ist also

$$(13)\quad \bar{\varphi}_{p,\varepsilon}(s) = \frac{\varphi_{p,\varepsilon}(s)}{\sqrt{\int\limits_\varepsilon^1 (\varphi_{p,\varepsilon}(s))^2 ds}} = \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_p^{(\varepsilon)} - 1}\,|\lg s|\right)}{\sqrt{s}\sqrt{\frac{|\lg \varepsilon|}{2}}}, \quad \text{wenn } s \geqq \varepsilon;$$

$$\bar{\varphi}_{p,\varepsilon}(s) = 0, \quad \text{wenn } s \leqq \varepsilon.$$

Es sind nun die analogen Formeln für $\varepsilon = 0$ daraus abzuleiten. Aus $K_\varepsilon(st)$ wird für $\varepsilon = 0$

$$(14)\quad K(st) = \frac{\left(\frac{1}{s} - s\right)t}{2\sqrt{s}\sqrt{t}} \text{ für } s \geqq t; \quad K(st) = \frac{\left(\frac{1}{t} - t\right)s}{2\sqrt{s}\sqrt{t}} \text{ für } s \leqq t.$$

Wir wählen ferner p_ε derartig abhängig von ε, daß für irgend ein beliebig vorgegebenes μ

$$(15)\quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{p_\varepsilon}{|\lg \varepsilon|} = \mu;$$

dann ist

$$(16)\quad \lim_{\varepsilon=0} \lambda_{p_\varepsilon}^{(\varepsilon)} = 1 + \mu^2\pi^2 = \lambda_\mu; \quad \lim_{\varepsilon=0} \varphi_{p_\varepsilon,\varepsilon}(s) = \varphi_\mu(s) = \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg s|)}{\sqrt{s}}.$$

Nun folgt aus (6) unter Berücksichtigung von (14), wenn $s \neq 0$,

$$(17)\quad \lambda_\mu \int\limits_\varepsilon^1 K(st)\,\varphi_\mu(t)\,dt = \varphi_\mu(s) - \left\{t\left[K(st)\sqrt{t}\frac{d}{dt}(\varphi_\mu(t)\sqrt{t}) - \varphi_\mu(t)\sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(K(st)\sqrt{t})\right]\right\}_{t=\varepsilon}.$$

Es genügt nämlich $K(st)\sqrt{s}\sqrt{t}$ der Gleichung (4), $\varphi_\mu(s)\sqrt{s}$ einer Gleichung von der Form (2). Da nun $\varphi_\mu(t)\sqrt{t}$ für alle reellen μ in der Umgebung von $t = 0$ endlich bleibt, so konvergiert

$$\int\limits_\varepsilon^1 K(st)\,\varphi_\mu(t)\,dt$$

mit nach 0 abnehmendem ε gegen das wohlbestimmte Integral

$$\int\limits_0^1 K(st)\,\varphi_\mu(t)\,dt,$$

wenn $s \neq 0$. Ebenso folgt unmittelbar

$$\lim_{\varepsilon=0} \left\{t\left[K(st)\sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(\varphi_\mu(t)\sqrt{t}) - \varphi_\mu(t)\sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(K(st)\sqrt{t})\right]\right\}_{t=\varepsilon} = 0;$$

daher ist:

$$(18)\quad \varphi_\mu(s) - \lambda_\mu \int\limits_0^1 K(st)\,\varphi_\mu(t)\,dt = 0.$$

Wir haben also den Satz:

Die homogene Integralgleichung (18), *welche zum Kerne $K(st)$ gehört, hat für alle Werte $\lambda_\mu > 1$ eine Lösung $\varphi_\mu(s)$, welche für $s = 1$ verschwindet, und welche, mit $\sqrt{s}$ multipliziert, in der Umgebung von $s = 0$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. $\varphi_\mu(s) \cdot \sqrt{s}$ genügt dann der Gleichung* (2) *für $\lambda = \lambda_\mu$, und die $\varphi_\mu(st) \cdot \sqrt{s}$ stellen diejenigen Lösungen von* (2) *dar, die für $s = 1$ verschwinden, für $s = 0$ unter einer endlichen Grenze bleiben.*

$\varphi_\mu(s)$ läßt sich dann nicht mehr so normieren, daß $\int_0^1 \varphi_\mu(s)^2 ds = 1$; vielmehr ist $\int_0^1 \varphi_\mu(s)^2 ds = \infty$.

§ 2.

Zusammenstellung einiger Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen.*)

Ehe wir jetzt die Theorie der quadratischen Formen auf die gewonnene Integralgleichung anwenden, stellen wir die wichtigsten Definitionen und Sätze der Hilbertschen Theorie der quadratischen Formen zusammen, wie sie in der 4. und 5. Mitteilung in den Göttinger Nachrichten 1906 aufgestellt sind.

Es sei

$$k_{pq} = k_{qp}; \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = (xx) \leqq 1; \quad (yy) \leqq 1; \quad K(xx) = \sum_{\substack{p=1\cdots\infty \\ q=1\cdots\infty}} k_{pq} x_p x_q;$$

$$K(xy) = \sum k_{pq} x_p y_q.$$

I. Die bilineare Form $K(xy)$ heißt beschränkt, wenn sie für alle x und y, die der Bedingung $(xx) \leqq 1$, $(yy) \leqq 1$ genügen, unter einer endlichen Grenze bleibt; dann ist natürlich auch die quadratische Form $K(xx)$ beschränkt, und umgekehrt, ist $K(xx)$ beschränkt, so ist es auch $K(xy)$ (H. 4 S. 176).

II. Unter der Faltung von zwei Linearformen

$$L(x) = \sum_i l_i x_i, \quad M(x) = \sum_i m_i x_i$$

versteht man

$$L(\cdot)\, M(\cdot) = \sum_i l_i m_i \quad \text{(H. 4 S. 159).}$$

Für Linearformen gelten dann folgende Tatsachen:

IIa. Es ist immer: $\left(\sum_i l_i x_i\right)^2 \leqq \sum_i l_i^2 \cdot \sum_i x_i^2$ (H. 4 S. 176).

---

*) Diese Sätze werden im folgenden immer mit den entsprechenden römischen Ziffern zitiert.

IIb. Ist stets $\sum_i l_i x_i \leqq M$, sobald $(xx) \leqq 1$, so ist $\sum_i l_i^2 \leqq M^2$.

IIc. Seien in $L(x) = \sum_i l_i (x_i(\xi))^2$ die $x_i(\xi)$ stetige Funktionen einer Variabeln ξ, ferner $\sum_i (x_i(\xi))^2 \leqq M$ und $\sum_i l_i^2$ konvergent, dann konvergiert $\sum_i l_i x_i(\xi)$ gleichmäßig (H. 5 S. 442).

III. $K_n(xy) = \sum_{\substack{p=1\cdots n\\ q=1\cdots n}} k_{pq} x_p y_q$ heißt der n^{te} Abschnitt von $K(xy)$.

Ist $K(xy)$ eine beschränkte Form, so konvergiert $K_n(xy)$ bei festen x und y gegen $K(xy)$ mit wachsendem n, wenn $(xx) \leqq 1$, $(yy) \leqq 1$; d. h. es ist

$$\lim_{n=\infty} K_n(xy) = K(xy) \quad \text{(H. 4 S. 177)}.$$

Diese Limesgleichung gilt gleichmäßig für solche Veränderliche x und y, für welche $\sum x_i^2$ und $\sum y_i^2$ gleichmäßig konvergieren. Und aus dem l. c. gegebenen Beweise folgt unmittelbar:

IV. Es sei $K_\varepsilon(xy) < M$ für alle $\varepsilon > 0$, wenn $(xx) \leqq 1$, $(yy) \leqq 1$; ferner sei für jedes endliche n: $\lim_{\varepsilon=0} K_{\varepsilon,n}(xy) = K_n(xy)$, dann ist

$$\lim_{\varepsilon=0} K_\varepsilon(xy) = K(xy)$$

und $K(xy)$ eine beschränkte Form.

V. Resolvente heißt eine quadratische Form $\mathsf{K}(\lambda; xy)$, welche mit der beschränkten Form $K(xy)$ durch die Gleichung verbunden ist:

$$\mathsf{K}(\lambda; xy) - \lambda K(x\,\cdot)\,\mathsf{K}(\lambda; \cdot\, y) = (xy).$$

VI. Wenn $\sum_{p,q} k_{pq}^2$ konvergiert, ist $K(xy)$ eine beschränkte stetige (vollstetige) Form (H. 4 S. 203).

Für beschränkte stetige Formen gelten folgende Sätze:

VII. Die Lösung der Gleichung:

$$\lambda_p \bar{L}_p(\cdot)\, K(\cdot\, y) = \bar{L}_p(y)$$

durch eine beschränkte Linearform $\bar{L}_p(x)$ ist, wenn $K(xx)$ eine stetige quadratische Form ist, nur für ganz bestimmte Werte λ_p möglich. Diese λ_p, welche sich nur im Unendlichen häufen können, heißen Eigenwerte, die $\bar{L}_p(x)$ Eigenformen. Man kann die Eigenformen immer so normiert annehmen, daß

$$\bar{L}_p(\cdot)\, \bar{L}_q(\cdot) = 0, \quad \text{wenn } q \neq p,$$
$$\bar{L}_p(\cdot)\, \bar{L}_p(\cdot) = 1$$

ist (H. 4 S. 201).

VIII. Wenn $K(xy)$ vollstetig ist, und $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ ihre sämtlichen (sich höchstens im Unendlichen häufenden) Eigenwerte, $\bar{L}_p(x)$ die dazugehörigen Eigenfunktionen sind, so hat man:

$$K(xx) = \sum_p \frac{(\bar{L}_p(x))^2}{\lambda_p}.$$

Es existiert dann für alle λ außerhalb des von den Eigenwerten gebildeten „Spektrums" eine beschränkte eindeutig definierte Resolvente:

$$\mathsf{K}(\lambda; xx) = \sum_{(p,\infty)} \frac{(\bar{L}_p(x))^2}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}},$$

und es ist

$$(xx) = \sum_{(p,\infty)} (\bar{L}_p(x))^2.$$

Unter den Eigenwerten λ_p kann auch der Wert ∞ einfach oder mehrfach vorkommen, woran durch das dem Summenzeichen angefügte ∞ erinnert wird (H. 4 S. 201).

Herr Hilbert behandelt in der 4. Mitteilung auch das analoge Problem für allgemeine beschränkte Formen. Wir werden jedoch im folgenden die darauf bezüglichen Resultate nicht zu benützen brauchen, sondern sie werden sich in den von uns betrachteten Spezialfällen aus unseren Untersuchungen von selbst mitergeben, indem wir die allgemeine beschränkte Form als Grenzfall von vollstetigen Formen betrachten. Zum Vergleich seien jedoch die Formeln von Hilbert hier gegeben.

Wenn $K(xy)$ eine beschränkte, aber nicht mehr vollstetige Form ist, so tritt im allgemeinen neben den Eigenwerten λ_p, dem Punktspektrum, noch ein Streckenspektrum s auf, zu dem die beschränkte Form $\sigma(\lambda; xx)$, die „Spektralform", gehört, und man hat:

$$K(xx) = \sum_p \frac{(\bar{L}_p(x))^2}{\lambda_p} + \int_s \frac{d\sigma(\mu; xx)}{\mu},$$

$$\mathsf{K}(\lambda; xx) = \sum_{(p,\infty)} \frac{(\bar{L}_p(x))^2}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_s \frac{d\sigma(\mu; xx)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}},$$

$$(xx) = \sum_{(p,\infty)} (\bar{L}_p(x))^2 + \int_s d\sigma(\mu; xx).$$

Die λ_p können in diesem Falle auch im Endlichen Häufungsstellen besitzen.

§ 3.
Bildung der quadratischen Form.

Um von einer Integralgleichung zu der quadratischen Form überzugehen, benutzt Herr Hilbert (H. 5 S. 452) irgend ein sogenanntes vollständiges orthogonales Funktionensystem; wir bedienen uns des Systems

$$\sqrt{2}\sin(\pi s);\ \sqrt{2}\sin(2\pi s);\ \cdots.$$

Seien dann $u(s)$ und $v(s)$ im allgemeinen stetig und sowohl $\int_0^1 (u(s))^2 ds$ als auch $\int_0^1 (v(s))^2 ds$ endlich, so ist*):

$$(19)\quad \int_0^1 u(s)v(s)\,ds = \sum_{p=1}^{\infty}\int_0^1 u(s)\sqrt{2}\sin(p\pi s)\,ds\cdot\int_0^1 v(s)\cdot\sqrt{2}\sin(p\pi s)\,ds.$$

Man setzt alsdann:

$$(20)\quad \int_0^1 K_\varepsilon(st)\sqrt{2}\sin(p\pi t)\,dt = k_p^{(\varepsilon)}(s);\quad \int_0^1 k_p(s)\sqrt{2}\sin(q\pi s)\,ds = k_{pq}^{(\varepsilon)},$$

$$(21)\quad K_\varepsilon(xy) = \sum_{p,q} k_{pq}^{(\varepsilon)} x_p y_q.$$

Wenn dann ε von 0 verschieden ist, so folgt durch zweimalige Anwendung von (19):

$$\sum_{p,q}(k_{pq}^{(\varepsilon)})^2 = \int_0^1\int_0^1 (K_\varepsilon(st))^2\,ds\,dt,$$

also hat die Summe einen endlichen Wert und $K_\varepsilon(xy)$ ist vollstetig.

Dann ist aber nach VIII:

$$(22)\quad K_\varepsilon(xx) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{\lambda_p^{(\varepsilon)}}$$

und aus der Hilbertschen 5. Mitteilung l. c. folgt, daß die endlichen Eigenwerte $\lambda_p^{(\varepsilon)}$ von $K_\varepsilon(xx)$ mit den Eigenwerten $\lambda_p^{(\varepsilon)}$ der Integralgleichung (10) zusammenfallen; daß ferner die zu $\lambda_p^{(\varepsilon)}$ gehörige Linearform

$$\overline{L}_p^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{l}_i^{p,\varepsilon} x_i$$

mit den in (13) definierten $\overline{\varphi}_{p,\varepsilon}(s)$ durch die Relation verbunden ist:

$$(23)\quad \overline{l}_i^{p,\varepsilon} = \int_0^1\sqrt{2}\,\overline{\varphi}_{p,\varepsilon}(s)\sin(i\pi s)\,ds = \int_0^1\frac{\sqrt{2}\,\varphi_{p,\varepsilon}(s)\sin(i\pi s)\,ds}{\sqrt{\frac{|\lg\varepsilon|}{2}}} = l_i^{p,\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\frac{|\lg\varepsilon|}{2}}}.\,^{**})$$

---

*) A. Hurwitz, Mathematische Annalen, Bd. 57.

**) i ist hier natürlich nur eine ganze Zahl.

Setzen wir also

$$L_p^{(\varepsilon)}(x) = \sum_i l_i^{p,\varepsilon} x_i = \bar{L}_p^{(\varepsilon)}(x)\sqrt{\frac{|\lg \varepsilon|}{2}}, \tag{24}$$

so wird

$$K_\varepsilon(x\,x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\left(\bar{L}_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon|\,\lambda_p^{(\varepsilon)}}. \tag{25}$$

Wir haben jetzt zu untersuchen, was aus der linken und rechten Seite von (25) wird, wenn ε nach 0 konvergiert. Wir zeigen zunächst, daß, wenn

$$(26)\quad \begin{aligned} k_p(s) &= \int_0^1 K(st)\sqrt{2}\sin(p\pi t)\,dt; \\ k_{pq} &= \int_0^1 k_p(s)\sqrt{2}\sin(q\pi s)\,ds = \int_0^1\!\!\int_0^1 K(st)\,2\sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\,ds\,dt \end{aligned}$$

ist,

$$\lim_{\varepsilon=0} K_\varepsilon(xy) = K(xy) = \sum_{p,q} k_{pq} x_p y_q \tag{27}$$

wird. Es ist nämlich der kleinste Eigenwert $\lambda_1^{(\varepsilon)}$ für jedes noch so kleine ε größer als 1 und der absolut kleinste Eigenwert einer (voll)stetigen quadratischen Form ist gleich dem reziproken Werte des Maximums von $K_\varepsilon(xx)$ unter der Nebenbedingung $(xx) \leqq 1$; also ist $|K_\varepsilon(xx)| \leqq 1$ für alle x, die der Bedingung $(xx) \leqq 1$ genügen. Ist auch $(yy) \leqq 1$, so findet man, indem man in $K_\varepsilon(xx)$ x durch $x + y$ ersetzt, daß auch $K(x\,y)$ für alle ε unter einer festen Zahl liegt.

Wir können daher nach IV auf (27) unmittelbar schließen, wenn wir noch zeigen, daß für beliebig großes, aber festes n:

$$\lim_{\varepsilon=0} K_{\varepsilon,n}(x\,y) = K_n(xy)$$

ist, oder daß man zu vorgegebenem δ ε so klein bestimmen kann, daß

$$\left|\sum_{\substack{p=1\cdots n\\ q=1\cdots n}} \left(k_{pq} - k_{pq}^{(\varepsilon)}\right) x_p y_q\right| \leqq \delta \tag{28}$$

wird. (28) ist aber sicher erfüllt, wenn wir erreichen können, daß

$$\left|k_{pq} - k_{pq}^{(\varepsilon)}\right| < \frac{\delta}{n^2}$$

wird. Aber eine leichte Integralabschätzung zeigt, daß wir dies tatsächlich erfüllen können, wenn ε nur klein genug ist, denn man hat ja

$$k_{pq}^{(\varepsilon)} = \int\limits_{\varepsilon}^{1} dt \int\limits_{\varepsilon}^{t} \frac{2\left(\frac{1}{t} - t\right)\left(s - \frac{\varepsilon^2}{s}\right)}{\sqrt{s}\sqrt{t}(1-\varepsilon^2)} \sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\, ds$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon}^{1} dt \int\limits_{t}^{1} \frac{2\left(\frac{1}{s} - s\right)\left(t - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)}{\sqrt{s}\sqrt{t}(1-\varepsilon^2)} \sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\, ds,$$

$$k_{pq} = \int\limits_{0}^{1} dt \int\limits_{0}^{t} \frac{2\left(\frac{1}{t} - t\right)s}{\sqrt{s}\sqrt{t}} \sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\, ds$$

$$+ \int\limits_{0}^{1} dt \int\limits_{t}^{1} \frac{2\left(\frac{1}{s} - s\right)t}{\sqrt{s}\sqrt{t}} \sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\, ds.$$

Damit ist also (27) bewiesen, und es folgt, daß $K(xy)$ eine beschränkte Form ist.

Wir führen jetzt auch in der rechten Seite von (25) den Grenzübergang durch. Es ist

(29) $$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon|\, \lambda_p^{(\varepsilon)}} = \sum_{p=1}^{M|\lg \varepsilon|} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon|\, \lambda_p^{(\varepsilon)}} + R_M,$$

wobei

$$R_M = \sum_{p=M|\lg \varepsilon|+1}^{\infty} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon|\, \lambda_p^{(\varepsilon)}}.$$

Da nun nach (24) und VIII

$$(xx) = \sum_p \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon|}$$

ist, so folgt

(30) $$|R_M| \leqq \frac{1}{\lambda_{M|\lg \varepsilon|+1}};$$

$|R_M|$ kann also, wenn wir M groß genug wählen, unabhängig von ε beliebig klein gemacht werden.

Von dem ersten Gliede läßt sich von vornherein erwarten, daß es gegen ein Integral konvergieren wird; es ist dieser Übergang nur noch in seinen Einzelheiten zu verfolgen. Wir setzen

$$(31)\quad l_i^{(\mu)} = \int_0^1 \sqrt{2}\,\varphi_\mu(s)\sin(i\pi s)\,ds = \int_0^1 \sqrt{2}\,\sin(\mu\pi\,|\lg s|)\,\frac{\sin(i\pi s)}{\sqrt{s}}\,ds,$$

$$(32)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} l_i^{(\mu)} x_i = L_\mu(x) = L(x,\mu).$$

Jetzt ist zwar jedes einzelne $l_i^{(\mu)}$ endlich und nach (31) für alle i und μ unterhalb einer festen Grenze, aber $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(l_i^{(\mu)})^2$ nimmt einen unendlich großen Wert an, wie man sofort sieht, wenn man $\varphi_\mu(s)$ für $s<\delta$ gleich 0 setzt, und, was dann erlaubt ist, (19) anwendet. Dann ist aber $L_\mu(x)$ keine beschränkte Linearform mehr, vielmehr muß es Werte x geben, für welche $(xx)\leqq 1$ ist und $L_\mu(x)$ unendlich groß wird. Denn die Herren Hellinger und Toeplitz*) haben gezeigt, daß, wenn eine Linearform $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ für alle x konvergiert, für welche $(xx)\leqq 1$ ist, immer $\sum a_i^2$ konvergiert; daraus folgt aber, daß $L_\mu(x)$ nicht für alle $(xx)\leqq 1$ konvergieren kann. Dieser Umstand rechtfertigt es, wenn wir im folgenden eine weit engere Bedingung einführen; es reicht für unsere nächsten Zwecke aus, daß

$$(33)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

konvergent ist.

Linearformen, welche mit $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^{2-\delta}$ gleichzeitig konvergieren, wenn δ irgend eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist, nennen wir *semibeschränkt*; semibeschränkte Linearformen**) werden in der folgenden Theorie überhaupt von großer Bedeutung sein. Wir nehmen jetzt an, daß (33) erfüllt sei. Wir beweisen dann, daß unter dieser Voraussetzung $L(x,\mu)$ in bezug auf μ integrabel ist und daß

$$(34)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\sum_{p=1}^{M|\lg\varepsilon|}\frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg\varepsilon|\left(1+\frac{p^2\pi^2}{|\lg\varepsilon|^2}\right)} = 2\int_0^M \frac{(L(x,\mu))^2}{1+\mu^2\pi^2}\,d\mu.$$

---

*) Göttinger Nachrichten 1906: Theorie der unendlichen Matrizen.

**) Diese Formen sind sehr nahe mit den von Herrn Hellinger in seiner Inauguraldissertation (Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen, Göttingen 1907) eingeführten Differentialformen verwandt.

Da nämlich die $l_i^{(\mu)}$, sowie die $l_i^{p,\varepsilon}$ unter einer festen Grenze*) liegen, die von i, μ, p und ε unabhängig gewählt werden kann, so folgt aus (33), daß man m bei einem vorgegebenen δ so groß bestimmen kann, daß

$$(35)\qquad \sum_{i=m}^{\infty} |l_i^{(\mu)} x_i| \leqq \frac{\delta}{4}; \quad \sum_{i=m}^{\infty} |l_i^{p,\varepsilon} x_i| \leqq \frac{\delta}{4}.$$

Da also $\sum_{i=1}^{\infty} l_i^{(\mu)} x_i$ in bezug auf μ gleichmäßig konvergiert, so haben wir nur zu zeigen, daß $l_i^{(\mu)}$ integrabel in bezug auf μ ist; dann folgt (34), wenn wir noch zeigen können, daß man ε so klein wählen kann, daß

$$(36)\qquad |L(x,\mu) - L_{\varkappa_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(x)| \leqq \delta$$

wird, wenn $\varkappa_\varepsilon = \mu\,|\lg \varepsilon| + k$ und k eine beliebige endliche Zahl ist.

Unter Berücksichtigung von (35) findet man, daß alle Behauptungen bewiesen sind, wenn wir für ein beliebig großes, aber festes m zeigen können, daß man

$$(37)\qquad |l_i^{(\mu)} - l_i^{\varkappa_\varepsilon,\varepsilon}| \leqq \frac{\delta}{2m}$$

machen kann, denn daraus folgt, daß die Schwankung von $L(x,\mu)$ in einem genügend kleinen Intervall μ beliebig klein gemacht werden kann und hieraus folgt in Verbindung mit (37) die Formel (34).

Nun ist

$$l_i^{(\mu)} = \int_0^1 \sqrt{2}\,\sin(\mu\pi\,|\lg s|)\,\sin(i\pi s)\,\frac{ds}{\sqrt{s}};$$

$$l_i^{\varkappa_\varepsilon,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{(\mu\,|\lg\varepsilon| + k)\,\pi\,|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right)\frac{\sin(i\pi s)}{\sqrt{s}}\,ds$$

und

$$\left|\int_0^\varepsilon \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{(\mu\,|\lg\varepsilon| + k)\,\pi\,|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right)\frac{\sin(i\pi s)}{\sqrt{s}}\,ds\right| \leqq \sqrt{2}\int_0^\varepsilon \frac{ds}{|\sqrt{s}|} = 2\sqrt{2}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

ferner:

$$\sin(\mu\pi\,|\lg s|) - \sin\left(\mu\pi\,|\lg s| + \frac{k\pi}{|\lg\varepsilon|}\,|\lg s|\right)$$
$$= -2\cos\left(\left(\mu\pi + \frac{k\pi}{2\,|\lg\varepsilon|}\right)|\lg s|\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\cdot\frac{|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right).$$

Also ist:

---

*) Schärfere Abschätzungen über das Unendlichkleinwerden von $l_i^{p,\varepsilon}$ mit wachsendem p sind an dieser Stelle noch nicht notwendig, zeigen jedoch, daß weit beschränktere Voraussetzungen als (33) genügen.

$$\left|\int_0^1 \sqrt{2}\left[\sin(\mu\pi\,|\lg s|) - \sin\left(\mu\pi\,|\lg s| + \frac{k\pi}{|\lg\varepsilon|}\,|\lg s|\right)\frac{\sin(i\pi s)}{\sqrt{s}}\right]ds\right|$$

$$= \left|\int_0^1 2\sqrt{2}\cos\left(\left(\mu\pi + \frac{k\pi}{2\,|\lg\varepsilon|}\right)|\lg s|\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\frac{|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right|$$

$$\leqq 2\sqrt{2}\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{k\pi}{2}\frac{|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right)\right|\frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Wir zerlegen jetzt das Intervall 0 bis 1 in zwei Teile, von 0 bis δ' und von δ' bis 1, wobei wir ε und δ' so wählen, daß

$$\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2}\frac{|\lg\delta'|}{|\lg\varepsilon|}\right)\right| < \frac{\delta}{16\sqrt{2}\,m}; \quad \left|\int_0^{\delta'}\frac{ds}{\sqrt{s}}\right| \leqq \frac{\delta}{16\sqrt{2}\,m}.$$

Dann folgt:

$$2\sqrt{2}\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{k\pi}{2}\frac{|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right)\right|\frac{ds}{\sqrt{s}} \leqq \frac{3\delta}{8m}.$$

Faßt man dieses zusammen, so folgt (37) und daraus (34).*) Dieselbe Betrachtung lehrt aber auch unter Berücksichtigung von (30), daß man M so groß wählen kann, daß

$$(38) \qquad 2\int_M^{M+N}\frac{(L(x,\mu))^2}{1+\mu^2\pi^2}\,d\mu \leqq \delta,$$

wie groß auch N sein mag; also folgt aus (25), (27), (34), (38)

$$(39) \qquad K(xx) = 2\int_0^\infty \frac{(L(x,\mu))^2}{1+\mu^2\pi^2}\,d\mu.$$

Aus (39) folgt, indem man x durch $x+y$ ersetzt, d. h. „polarisiert",

$$(40) \qquad K(xy) = 2\int_0^\infty \frac{L(x,\mu)\,L(y,\mu)}{1+\mu^2\pi^2}\,d\mu.$$

*) Der wesentliche, verallgemeinerungsfähige Gedanke dieses Beweises von (37), den wir hier der Klarheit wegen rechnerisch durchgeführt haben, besteht in folgendem. Das Intervall, über welches die beiden Integrale für $l_i^{(\mu)}$ bzw. $l_i^{\mu,\varepsilon,s}$ zu nehmen sind, wird in zwei Teile geteilt; der eine geht von 0 bis δ', der andere von δ' bis 1. Das erste Intervall kann so klein gemacht werden, daß die beiden dazugehörigen Integrale beliebig klein werden, im anderen Intervalle sind die Funktionen unter den Integralzeichen dieselben analytischen Funktionen der diesbezüglichen Eigenwerte, also hier analytische Funktionen von $\mu\pi$ bzw. von $\mu\pi + \frac{k\pi}{|\lg\varepsilon|}$. Der Unterschied zwischen den beiden über das Intervall $(\delta', 1)$ erstreckten Integralen kann also auch beliebig klein gemacht werden, wenn der Unterschied zwischen den diesbezüglichen Eigenwerten klein genug ist.

§ 4.

Ableitung des Fourierschen Integraltheorems.

Aus (40) können wir jetzt das Fouriersche Integraltheorem ableiten; zu diesem Zwecke setzen wir:

$$(41)\qquad \begin{gathered} x_p^{(\varepsilon)} = \int_0^1 K_\varepsilon(st)\sqrt{2}\sin(p\pi t)\,dt = k_p^{(\varepsilon)}(s), \quad x_p = k_p(s), \\ y_q = \int_0^1 g(t)\sqrt{2}\sin(q\pi t)\,dt, \end{gathered}$$

wobei $g(t)$ in 0 und 1 verschwinden und eine erste Ableitung besitzen soll, die den Dirichletschen Bedingungen genügt. Es habe jetzt s einen festen, von 0 verschiedenen Wert; dann wählen wir ε kleiner als s. $K_\varepsilon(st)$ ist unter dieser Voraussetzung eine stetige Funktion von t, deren erste Ableitung nach t überall endlich ist, wenn wir sie mit $\sqrt{t}$ multiplizieren; die erste Ableitung erleidet ferner nur in ε und s einen Sprung. Die mit $\sqrt{t}$ multiplizierte Ableitung nach t von $K_\varepsilon(st)$ bleibt überdies unter einer für alle ε gleichen endlichen Grenze. Man findet dann, eine bekannte Eigenschaft*) der gewöhnlichen Fourierkoeffizienten benützend:

$$(42)\qquad |x_p^{(\varepsilon)}| = |k_p^{(\varepsilon)}(s)| \leqq \left|\frac{A}{p^{\frac{3}{2}}}\right|; \quad |y_q| \leqq \frac{B}{q^2},$$

wobei A bei festem s eine Konstante ist, die wir für alle ε gleich annehmen dürfen; ebenso ist B eine endliche Konstante. Da dann

$$\sum_{p=1}^{\infty} (x_p^{(\varepsilon)})^2 \quad \text{und} \quad \sum_{q=1}^{\infty} y_q^2$$

gleichmäßig für alle ε konvergieren, so findet man wie bei IV

$$(43)\qquad \lim_{\varepsilon=0} K_\varepsilon(x^{(\varepsilon)}y) = K(xy).$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(x^{(\varepsilon)}y) &= \sum_p x_p^{(\varepsilon)} \sum_q k_{pq}^{(\varepsilon)} y_q \\ &= \sum_p x_p^{(\varepsilon)}\, 2 \sum_q \int_0^1\!\!\int_0^1 K_\varepsilon(\sigma t)\sin(p\pi t)\sin(q\pi\sigma)\,d\sigma\,dt\, y_q \\ &= \sqrt{2}\sum_p x_p^{(\varepsilon)} \int_0^1\!\!\int_0^1 K_\varepsilon(\sigma t)\, g(\sigma)\sin(p\pi t)\,d\sigma\,dt \\ &= \int_0^1\!\!\int_0^1 K_\varepsilon(st)\, K_\varepsilon(\sigma t)\, g(\sigma)\,d\sigma\,dt = \int_0^1 K_\varepsilon^{(2)}(st)\, g(t)\,dt, \end{aligned}$$

*) Vgl. z. B. E. Picard, Traité d'Analyse I, 1. Aufl., S. 233.

wie aus (19) unmittelbar folgt. Dabei ist

$$\int_0^1 K_\varepsilon(s\sigma)\, K_\varepsilon(\sigma t)\, d\sigma = K_\varepsilon^{(2)}(st);$$

also, wenn z. B. $s \geqq t \geqq \varepsilon$,

$$K_\varepsilon^{(2)}(st) = \int_\varepsilon^t \frac{\left(\sigma - \frac{\varepsilon^2}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{1}{s} - s\right)\left(\frac{1}{t} - t\right)}{4\sigma\sqrt{s}\sqrt{t}\,(1-\varepsilon^2)^2}\, d\sigma + \int_t^s \frac{\left(\frac{1}{\sigma} - \sigma\right)\left(\sigma - \frac{\varepsilon^2}{\sigma}\right)\left(t - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)\left(\frac{1}{s} - s\right)}{4\sigma\sqrt{s}\sqrt{t}\,(1-\varepsilon^2)^2}\, d\sigma$$

$$+ \int_s^1 \frac{\left(\frac{1}{\sigma} - \sigma\right)^2 \left(t - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)\left(s - \frac{\varepsilon^2}{s}\right)}{4\sigma\sqrt{s}\sqrt{t}\,(1-\varepsilon^2)^2}\, d\sigma.$$

Dieser Ausdruck lehrt unmittelbar:

$$(44) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \int_0^1 K_\varepsilon^{(2)}(st)\, g(t)\, dt = \int_0^1 K^{(2)}(st)\, g(t)\, dt.$$

Das Vorhergehende zusammenfassend haben wir also:

$$K(xy) = \int_0^1 K^{(2)}(st)\, g(t)\, dt;$$

wobei

$$K^{(2)}(st) = \int_0^1 K(s\sigma)\, K(\sigma t)\, d\sigma$$

ist.

Wir müssen das analoge Verfahren auf der rechten Seite von (40) anwenden. Da $\sum_{p=1}^{\infty} |x_p^{(\varepsilon)}|$ für alle ε gleichmäßig konvergiert, ebenso $\sum_{q=1}^{\infty} |y_q|$ konvergiert, so folgt wie bei (36)

$$L(x, \mu) = \lim_{\varepsilon=0} L_\varkappa^{(\varepsilon)}(x^{(\varepsilon)}); \quad L(y, \mu) = \lim_{\varepsilon=0} L_\varkappa^{(\varepsilon)}(y),$$

wobei $\varkappa = \mu\,|\lg \varepsilon|$ sein mag, und wir uns den an sich willkürlichen Grenzübergang so vollzogen denken, daß $\varkappa$ immer eine ganze Zahl ist. Dann wird nach (23), (12), (19) und (10)

$$(45) \quad L_\varkappa^{(\varepsilon)}(x^{(\varepsilon)}) = \frac{1}{1+\mu^2\pi^2}\,\frac{\sin(\mu\pi\,|\lg s|)}{\sqrt{s}}; \quad L_\varkappa^{(\varepsilon)}(y) = \int_\varepsilon^1 g(t)\,\frac{\sin(\mu\pi\,|\lg t|)\, dt}{\sqrt{t}}.$$

Es ist also:

$$L(x,\mu) = \frac{1}{1+\mu^2\pi^2}\frac{\sin(\mu\pi\,|\lg s|)}{\sqrt{s}}. \tag{45a}$$

Wir setzen jetzt:

$$f_1^{(\epsilon)}(s) = \int_0^1 K_\epsilon^{(2)}(st)\,g(t)\,dt; \tag{46}$$

dann ist nach (45) und (10):

$$\frac{L_x^{(\epsilon)}(y)}{(1+\mu^2\pi^2)^2} = \int_\epsilon^1 \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg(t)|)}{\sqrt{t}} f_1^{(\epsilon)}(t)\,dt,$$

also

$$\lim_{\epsilon=0} \frac{L_x^{(\epsilon)}(x^{(\epsilon)})\,L_x^{(\epsilon)}(y)}{1+\mu^2\pi^2} = \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg s|)}{\sqrt{s}}\cdot\int_0^1 f_1(t)\sin(\mu\pi\,|\lg t|)\frac{dt}{\sqrt{t}} \tag{47}$$

$$= \frac{L(x,\mu)\,L(y,\mu)}{1+\mu^2\pi^2}.$$

Wir setzen nun:

$$f_1(s)\sqrt{s} = f(s) = \sqrt{s}\int_0^1 K^{(2)}(st)\,g(t)\,dt, \tag{48}$$

dann ist:

$$f(s) = 2\int_0^\infty d\mu\,\sin(\mu\pi\,|\lg s|)\int_0^1 \sin(\mu\pi\,|\lg t|)\,f(t)\frac{dt}{t}. \tag{49}$$

Es ist noch anzugeben, unter welchen Bedingungen sich $f(s)$ in der Form (48) darstellen läßt. Wir setzen zu diesem Zwecke:

$$f(s) = \sqrt{s}\int_0^1 K(st)\,g_1(t)\,dt; \quad g_1(t) = \int_0^1 K(t\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

und führen wieder statt $K(st)$

$$\frac{G(st)}{\sqrt{s}\sqrt{t}} = K(st)$$

ein; dabei genügt $G(st)$ der Gleichung (4) und hat die charakteristische Unstetigkeit der Greenschen Funktion. Man hat also:

$$f(s) = \int_0^1 \frac{G(st)\,g_1(t)}{\sqrt{t}}\,dt; \quad g_1(t) = \int_0^1 \frac{G(t\tau)}{\sqrt{t}\sqrt{\tau}}\,g(\tau)\,d\tau,$$

und es ergibt sich:

$$-\frac{g_1(t)}{\sqrt{t}} = \frac{d}{dt}\,t\frac{df(t)}{dt} - \frac{f(t)}{t}; \quad -\frac{g(t)}{\sqrt{t}} = \frac{d}{dt}\,t\frac{d}{dt}\big(g_1(t)\sqrt{t}\big) - \frac{g_1(t)\sqrt{t}}{t},$$

was man durch Anwendung des Greenschen Satzes auf die linke Seite von (4) verifiziert, indem man für u $G(st)$, für v im ersten Falle $f(t)$, im zweiten Falle $g_1(t)\sqrt{t}$ setzt. Dabei muß aber $f(t)$ und $g_1(t)\sqrt{t}$ für $t = 0$ und $t = 1$ verschwinden und überall zweimal stetig differentiierbar sein. Wir schreiben nun etwas symmetrischer:

$$-g_1(t)\sqrt{t} = -g_2(t) = t\frac{d}{dt}t\frac{df}{dt} - f(t); \quad -g(t)\sqrt{t} = t\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}g_2(t) - g_2(t).$$

Das so bei gegebenem $f(t)$ definierte $g(t)$ muß in 0 und 1 verschwinden und eine stetige erste Ableitung besitzen.

§ 5.

Bildung der Resolvente $\mathsf{K}(\lambda; x x)$ von $K(x x)$.

Um die so aufgestellten Bedingungen für $f(s)$ zu vereinfachen, müssen wir die vorher abgebrochene Theorie der quadratischen Formen weiter ausbauen und speziell suchen, die in V definierte Resolvente $\mathsf{K}(\lambda; x x)$ zu gewinnen.

Aus der Definitionsgleichung in V für $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xy)$ folgt zunächst formal

$$(50)\quad \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x x) = (xx) + \lambda K_\varepsilon(xx) + \lambda^2 K_\varepsilon^{(2)}(x x) + \cdots + \lambda^n K_\varepsilon^{(n)}(xx) + \cdots,$$

wobei $K_\varepsilon^{(n)}(x x) = K_\varepsilon^{(n-1)}(x\cdot) K(\cdot x)$ die n^{te} iterierte Form ist. Ferner ist für alle ε, wie wir früher gesehen haben,

$$|K_\varepsilon(xx)| \leq 1,$$

ebenso folgt aus der etwas weiter unten in (51b) gegebenen Darstellung

$$|K_\varepsilon^{(2)}(x x)| \leq 1, \quad |K_\varepsilon^{(n)}(xx)| \leq 1$$

und daher konvergiert die Reihe in (50) für

$$|\lambda| \leq |\lambda'| < 1.^{*)}$$

Wir können also für alle ε n so groß angeben, daß, wenn wir setzen:

$$(51)\quad \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx) = (xx) + \lambda K_\varepsilon(xx) + \cdots + \lambda^{(n-1)} K_\varepsilon^{(n-1)}(x x) + R_{1,n}^{(\varepsilon)},$$

$|R_{1,n}^{(\varepsilon)}| \leq \delta$ für alle ε wird. Ferner ist nach (25) und (29) und der Definition von $K_\varepsilon^{(n)}(xx)$

$$(51\text{a})\qquad K_\varepsilon(x x) = \sum_{p=1}^{M|\lg \varepsilon|} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon|\, \lambda_p^{(\varepsilon)}} + R_M^{(\varepsilon)},$$

$$(51\text{b})\qquad K_\varepsilon^{(n)}(x x) = \sum_{p=1}^{M|\lg \varepsilon|} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon| \left(\lambda_p^{(\varepsilon)}\right)^n} + R_{M,n}^{(\varepsilon)},$$

*) An dieser Voraussetzung für λ wird im folgenden festgehalten, soweit nichts anderes bemerkt ist.

wobei die $R_{m,n}^{(\varepsilon)}$ mit wachsendem n immer kleiner werden; man zeigt dann, wie bei (39), daß, wenn n eine endliche Zahl ist und $\sum |x_i|$ konvergiert, man ε so klein bestimmen kann, daß für alle $\varepsilon' < \varepsilon$, $\varepsilon'' < \varepsilon$

$$|K_{\varepsilon'}(xx) - K_{\varepsilon''}(xx)| \leqq \delta, \quad |K_{\varepsilon'}^{(2)}(xx) - K_{\varepsilon''}^{(2)}(xx)| \leqq \delta,$$
$$|K_{\varepsilon'}^{(n)}(xx) - K_{\varepsilon''}^{(n)}(xx)| \leqq \delta;$$

folglich ist auch:

$$|\mathsf{K}_{\varepsilon'}(\lambda; xx) - \mathsf{K}_{\varepsilon''}(\lambda; xx)| \leqq \delta\,\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} + \delta.$$

Die $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx)$ konvergieren also mit abnehmendem ε gegen eine quadratische Form $\mathsf{K}(\lambda; xx)$, wenn $|\lambda| \leqq |\lambda'| < 1$ ist und $\sum |x_i|$ konvergiert. Da nun $|\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx)|$ für alle ε unter einer festen Grenze liegt, die unabhängig von ε ist, sofern $(xx) \leqq 1$, so ist $\mathsf{K}(\lambda; xx)$ gewiß auch eine beschränkte quadratische Form, wenn wir noch zeigen, daß, wenn nur $(xx) \leqq 1$,

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx) = \mathsf{K}(\lambda; xx).$$

In der Tat sei nun:

$$\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx) = \sum_{p,q} \varkappa_{pq}^{(\varepsilon)} x_p x_q; \quad \mathsf{K}(\lambda; xx) = \sum_{p,q} \varkappa_{pq} x_p x_q.$$

Setzt man dann alle $x = 0$ außer x_p; $x_p = 1$, wobei p irgend eine beliebige ganze Zahl ist, so folgt

$$\lim_{\varepsilon=0} \varkappa_{pp}^{(\varepsilon)} = \varkappa_{pp};$$

ebenso findet man für irgend ein q

$$\lim_{\varepsilon=0} \varkappa_{qq}^{(\varepsilon)} = \varkappa_{qq}.$$

Setzt man alle $x = 0$, außer x_p und x_q, so findet man

$$\lim_{\varepsilon=0} \varkappa_{pq}^{(\varepsilon)} = \varkappa_{pq}$$

und nach IV

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx) = \mathsf{K}(\lambda; xx).$$

Setzen wir nun:

$$K_{\varepsilon,M}(xx) = \sum_{p=1}^{M|\lg\varepsilon|} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg\varepsilon|\,\lambda_p^{(\varepsilon)}},$$

so ist nach (51a) für alle x und ε gleichmäßig

$$\lim_{M=\infty} K_{\varepsilon,M}(xx) = K_\varepsilon(xx)$$

und nach VIII die zu $K_{\varepsilon,M}(xx)$ gehörige Resolvente

$$\mathsf{K}_{\varepsilon,M}(\lambda;xx)=\sum_{p=1}^{M|\lg\varepsilon|}\frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg\varepsilon|\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_p^{(\varepsilon)}}\right)}+E_{\varepsilon,M}(xx),$$

wobei $E_{\varepsilon,M}(xx)$ die Summe der Quadrate der zu $\lambda_p^{(\varepsilon)}=\infty$ gehörigen Eigenformen von $K_{\varepsilon,M}(xx)$ ist. Dann zeigt man, wie bei $\mathsf{K}(\lambda;xx)$, daß $\mathsf{K}_{\varepsilon,M}(\lambda;xx)$ mit nach 0 abnehmendem ε nach $\mathsf{K}_M(\lambda;xx)$ konvergiert; da ferner die Summe nach einem bestimmten Grenzwert konvergiert, so ist, wenn $\sum|x_i|$ konvergiert, auch

$$\lim_{\varepsilon=0}E_{\varepsilon,M}(xx)=E_M(xx)$$

und

$$\lim_{\varepsilon=0}\mathsf{K}_{\varepsilon,M}(\lambda;xx)=\mathsf{K}_M(\lambda;xx)=2\int_0^M\frac{(L(x,\mu))^2}{1-\frac{\lambda}{1+\mu^2\pi^2}}d\mu+E_M(xx). \tag{52}$$

Nun folgt aus der zu (50) analogen Darstellung von $\mathsf{K}_{\varepsilon,M}(\lambda;xx)$ unmittelbar:

$$\lim_{M=\infty}\mathsf{K}_{\varepsilon,M}(\lambda;xx)=\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;xx),$$

und zwar gilt diese Gleichung gleichmäßig für alle ε; es ist also auch

$$\lim_{M=\infty}\mathsf{K}_M(\lambda;xx)=\mathsf{K}(\lambda;xx).$$

Da nun in (52) das Integral stets kleiner ist als $\mathsf{K}(\lambda;xx)$ und es mit wachsendem M wächst, so konvergiert

$$\int_0^\infty\frac{(L(x,\mu))^2}{1-\frac{\lambda}{1+\mu^2\pi^2}}d\mu$$

und wir sehen, daß auch

$$\lim_{M=\infty}E_M(xx)=E(xx)$$

existiert. Es ist also

$$\mathsf{K}(\lambda;xx)=2\int_0^\infty\frac{(L(x,\mu))^2}{1-\frac{\lambda}{1+\mu^2\pi^2}}d\mu+E(xx). \tag{53}$$

Es bleibt aber noch zu zeigen, daß $\mathsf{K}(\lambda; xx)$ eine Resolvente von $K(xx)$ ist, d. h. der Identität genügt:

$$\mathsf{K}(\lambda; xy) - \lambda K(x\cdot)\mathsf{K}(\lambda; \cdot y) = (xy). \tag{54}$$

Der Nachweis dieser Tatsache ist deshalb etwas schwierig, weil man nicht ohne weiteres schließen darf, daß, wenn

$$\lim_{\varepsilon=0} A_\varepsilon(xx) = A(xx), \quad \lim_{\varepsilon=0} B_\varepsilon(xx) = B(xx)$$

ist, auch

$$\lim_{\varepsilon=0} A_\varepsilon(x\cdot) B_\varepsilon(\cdot x) = A(x\cdot) B(\cdot x)$$

ist.

Es sei n eine feste Zahl, wir setzen $x_p = 0$ für $p > n$. Dann ist

$$K_\varepsilon(xy) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}^{(\varepsilon)} x_p y_q = \sum_{q=1}^{\infty} k_q^{(\varepsilon)} y_q,$$

wobei

$$k_q^{(\varepsilon)} = \sum_{p=1}^{n} k_{pq}^{(\varepsilon)} x_p$$

ist.

Dann kann man eine endliche, von ε unabhängige Zahl A so angeben, daß für $p \leqq n$ und alle ε

$$|k_{pq}^{(\varepsilon)}| = \left| 2\int_0^1 \sin(q\pi s) \int_0^1 \sin(p\pi t) K_\varepsilon(st)\, dt\, ds \right| \leqq \frac{A}{q^{\frac{3}{2}}},$$

also

$$|k_q^{(\varepsilon)}| \leqq \frac{A\cdot n}{q^{\frac{3}{2}}},$$

wenn jedes $|x_i| \leqq 1$ ist, und zwar gilt dieses für jedes ε, auch für $\varepsilon = 0$.

Da nun $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xy)$ für jedes ε unter einer festen Grenze M liegt, so ist, wenn $(xx) \leqq 1$, $(yy) \leqq 1$ ist, nach II b

$$\sum_i \left(\frac{\partial (\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xy))}{\partial x_i} \right)^2 \leqq M^2$$

für alle ε und auch für $\varepsilon = 0$; daher ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xy)) \leqq M$$

für alle ε.

Es ist also:

$$K_\varepsilon(x\cdot)\,\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\cdot y) = \sum_{q=1}^{\infty} k_q^{(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y))$$

$$= \sum_{q=1}^{m} k_q^{(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y)) + R_m^{(\varepsilon)},$$

wobei wir m so groß wählen können, daß

$$|R_m^{(\varepsilon)}| \leqq \delta$$

für alle ε. Denn es ist ja

$$\left|\sum_{q=m}^{\infty} k_q^{(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y))\right| \leqq n A M \sum_{q=m}^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Ebenso findet man:

$$K(x\cdot)\,\mathsf{K}(\lambda;\cdot y) = \sum_{q=1}^{\infty} k_q \frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}(\lambda; x y)) = \sum_{q=1}^{m} k_q \frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}(\lambda; x y)) + R_m,$$

wobei

$$|R_m| \leqq \delta.$$

Nun ist aber $\lim\limits_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y) = \mathsf{K}(\lambda; x y)$, d. h. man kann bei festen x und y zu der beliebig klein vorgeschriebenen Zahl δ ε so klein bestimmen, daß $|\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y) - \mathsf{K}(\lambda; x y)| \leqq \frac{\delta}{m}$.

Wir bestimmen ε so klein, daß diese Ungleichung erfüllt ist für die folgenden Wertsysteme der x:

$$\begin{array}{llll}
x_1 = 1, & x_2 = 0, \cdots, & x_m = 0, & x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = 0, \\
x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_m = 0, & x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = 0, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_m = 1, & x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = 0,
\end{array}$$

während die y allemal feste Werte haben. Ferner sei ε so klein, daß

$$|k_q^{(\varepsilon)} - k_q| \leqq \frac{\delta}{m} \quad \text{für } q < m.$$

Dann aber ist, wenn $x_p = 0$ für alle $p > n$ ist:

$$|K(x\cdot)\,\mathsf{K}(\lambda;\cdot y) - K_\varepsilon(x\cdot)\,\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\cdot y)|$$

$$\leqq \left|\sum_{q=1}^{m}\left(k_q \frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}(\lambda; x y)) - k_q^{(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y))\right)\right| + 2\delta,$$

ferner

$$\left| k_q \frac{\partial}{\partial x_q} \mathsf{K}(\lambda;\, xy) - k_q^{(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_q} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, xy) \right|$$

$$\leqq |k_q| \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_q} (\mathsf{K}(\lambda;\, xy)) - \frac{\partial}{\partial x_q} (\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, xy)) \right) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_q} (\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, xy))\,(k_q - k_q^{(\varepsilon)}) \right|$$

$$\leqq |k_q| \frac{\delta}{m} + \left| \frac{\partial}{\partial x_q} (\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, xy)) \right| \frac{\delta}{m} \leqq An \frac{\delta}{m} + \frac{M\delta}{m},$$

wobei immer $q \leqq m$ ist. Man erhält nämlich eben $\frac{\partial}{\partial x_q} \mathsf{K}(\lambda;\, xy)$, indem man $x_p = 0$ für $p \neq q$, $x_q = 1$ setzt. Also ist schließlich:

$$|K(x\cdot)\mathsf{K}(\lambda;\cdot y) - K_\varepsilon(x\cdot)\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\cdot y)| \leqq (An + M + 2)\delta,$$

d. h.

$$\lim_{\varepsilon=0} K_\varepsilon(x\cdot)\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\cdot y) = K(x\cdot)\mathsf{K}(\lambda;\cdot y).$$

Da ferner

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, xy) = \mathsf{K}(\lambda;\, xy); \quad \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, xy) - \lambda K_\varepsilon(x\cdot)\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\cdot y) = (xy),$$

so folgt:

(54) $$\mathsf{K}(\lambda;\, xy) - \lambda K(x\cdot)\mathsf{K}(\lambda;\cdot y) = (xy),$$

was zunächst nur gilt, wenn $x_p = 0$ für $p > n$; nach III folgt daraus die allgemeine Richtigkeit. Die in (53) definierte quadratische Form $\mathsf{K}(\lambda;\, xx)$ ist also eine Resolvente von $K(xx)$. Es ist aber auch die einzige Resolvente, wie aus der Entwicklung (50) folgt. Ersetzt man in (53) x durch $x + y$ und setzt $\lambda = 0$, so folgt

(55) $$(xy) = 2\int_0^\infty L(x, \mu)\, L(y, \mu)\, d\mu + E(xy).$$

Aus (53) und (54) gewinnt man in einfacher Weise*):

(56) $$E(x\cdot)K(\cdot y) = 0,$$

d. h. es ist $E(xx)$ eine zu $\lambda = \infty$ gehörige Eigenform von $K(xx)$, und läßt sich als solche in der Form**)

(57) $$E(xy) = \sum_r M_r(x)\, M_r(y)$$

darstellen, wobei $M_r(x) = \sum_i m_{ri} x_i$ eine beschränkte Linearform und

(57a) $$M_r(\cdot)\, K(\cdot y) = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} m_{rq} = 0 \text{ für jedes } p \text{ ist.}$$

Wir haben damit in der Tat für unser spezielles $K(xx)$ die Hilbertsche Darstellung (vergl. VIII) gewonnen.

---

*) H. 4, S. 198.

**) H. 4, S. 193 und 195.

§ 6.

Neue Ableitung des Fourierschen Integraltheorems unter beschränkteren Voraussetzungen.

Um das Fouriersche Integraltheorem jetzt unter beschränkteren Voraussetzungen abzuleiten, gehen wir von (55) aus und ersetzen x und y, wie in (41) durch $k_p(s)$, bezüglich durch

$$\int_0^1 g(t)\sqrt{2}\sin(q\pi t)\,dt.$$

Dann wird nach (19)

$$(xy) = \int_0^1 K(st)\,g(t)\,dt.$$

Auf der rechten Seite betrachten wir zunächst $E(xy)$. Es folgt aus (57a), daß

$$M_r(k(s)) = \sum_{q=1}^{\infty} m_{rq} k_q(s) \equiv 0$$

für jedes r und s ist. In der Tat konvergiert

$$\sum_{q=1}^{\infty} m_{rq}\, k_q(s)\sqrt{s}$$

gleichmäßig für alle s. Denn $\sum_q (m_{rq})^2$ konvergiert, ferner ist nach (19)

$$\sum_q (k_q(s))^2 \cdot s = \int_0^1 (K(st))^2 \cdot s\,dt$$

und dieser Ausdruck bleibt für $0 \leqq s \leqq 1$ unter einer festen Grenze G. Und es ist nach (IIa) $(lx)^2 \leqq (ll)(xx)$; man kann nun k so groß angeben, daß $\sum_{q=k}^{\infty}(m_{rq})^2 < \delta$, also $\left|\sum_{q=k}^{\infty}(m_{rq} k_q(s)\sqrt{s}\right| < \sqrt{\delta \cdot G}$ ist. Daraus folgt aber die gleichmäßige Konvergenz. Wir dürfen also

$$\sqrt{2}\cdot\int_0^1 M_r(k(s))\sin(p\pi s)\,ds$$

gliedweise integrieren; daher ist

$$\sqrt{2}\int_0^1 M_r(k(s))\sin(p\pi s)ds = \sum_q m_{rq}\sqrt{2}\int_0^1 k_q(s)\sin(p\pi s)\,ds = \sum_q m_{rq}k_{pq} = 0$$

nach (57a). Wenn aber eine Funktion $\varphi(s)$ die Eigenschaft hat, daß $\varphi(s)\sqrt{s}$ überall für $0 \leqq s \leqq 1$ stetig ist und wenn für jedes p

$$\int_0^1 \varphi(s) \sin(p\pi s)\, ds = 0$$

ist, so folgt, daß $\varphi(s) \equiv 0$ ist. Zum Nachweise dieses Satzes können wir uns nicht, wie gewöhnlich, des Vollständigkeitstheorems (19) bedienen, da ja $\int_0^1 \varphi(s)^2 ds$ nicht existieren muß; dagegen wird folgendes, im wesentlichen von Herrn Lebesgue*) herrührendes Verfahren den Beweis erbringen.

Wir definieren $\varphi(s)$ für negative s so, daß $\varphi(s)$ eine ungerade Funktion ist. $\varphi(s)$ ist dann mit Ausnahme von $s = 0$ überall stetig und kann für keinen von 0 verschiedenen Wert s_1 einen von 0 verschiedenen Wert besitzen. Denn sonst ließe sich eine endliche Umgebung um s_1 z. B. von a bis b angeben, so daß $\varphi(s)$ größer als eine endliche, von 0 verschiedene Zahl k ist, wenn $a \leqq s \leqq b$. Nun ist für alle ganzzahligen p und q

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(s) \sin(p\pi s)\, ds = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(s) \cos(p\pi s)\, ds = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(s)\, ds = 0.$$

Es ist also auch

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(s) g(s)\, ds = 0,$$

wenn $g(s)$ ein Polynom von $\cos(\pi(s - \alpha))$ bedeutet und α irgend eine Konstante ist. Setzt man dann

$$g(s) = \left[1 + \cos\left(\pi\left(s - \frac{a+b}{2}\right)\right) - \cos\left(\pi \frac{(a-b)}{2}\right)\right]^n,$$

so ist der Klammerausdruck für $a \leqq s \leqq b$ größer als 1, sonst immer kleiner als 1. $|\varphi(s)\sqrt{s}|$ bleibe nun für alle in Betracht kommenden s unterhalb einer endlichen Größe M; wie groß wir dann auch n wählen mögen, der Beitrag des Integrals über das ganze Intervall mit Ausnahme von (a, b) ist kleiner als $M \int_{-1}^{+1} \frac{ds}{|\sqrt{s}|}$, also unterhalb einer festen Zahl. Der zum Intervall (a, b) gehörige Teil wird aber, wenn wir n groß genug

*) Vgl. H. Lebesgue, Séries trigonométriques, S. 38.

wählen, beliebig groß; die beiden Teile können sich also nicht gegenseitig aufheben; $\int\limits_{-1}^{+1} \varphi(s)g(s)\,ds$ kann also nicht 0 sein, wenn wir n als ganze Zahl groß genug wählen und annehmen, daß $\varphi(s)$ im Intervalle (a,b) irgendwo einen von 0 verschiedenen Wert hat.

$M_r(k(s))$ ist also identisch 0 für alle s bei beliebigem r. Es ist daher

$$E(xy) \equiv 0 \quad \text{für} \quad x_p = k_p(s).$$

Um den noch übrigen Teil der rechten Seite von (55) zu gewinnen, setzen wir nach (45b)

$$L(x,\mu) = \frac{1}{1+\mu^2\pi^2}\,\frac{\sin(\mu\pi\,|\lg s|)}{\sqrt{s}}.$$

Ferner ist

$$L(y,\mu) = \int\limits_0^1 g(t)\frac{\sin(\mu\pi\,|\lg t|)}{\sqrt{t}}\,dt = (1+\mu^2\pi^2)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 g(t)\,K(t\tau)\frac{\sin(\mu\pi\,|\lg\tau|)}{\sqrt{\tau}}\,dt\,d\tau.$$

Dann erhält man schließlich statt (55):

$$f(s) = 2\int\limits_0^\infty d\mu\,\sin(\mu\pi\,|\lg s|)\int\limits_0^1 \sin(\mu\pi\,|\lg t|)f(t)\frac{dt}{t},$$

wenn sich $f(s)$ in der Form $f(s) = \sqrt{s}\int\limits_0^1 K(st)\,g(t)\,dt$ darstellen läßt; wobei $g(t)$ stetig sein, in 0 und 1 verschwinden und eine stetige 1. Ableitung besitzen muß. Dabei ergibt sich wie auf S. 19 aus dem Greenschen Satze:

$$-\frac{g(t)}{\sqrt{t}} = \frac{d}{dt}\,t\,\frac{df(t)}{dt} - \frac{f(t)}{t}$$

unter der Voraussetzung, daß $f(t)$ für $t=0$ und $t=1$ verschwindet und zweimal stetig differentiierbar ist.

Damit ist das Fouriersche Integraltheorem aufs neue und unter beschränkteren Voraussetzungen abgeleitet.

§ 7.

Lösung der inhomogenen Integralgleichung.

Zum Schlusse dieses Kapitels behandeln wir noch die Frage nach der Lösbarkeit der inhomogenen Integralgleichung:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda\int\limits_0^1 K(st)\,\varphi(t)\,dt,$$

wenn $\lambda < 1$ ist und $f(s)$ eine stetige Funktion bedeutet, für welche

$$\int_0^1 (f(s))^2 ds \leqq 1$$

ist. Um die folgende Ableitung verständlich machen zu können, soll kurz die von Herrn Hilbert gegebene Methode*) skizziert werden, welche auf die Kerne $K_\varepsilon(st)$ anwendbar ist. Sei

$$\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xa) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(\varepsilon)} x_i; \qquad a_p = \sqrt{2}\int_0^1 f(s) \sin(p\pi s)\, ds;$$

dann ist nach (19) $\sum_p a_p^2 \leqq 1$, und $\sum_i (\alpha_i^{(\varepsilon)})^2$ konvergiert nach IIb auch für $\varepsilon = 0$, da $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xa)$ und $\mathsf{K}(\lambda; xa)$ in bezug auf x beschränkte Linearformen sind. Und aus der Definitionsgleichung in V für $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x\, a)$ folgt:

$$\alpha_p^{(\varepsilon)} - \lambda \sum_q k_{pq}^{(\varepsilon)} \alpha_q^{(\varepsilon)} = a_p$$

für alle ganzzahligen Werte von p.

Man setzt dann

$$\alpha_1^{(\varepsilon)} k_1^{(\varepsilon)}(s) + \alpha_2^{(\varepsilon)} k_2^{(\varepsilon)}(s) + \cdots = \alpha^{(\varepsilon)}(s); \quad \alpha^{(0)}(s) = \alpha(s).$$

Diese Reihe konvergiert nach (IIc) bei beliebigem, von 0 verschiedenem ε gleichmäßig für alle s; da ferner

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i(s)^2 = \int_0^1 (K(st))^2 dt$$

ist und

$$s \cdot \int_0^1 (K(st))^2 dt$$

einen endlichen Wert hat, so konvergiert die Reihe auch noch für $\varepsilon = 0$ gleichmäßig in s, wenn wir jedes Glied mit $\sqrt{s}$ multipliziert haben. Wir dürfen also nach Multiplikation mit $\sin(p\pi s)$ bei jedem ε, selbst bei $\varepsilon = 0$, gliedweise integrieren und so folgt:

$$\lambda \int_0^1 \sin(p\pi s)\sqrt{2}\, \alpha^{(\varepsilon)}(s)\, ds = \lambda\,(\alpha_1^{(\varepsilon)} k_{p1}^{(\varepsilon)} + \alpha_2^{(\varepsilon)} k_{p2}^{(\varepsilon)} + \cdots) = \alpha_p^{(\varepsilon)} - a_p.$$

Setzt man

$$\varphi^{(\varepsilon)}(s) = f(s) + \lambda \alpha^{(\varepsilon)}(s), \quad \text{so ist} \quad \int_0^1 \sin(p\pi s)\sqrt{2}\, \varphi^{(\varepsilon)}(s)\, ds = \alpha_p^{(\varepsilon)},$$

*) H. 5, S. 448.

es sind also die $a_p^{(\varepsilon)}$ die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion $\varphi^{(\varepsilon)}(s)$, wenn $\varepsilon \neq 0$. Also folgt nach (19)

$$\lambda \int_0^1 K_\varepsilon(st)\,\varphi^{(\varepsilon)}(t)\,dt = \lambda \sum_p a_p^{(\varepsilon)} k_p^{(\varepsilon)}(s) = \varphi^{(\varepsilon)}(s) - f(s)$$

oder

$$f(s) = \varphi^{(\varepsilon)}(s) - \lambda \int_0^1 K_\varepsilon(st)\,\varphi^{(\varepsilon)}(t)\,dt. \tag{58}$$

Es ist zu untersuchen, was aus (58) wird, wenn ε nach 0 konvergiert. s habe einen von 0 verschiedenen festen Wert. Aus der oben gemachten Bemerkung anläßlich der gleichmäßigen Konvergenz von $\alpha^{(\varepsilon)}(t)\sqrt{t}$ folgt, daß $\alpha^{(\varepsilon)}(t)\sqrt{t}$ für alle zwischen 0 und 1 liegenden Werte von t und für alle ε unter einer festen Grenze liegt; dann kann man aber zu jedem δ ein δ' so angeben, daß

$$\left| \int_0^{\delta'} K_\varepsilon(st)\,\varphi^{(\varepsilon)}(t)\,dt \right| < \frac{\delta}{2}$$

für alle ε, auch für $\varepsilon = 0$. Es bleibt also nur noch der Nachweis, daß

$$\lim_{\varepsilon=0} \alpha^{(\varepsilon)}(t) = \alpha(t) \quad \text{für} \quad t \geqq \delta'$$

ist, wobei δ' eine von ε unabhängige, von 0 verschiedene feste Größe darstellt.

Nun ist nach dem früheren für $-1 < \lambda < 1$:

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, x\,y) = \mathsf{K}(\lambda;\, x\,y).$$

Um die Richtigkeit dieser Grenzgleichung für alle negativen λ nachzuweisen, geht man statt von $K_\varepsilon(xx)$ von $(xx) - K_\varepsilon(xx)$ aus.*) Aus der Definitionsgleichung von $\mathsf{K}(\lambda;\, xx)$ in V folgt, daß dann die Resolvente $\mathsf{K}_\varepsilon^*\left(\frac{\lambda}{\lambda-1};\, x\,x\right)$ der neuen quadratischen Form $(xx) - K_\varepsilon(xx) = K_\varepsilon^*(xx)$ den Wert $(1-\lambda)\,\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, x\,x)$ hat. Und durch dasselbe Schlußverfahren, wie früher, findet man

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon^*\left(\frac{\lambda}{\lambda-1};\, xx\right) = \mathsf{K}^*\left(\frac{\lambda}{\lambda-1};\, xx\right) \quad \text{für} \quad \left|\frac{\lambda}{\lambda-1}\right| < 1,$$

also ist auch

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, xx) = \mathsf{K}(\lambda;\, x\,x) \quad \text{für} \quad \left|\frac{\lambda}{\lambda-1}\right| < 1,$$

folglich sicher für $\lambda \leqq -1$.

*) H. 4, S. 183.

Nun folgt aus (42)

$$|k_p^{(\varepsilon)}(t)| \leqq \frac{A}{p^{\frac{3}{2}}},$$

wobei A für $t \geqq \delta'$ eine von ε und p unabhängige endliche Größe ist. Da die $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x\,a)$ für $\lambda < 1$ beschränkte Formen sind, die also für alle Werte von ε unter einer Größe B_λ liegen, so ist auch $|\alpha_p^{(\varepsilon)}| < B_\lambda$, da $\alpha_p^{(\varepsilon)}$ aus $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x\,a)$ hervorgeht, indem man $x_p = 1, x_q = 0$ für $q \neq p$ setzt. Wir bestimmen jetzt N so groß, daß für alle ε

$$\sum_{p=N}^{\infty} |k_p^{(\varepsilon)}(t)| < \frac{\delta}{4B_\lambda},$$

wenn $t \geqq \delta'$ ist; ferner wählen wir ε so klein, daß

$$|\alpha_p^{(\varepsilon)} - \alpha_p| < \frac{\delta}{4NA}$$

für $p \leqq N$, ebenso

$$|k_p^{(\varepsilon)}(t) - k_p(t)| < \frac{\delta}{4NB_\lambda}$$

wird. Dann ist:

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty}\left(\alpha_p^{(\varepsilon)} k_p^{(\varepsilon)}(t) - \alpha_p k_p(t)\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{p=1}^{N}(\alpha_p^{(\varepsilon)} - \alpha_p)\, k_p^{(\varepsilon)}(t) + \sum_{p=1}^{N}\alpha_p(k_p^{(\varepsilon)}(t) - k_p(t)) + \sum_{p=N}^{\infty}(k_p^{(\varepsilon)}(t)\,\alpha_p^{(\varepsilon)} - \alpha_p k_p(t))\right| \leqq \delta,$$

d. h. es ist für alle $t > \delta'$ der Ausdruck $|\alpha^{(\varepsilon)}(t) - \alpha(t)| < \delta$. Führen wir jetzt $\varphi^{(\varepsilon)}(t)$ und $\varphi^{(0)}(t) = \varphi(t)$ ein, so ist für alle $t > \delta'$ der Ausdruck $|\varphi^{(\varepsilon)}(t) - \varphi(t)| < \delta$, wenn ε klein genug ist. Ebenso kann man bei festem, von 0 verschiedenem s stets erreichen, daß $|K_\varepsilon(st) - K(st)| < \delta$ für alle t wird. Es folgt also

$$\lim_{\varepsilon=0}\left|\varphi^{(\varepsilon)}(s) - \varphi(s) - \lambda\int_0^1 (K_\varepsilon(st)\,\varphi^{(\varepsilon)}(t) - K(st)\,\varphi(t))\,dt\right| = 0,$$

oder

(59) $$f(s) = \varphi(s) - \lambda\int_0^1 K(st)\,\varphi(t)\,dt.$$

Damit ist die Integralgleichung (59) *gelöst*, und so die Tragweite der Hilbertschen Methode gezeigt. In der Tat dürfte es unmöglich sein,

eine Integralgleichung von dem Typus (59) vermittelst der Fredholmschen Theorie zu behandeln. Es ist aber auch hervorzuheben, daß $K(st)$ *zu dem Typus von Kernen gehört, der nach den Kernen, die auf (voll)stetige quadratische Formen führen, der einfachste ist.*

Man kommt nämlich auf stetige quadratische Formen, wie schon früher erwähnt wurde, wenn $\int_0^1\int_0^1 (K(st))^2\,ds\,dt$ einen endlichen Wert hat; in unserm Falle wird aber $\int_0^1\int_0^1 (K(st))^2\,ds\,dt$ *mit nach 0 konvergierendem* δ *gerade logarithmisch unendlich.*

Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, gedenke ich in einer folgenden Arbeit allgemein die Theorie derartiger Kerne zu behandeln.

Kapitel II.

Über die Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Eigenfunktionen einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit einer geeigneten singulären Stelle am Ende des Intervalles.

§ 1.

Die Verteilung der Eigenwerte.

Wir gehen hier von der Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}s\frac{du}{ds}+\frac{(g^*(s)+\lambda^* h(s))}{s}u(s)=L(u)=0 \tag{60}$$

aus. Dabei sind $g^*(s), h(s)$ analytische Funktionen von s, die in der Umgebung der positiven reellen Achse zwischen 0 und 1 den Charakter von ganzen Funktionen haben*), überdies sind $g^*(s)$ und $h(s)$ für reelle s reell und $h(s)$ durchaus größer als eine von 0 verschiedene positive Zahl a.

Nach diesen Festsetzungen kann man eine positive Zahl m so angeben, daß

$$g^*(s)-m\,h(s)=-g(s)<-1 \tag{61}$$

für $0\leqq s\leqq 1$ wird. Wir setzen dann

$$g(0)=g_0;\quad h(0)=1,$$

*) Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, nehmen wir im folgenden an, daß $g^*(s)$ und $h(s)$ für $|s|\leqq\varrho$ sich regulär erhalten, wo $\varrho>1$ ist.

was wir durch Abänderung von λ^* in (60) von Anfang an als erreicht annehmen, ferner setzen wir $\lambda = \lambda^* + m$. Dann erhält man:

$$\text{(61a)} \qquad \frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} + \frac{-g(s) + \lambda h(s)}{s} u = 0.$$

In der Umgebung von $s = 0$ existieren 2 Fundamentallösungen:

$$\text{(62)} \qquad u_0(s) = s^{r_1} \Pi_0(s); \quad u_1(s) = s^{r_2} \Pi_1(s);$$

wobei

$$r_1 = + \sqrt{g_0 - \lambda}; \quad r_2 = - \sqrt{g_0 - \lambda};$$

oder allgemein

$$r' = \pm \sqrt{g_0 - \lambda}$$

ist.

Wir müssen nun Π_0 und Π_1 als Funktionen von λ betrachten; es ist aber zweckmäßiger, r' statt λ einzuführen; dann sind für alle Werte von λ, für welche der reelle Teil von $g_0 - \lambda$ kleiner ist als $\alpha < \frac{1}{4}$, Π_0 und Π_1 analytische Funktionen von r_1 bez. r_2 und zwar vom Charakter ganzer Funktionen. Dasselbe gilt, wenn $g_0 - \lambda > 0$ ist, von derjenigen Fundamentallösung, welche zu dem Exponenten mit größerem reellen Teil gehört.

Da der Beweis dieser für das Folgende grundlegenden Aussage sich mittels der Majorantenmethode äußerst einfach ergibt, wollen wir ihn der Vollständigkeit halber kurz skizzieren.

Es sei

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n s^n, \qquad h(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n s^n,$$

dann kann man bekanntlich eine endliche Zahl M so angeben, daß

$$|g_n| < \frac{M}{\varrho^n}; \qquad |h_n| < \frac{M}{\varrho^n}.$$

Ferner sei

$$\Pi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n,$$

wobei $\Pi(s)$ zu einem der 3 Fälle, die in der Behauptung unterschieden sind, gehört. Dann ist

$$\begin{aligned}
r'^2 &= g_0 - \lambda, \\
p_1[(r'+1)^2 - g_0 + \lambda] &= (g_1 - \lambda h_1) p_0, \\
p_2[4r' + 4] &= (g_2 - \lambda h_2) p_0 + (g_1 - \lambda h_1) p_1, \cdots, \\
p_m[2mr' + m^2] &= (g_m - \lambda h_m) p_0 + (g_{m-1} - \lambda h_{m-1}) p_1 + \cdots.
\end{aligned}$$

In jedem der 3 Fälle ist der Faktor von p auf der linken Seite wesentlich von 0 verschieden. Wir nehmen als Majorante:

$$\bar{p}_1 = M \frac{|(1+\lambda)| p_0}{(2r'+1)\varrho},$$

$$\bar{p}_2 = \frac{|1+\lambda| M}{(4r'+4)} \left[\frac{p_0}{\varrho^2} + \frac{\bar{p}_1}{\varrho}\right], \cdots$$

$$\bar{p}_m = \frac{|1+\lambda| M}{(2mr+m^2)} \left[\frac{p_0}{\varrho^m} + \frac{\bar{p}_1}{\varrho^{m-1}} + \cdots \frac{\bar{p}_{m-1}}{\varrho}\right].$$

$$\bar{p}_{m+1} = \left\{\frac{|1+\lambda| M}{|2(m+1)r+(m+1)^2|} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{|2mr+m^2|}{|2(m+1)r+(m+1)^2|} \cdot \frac{1}{\varrho}\right\} \bar{p}_m.$$

Es liege nun $|\lambda|$ unterhalb einer beliebig großen, aber festen Größe λ_1, dann kann man m_1 zu gegebenem δ so groß bestimmen, daß für alle $|\lambda| < \lambda_1$

$$\left|\frac{\bar{p}_{m+1}}{p_m}\right| < \frac{1+\delta}{\varrho},$$

wenn $m \geqq m_1$ ist; d. h. aber, die Reihe für $\Pi(s)$ konvergiert gleichmäßig für alle r', für welche $|r'|$ unter einer endlichen Grenze liegt, wenn $s \leqq 1$, $\Pi(s)$ ist also nach dem bekannten Weierstraßschen Doppelreihensatz eine analytische Funktion von r'; speziell läßt sich um jedes rein imaginäre r' ein Kreis vom Radius $\geqq \frac{1}{4}$ angeben, innerhalb dessen $\Pi(s)$ als Funktion von r' den Charakter einer ganzen Funktion hat.

Sei jetzt r' rein imaginär, dann ist:

$$u_0(s) = \cos\left(\sqrt{\lambda - g_0}\,|\lg s|\right) + i \sin\left(\sqrt{\lambda - g_0}\,|\lg s|\right) + s\left(\Pi_1^*(s) + i\,\Pi_2^*(s)\right),$$

$$u_1(s) = \cos\left(\sqrt{\lambda - g_0}\,|\lg s|\right) - i \sin\left(\sqrt{\lambda - g_0}\,|\lg s|\right) + s\left(\Pi_1^*(s) - i\,\Pi_2^*(s)\right).$$

Setzen wir $\sqrt{\lambda - g_0} = r\pi$, so erhält man zwei reelle Fundamentallösungen

$$\text{(63)} \qquad \begin{cases} U_0^{(r)}(s) = \cos(r\,|\lg s|\,\pi) + s\,\mathfrak{P}_0^{(r)}(s), \\ U_1^{(r)}(s) = \sin(r\,|\lg s|\,\pi) + s\,\mathfrak{P}_1^{(r)}(s) \end{cases}$$

und $\mathfrak{P}_0^{(r)}(s)$ und $\mathfrak{P}_1^{(r)}(s)$ liegen auch für $s = 0$ unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze.

Wir bestimmen jetzt $A(r)$ und $B(r)$ so, daß, wenn

$$\text{(63a)} \qquad A\,U_0^{(r)}(s) + B\,U_1^{(r)}(s) = u^{(r)}(s),$$

$$\text{(63b)} \qquad u^{(r)}(1) = 0, \quad \left(\frac{d\,u^{(r)}(s)}{ds}\right)_{s=1} = -r\pi$$

wird. Man hat also

$$A\,U_0^{(r)}(1) + B\,U_1^{(r)}(1) = 0,$$

$$A\left(\frac{d\,U_0^{(r)}(s)}{ds}\right)_{s=1} + B\left(\frac{d\,U_1^{(r)}(s)}{ds}\right)_{s=1} = -r\pi.$$

Es ist aber

$$U_0^{(r)}(1)\left(\frac{d U_1^{(r)}(s)}{ds}\right)_{s=1} - U_1^{(r)}(1)\left(\frac{d U_0^{(r)}(s)}{ds}\right)_{s=1}$$
$$= \lim_{s=0} s\left[U_0^{(r)}(s)\frac{d}{ds}(U_1^{(r)}(s)) - U_1^{(r)}(s)\frac{d}{ds}(U_0^{(r)}(s))\right] = r\pi;$$

also wird

$$A = U_1^{(r)}(1); \quad B = -U_0^{(r)}(1)$$

und daher schließlich

$$u^{(r)}(s) = U_1^{(r)}(1)\,U_0^{(r)}(s) - U_0^{(r)}(1)\,U_1^{(r)}(s). \tag{64}$$

Die so bestimmten Koeffizienten sind nach dem früheren vom Charakter ganzer Funktionen von r für die hier in Betracht kommenden Werte von r.

Wir suchen jetzt uns ein Bild von der Verteilung der Eigenwerte $\lambda^{(\epsilon)}$ zu machen, welche zu Eigenfunktionen gehören, die in $s=\varepsilon$ und $s=1$ verschwinden. Die Festlegung der Eigenwerte $\lambda^{(\epsilon)}$ geschieht bekanntlich vermittelst der Sturmschen Sätze*), welche lehren, daß man $\lambda^{(\epsilon)}$ auf eine und nur eine Weise so bestimmen kann, daß die dazu gehörige Eigenfunktion außer in ε und 1 noch in m Punkten zwischen ε und 1 verschwindet; m heißt nach Herrn Klein**) *Oszillationszahl*, der Satz selbst *Oszillationstheorem*.***)

Am anschaulichsten wird die Sachlage, wenn wir uns der geometrischen Darstellung bedienen, indem wir s als Abszisse und die Funktion $y=-g(s)+\lambda h(s)$ für die verschiedenen Werte von λ als Ordinate gezeichnet denken.

Ist $\lambda=0$, so ist $y=y^{\times}=-g(s)$; wir erhalten dann für y^* eine Kurve, die ganz unterhalb der Geraden $y=-1$ liegt. Wächst λ, so rückt die Kurve nach oben, und es existieren sicher für jeden Bereich $(\varepsilon, 1)$ so lange keine Eigenwerte, bis die Kurve die s-Achse schneidet. Gehört dann zu zwei Lagen der Kurve je ein Eigenwert für den Bereich $(\varepsilon, 1)$, so gehört zu der höher gelegenen Kurve die größere Oszillationszahl; gehören zwei Kurven bei verschiedenen Bereichen zu derselben

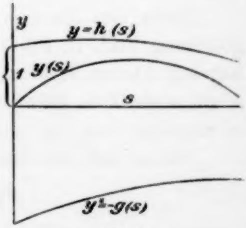


Fig. 1.

*) Journal de Math. 1. Vergl. auch M. Bôcher, N. Y. Bull. 1898; Encyklopädie II A 7a; E. Picard, Traité d'Analyse III; ferner die Arbeit des Verfassers in den Jahresberichten 1907.

**) Göttinger Nachrichten 1890.

***) Bez. der Entwicklung nach den hierher gehörigen Eigenfunktionen vergl. auch die Arbeiten von A. Kneser in den Math. Ann. Bd. 58 und 60.

Oszillationszahl, so gehört zu dem kleineren Bereiche die höher gelegene Kurve.

Es sind jetzt zwei typische Fälle zu unterscheiden, je nachdem für $\lambda = g_0$ die in $s = 0$ endliche Lösung zwischen $s = 0$ und $s = 1$ m Nullstellen oder keine Nullstelle besitzt. Für $\lambda = g_0$ geht die in Fig. 1 gezeichnete Kurve $y(s)$ durch den Koordinatenanfangspunkt und aus den eben zitierten Sätzen folgt dann im ersten Falle, daß es für den Bereich $(0, 1)$ m Eigenwerte $< g_0$ gibt; man kann ferner ε so klein wählen, daß auch für den Bereich $(\varepsilon, 1)$ m Eigenwerte $< g_0$ existieren. Im zweiten Fall sind alle Eigenwerte für den Bereich $(0, 1)$ und daher auch für jeden Bereich $(\varepsilon, 1) > g_0$.

Wenn jetzt aber $\lambda > g_0$ ist, tritt (63) in Kraft. Wir behaupten, daß man dann ε so klein wählen kann, daß der *Unterschied zwischen zwei Werten r, die zu aufeinanderfolgenden Eigenwerten für den Bereich* $(\varepsilon, 1)$ *gehören, gleich* $\frac{1 + \varepsilon M}{|\lg \varepsilon|}$ *wird, wobei* $|M|$ *für jedes noch so kleine* ε *unterhalb einer festen endlichen Größe* M_1 *liegt,* wenn $\lambda < \lambda'$; dabei kann λ' beiebig groß vorgegeben werden; die Ungleichung gilt also für alle $r < N$, wenn $N = \sqrt{\lambda' - g_0}$ ist.

Dieser wichtige Satz folgt unmittelbar daraus, daß die Oszillationen von $u^{(r)}(s)$ für kleine s wesentlich bestimmt sind durch die beiden Glieder

$$A(r) \cos (r |\lg s| \pi) + B(r) \sin (r |\lg s| \pi).$$

Um dies im einzelnen durchzuführen, bemerken wir zunächst, daß für $r < N$ $A(r)$ und $B(r)$ nur in einer endlichen Anzahl von Stellen verschwinden, und zwar liegen die Nullstellen von $A(r)$ getrennt von denjenigen von $B(r)$, da $U_1^{(r)}(1)$ und $U_2^{(r)}(1)$ nicht gleichzeitig verschwinden, es sei denn für $r = 0$.

Sollte nun für $r = 0$ die in $s = 0$ endliche Lösung der Differentialgleichung auch in $s = 1$ verschwinden, so schließen wir $r = 0$ durch ein beliebig kleines Intervall aus, wodurch dann die folgende Untersuchung nicht wesentlich geändert wird. Dann kann man eine endliche Zahl d so angeben, daß, für alle $r < N$, $\left|\sqrt{(A(r))^2 + (B(r))^2}\right| \geqq d$ ist.

Ebenso läßt sich eine endliche Zahl b so angeben, daß für $0 \leqq s \leqq 1$, $r \leqq N$

$$|A\mathfrak{P}_0^{(r)}(s)| \leqq b, \quad |B\mathfrak{P}_0^{(r)}(s)| \leqq b,$$

$$\left|\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)\right| \leqq b, \quad \left|\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)\right| \leqq b, \quad \left|s^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} A\mathfrak{P}_0^{(r)}(s)\right| \leqq b, \quad \left|s^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} B\mathfrak{P}_1^{(r)}(s)\right| \leqq b,$$

wobei der Exponent $\frac{1}{2}$ an Stelle irgend eines anderen willkürlichen positiven Exponenten gesetzt ist. Es sei nun

$$\mathsf{A}(r) + \varepsilon \mathsf{B}(r) = u^{(r)}(\varepsilon),$$

dabei ist

$$\mathsf{A}(r) = A(r)\cos(r\pi|\lg\varepsilon|) + B(r)\sin(r\pi|\lg\varepsilon|),$$
$$\mathsf{B}(r) = A(r)\,\mathfrak{P}_0^{(r)}(\varepsilon) + B(r)\,\mathfrak{P}_1^{(r)}(\varepsilon),$$

ferner sei für ein bestimmtes $r^{(1)}$

$$\mathsf{A}(r^{(1)}) = 0.$$

Wir setzen dann

$$r^{(2)} = r^{(1)} + \frac{M_2\varepsilon}{|\lg\varepsilon|}$$

und behaupten, daß man M_2 so bestimmen kann, daß

$$u^{(r^{(2)})}(\varepsilon) = 0 \quad \text{und} \quad |M_2| < \frac{M_1}{3}$$

ist, wobei M_1 eine für alle $r < N$ feste, endliche Zahl bedeutet.

In der Tat erhält man

$$u^{(r^{(2)})}(\varepsilon) = -A(r^{(1)})\sin(r^{(1)}\pi|\lg\varepsilon|)\,M_2\varepsilon\pi$$
$$+ B(r^{(1)})\cos(r^{(1)}|\lg\varepsilon|\,\pi)\,M_2\varepsilon\pi + R,$$

wobei

$$|R| \leqq 2bM_2\frac{\varepsilon}{|\lg\varepsilon|} + 2b\varepsilon$$

ist. Wenn ε klein genug ist, kann man, da

$$|-A(r^{(1)})\sin(r^{(1)}\pi|\lg\varepsilon|) + B(r^{(1)})\cos(r^{(1)}\pi|\lg\varepsilon|)|$$
$$= |\sqrt{(A(r^{(1)}))^2 + (B(r^{(1)}))^2}| \geqq d$$

ist, eine für alle $r^{(1)} < N$ endliche Zahl M_1 so angeben, daß, wenn sich M_2 von $-\frac{M_1}{3}$ bis $+\frac{M_1}{3}$ bewegt, $u^{(r^{(2)})}(\varepsilon)$ das Zeichen wechselt.

Also erhält man auf diese Weise auch das gesuchte M_2, für welches $u^{(r^{(2)})}(\varepsilon) = 0$ ist.

Genau so zeigt man, daß man in

$$r^{(3)} = r^{(1)} + \frac{1 + M_3\varepsilon}{|\lg\varepsilon|}$$

M_3 so bestimmen kann, daß $|M_3| < \frac{M_1}{3}$ ist und $\mathsf{A}(r^{(3)}) = 0$ wird.

Dann folgt, wie früher, daß $u^{(r^{(4)})}(\varepsilon) = 0$ wird, wenn

$$r^{(4)} = r^{(3)} + \frac{M_4\varepsilon}{|\lg\varepsilon|}.$$

Es ist also

$$r^{(4)} - r^{(2)} = \frac{1}{|\lg\varepsilon|} + \frac{\varepsilon}{|\lg\varepsilon|}\cdot(M_4 + M_3 - M_2) = \frac{1 + \varepsilon M}{|\lg\varepsilon|},$$

wobei M eine Größe ist, für welche $|M| \leqq M_1$ ist, wie klein auch ε sein mag; damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Aus der Ableitung folgt auch unmittelbar, daß zwischen $r^{(2)}$ und $r^{(4)}$ kein zu einem Eigenwerte λ gehöriges r liegt.

Aus der so gewonnenen Abschätzung folgt jetzt, daß, wenn ε nach 0 konvergiert, *die Eigenwerte λ, welche $> g_0$ sind, sich zu einem kontinuierlichen Streckenspektrum verdichten werden, während die m Eigenwerte*

$$\lambda_p < g_0 \quad \textit{für} \quad p = 1 \cdots m$$

ein Punktspektrum geben.

§ 2.

Einige Sätze über das Verhalten der Greenschen Funktion.

Nachdem wir uns jetzt über die Verteilung der Eigenwerte orientiert haben, verfahren wir analog wie im Kapitel I und bilden zunächst die Greensche Funktion $G_2^{(\varepsilon)}(st)$, die für $s = \varepsilon$ und $s = 1$ verschwindet, und der Differentialgleichung:

(65) $$\frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} - \frac{g(s)}{s} u = 0$$

genügt. $G_2^{(\varepsilon)}(st)$ läßt sich jetzt natürlich nicht mehr so einfach wie im letzten Kapitel darstellen, jedoch läßt es sich mit dem in Kapitel I § 1 definierten $G_\varepsilon(st)$, für welches wir jetzt zum Unterschiede $G_1^{(\varepsilon)}(st)$ schreiben, leicht vergleichen.

Wir können diesen Vergleich auf zweierlei Weise durchführen, einmal vermittelst des durch Formel (6) gegebenen Greenschen Satzes, das zweite Mal direkt vermittelst der Definition der Greenschen Funktion.

Die erste Methode ist der Ausdehnung auf die Potentialtheorie fähig, die zweite ist sehr anschaulich; wir werden daher beide hier durchführen.

Wir setzen also bei der ersten Art der Beweisführung in (6)

$$p = s,\ q = 0,\ v = G_2^{(\varepsilon)}(st),\ u = G_1^{(\varepsilon)}(s\sigma),\ a = \varepsilon,\ b = 1,$$

dann erhält man unter Berücksichtigung der Unstetigkeit der ersten Ableitung der Greenschen Funktion:

(66) $$\int_\varepsilon^1 G_2^{(\varepsilon)}(st)\, G_1^{(\varepsilon)}(s\sigma)\,(1 - g(s))\frac{ds}{s} = G_2^{(\varepsilon)}(\sigma t) - G_1^{(\varepsilon)}(\sigma t).$$

Nun wechseln $G_1^{(\varepsilon)}(s\sigma)$ und $G_2^{(\varepsilon)}(st)$ ihr Zeichen nicht zwischen 0 und 1 und sind, wie aus der Festlegung der Unstetigkeit der ersten Ableitung folgt, beide positiv, ferner ist nach (61) $g(s)$ immer größer als 1; es folgt also aus (66)

(67) $$G_2^{(\varepsilon)}(\sigma t) \leqq G_1^{(\varepsilon)}(\sigma t).$$

Da ferner $G_2^{(\varepsilon)}(\sigma t)_{\sigma=\varepsilon} = 0$ und auch $G_1^{(\varepsilon)}(\sigma t)_{\sigma=\varepsilon} = 0$, so folgt aus (67)

(68) $$\left(\frac{d G_2^{(\varepsilon)}(\sigma t)}{d\sigma}\right)_{\sigma=\varepsilon} < \left(\frac{d}{d\sigma} G_1^{(\varepsilon)}(\sigma t)\right)_{\sigma=\varepsilon}.$$

Seien nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ irgend zwei Größen kleiner als 1 und $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, dann ist:

(69) $$|G_2^{(\varepsilon_1)}(st) - G_2^{(\varepsilon_2)}(st)| \leqq |G_1^{(\varepsilon_1)}(st) - G_1^{(\varepsilon_2)}(st)|.$$

Denn es ist wieder nach dem Greenschen Satze:

$$G_2^{(\varepsilon_1)}(st) - G_2^{(\varepsilon_2)}(st) = \varepsilon_2 G_2^{(\varepsilon_1)}(\varepsilon_2 t)\left(\frac{d}{ds}\, G_2^{(\varepsilon_2)}(st)\right)_{s=\varepsilon_2},$$

$$G_1^{(\varepsilon_1)}(st) - G_1^{(\varepsilon_2)}(st) = \varepsilon_2 G_1^{(\varepsilon_1)}(\varepsilon_2 t)\left(\frac{d}{ds}\, G_1^{(\varepsilon_2)}(st)\right)_{s=\varepsilon_2}.$$

Und aus (67) und (68) folgt jetzt unmittelbar (69), da alle auftretenden Größen positiv sind. Daraus folgt aber die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon=0} G_2^{(\varepsilon)}(st) = G_2(st)$$

und es ist

$$(70) \qquad G_2(st) \leqq G_1(st); \quad |G_2(st) - G_2^{(\varepsilon)}(st)| \leqq |G_1(st) - G_1^{(\varepsilon)}(st)|.$$

Wir leiten jetzt diese Formeln nach der zweiten Methode ab.

Wir gehen durch die Substitution $s = e^{-x}$ auf die Gleichung:

$$(71) \qquad \frac{d^2}{dx^2}u(e^{-x}) - g(e^{-x})u(e^{-x}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2}{dx^2}u(e^{-x}) - u(e^{-x}) = 0$$

zurück; unser Intervall für x erstreckt sich wieder von 0 bis $|\lg \varepsilon|$. Dann folgt aus (71) unter Berücksichtigung von (61), daß, wenn $G_1^{(\varepsilon)}$ und $G_2^{(\varepsilon)}$ für irgend ein x denselben Wert haben, $\frac{dG_2^{(\varepsilon)}}{dx}$ an dieser Stelle stärker wächst als $\frac{dG_1^{(\varepsilon)}}{dx}$ *). Wenn also für $x = 0$

$$\frac{dG_2^{(\varepsilon)}}{dx} > \frac{dG_1^{(\varepsilon)}}{dx}$$

wäre, so wäre durchaus

$$\frac{dG_2^{(\varepsilon)}}{dx} > \frac{dG_1^{(\varepsilon)}}{dx},$$

da beide Funktionen an der Sprungstelle um gleich viel abnehmen. Dann wäre aber durchaus $G_2^{(\varepsilon)} > G_1^{(\varepsilon)}$ und es könnten nicht beide für $x = |\lg \varepsilon|$ verschwinden. Es ist also

$$\frac{dG_2^{(\varepsilon)}}{dx} \leqq \frac{dG_1^{(\varepsilon)}}{dx}$$

für $x = 0$.

Wenn dann in einem Punkte zwischen $x = 0$ und $x = |\lg \varepsilon|$ G_2 und G_1 denselben Wert annehmen würden, so wäre hier auch:

$$\frac{dG_2^{(\varepsilon)}}{dx} > \frac{dG_1^{(\varepsilon)}}{dx}$$

und wir kommen auf denselben Widerspruch wie oben.

Es ist also immer $G_2^{(\varepsilon)} < G_1^{(\varepsilon)}$, wenn s und t im Inneren des Intervalles liegen.

---

*) t nehmen wir im folgenden zunächst als fest und im Inneren des Intervalles gelegen an.

Ferner ist für $x = |\lg \varepsilon|$

$$\frac{d\,G_2^{(\varepsilon)}}{dx} > \frac{d\,G_1^{(\varepsilon)}}{dx},$$

also:

$$\left(\frac{d}{ds}\,G_2^{(\varepsilon)}(st)\right)_{s=\varepsilon} < \left(\frac{d}{ds}\,G_1^{(\varepsilon)}(st)\right)_{s=\varepsilon};$$

damit ist (67) und (68) bewiesen.

Überdies sind $G_2^{(\varepsilon_1)} - G_2^{(\varepsilon_2)}$ und $G_1^{(\varepsilon_1)} - G_1^{(\varepsilon_2)}$ stetige Funktionen mit stetigen Ableitungen und verschwinden für $x = 0$; für $x = |\lg \varepsilon_2|$ ist

$$G_2^{(\varepsilon_2)} = 0, \quad G_1^{(\varepsilon_2)} = 0,$$

ferner nach (67)

$$G_2^{(\varepsilon_1)} < G_1^{(\varepsilon_1)},$$

also ist für $x = |\lg \varepsilon_2|$

$$G_2^{(\varepsilon_1)} - G_2^{(\varepsilon_2)} < G_1^{(\varepsilon_1)} - G_1^{(\varepsilon_2)}$$

und da $G_2^{(\varepsilon_1)} - G_2^{(\varepsilon_2)}$ in höchstens zwei Punkten gleich $G_1^{(\varepsilon_1)} - G_1^{(\varepsilon_2)}$ werden kann, wie aus dem früheren hervorgeht, so folgt, daß durchaus zwischen $x = 0$ und $x = |\lg \varepsilon_2|$

$$G_2^{(\varepsilon_1)} - G_2^{(\varepsilon_2)} < G_1^{(\varepsilon_1)} - G_1^{(\varepsilon_2)},$$

das ist aber die zu beweisende Gleichung (69).

§ 3.

Die Aufstellung der Integralgleichung und der dazu gehörigen quadratischen Form. Die sich daran anschließende Darstellung willkürlicher Funktionen.

Die Eigenfunktionen von (61a) für das Intervall $(\varepsilon, 1)$ genügen der Integralgleichung

$$0 = \psi_\varepsilon(s) - \lambda \int_\varepsilon^1 G_2^{(\varepsilon)}(st)\, h(t)\, \psi_\varepsilon(t)\, \frac{dt}{t}. \tag{72}$$

Wir setzen dann:

$$\varphi_\varepsilon(s) = \frac{\sqrt{h(s)}}{\sqrt{s}}\, \psi_\varepsilon(s), \quad \text{wenn } s \geqq \varepsilon, \tag{73}$$

$$\varphi_\varepsilon(s) = 0, \quad \text{wenn } s \leqq \varepsilon;$$

$$K_2^{(\varepsilon)}(st) = \frac{G_2^{(\varepsilon)}(st)\sqrt{h(t)}\sqrt{h(s)}}{\sqrt{s}\sqrt{t}}, \quad \text{wenn } s \geqq \varepsilon,\ t \geqq \varepsilon, \tag{74}$$

$$K_2^{(\varepsilon)}(st) = 0, \quad \text{wenn } s \leqq \varepsilon \text{ oder } t \leqq \varepsilon$$

ist, so daß also:

$$0 = \varphi_\varepsilon(s) - \lambda \int_0^1 K_2^{(\varepsilon)}(st)\, \varphi_\varepsilon(t)\, dt. \tag{75}$$

Wir bilden jetzt die quadratische Form:

(76) $$K_2^{(\varepsilon)}(xy) = \sum_{p,q} k_{pq}^{\varepsilon,2} x_p y_q,$$

wobei

$$k_{pq}^{\varepsilon,2} = \int_0^1\int_0^1 2K_2^{(\varepsilon)}(st)\sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\,ds\,dt$$

ist.

Da nun aus der obigen Untersuchung über die Verteilung der Eigenwerte folgt, daß der kleinste Eigenwert oberhalb einer von 0 verschiedenen, von ε unabhängigen Größe bleibt, so schließen wir genau wie in Kap. I, § 3, daß $K_2^{(\varepsilon)}(xy)$ mit nach 0 abnehmendem ε gegen eine beschränkte quadratische Form $K_2(xy)$ konvergiert, wenn man für jedes endliche n und vorgegebene δ

$$\left|k_{pq}^{(2)} - k_{pq}^{\varepsilon,2}\right| < \frac{\delta}{n^2}$$

machen kann, wenn $p \leqq n$, $q \leqq n$ ist.

Nun ist

$$\left|k_{pq}^{(2)} - k_{pq}^{\varepsilon,2}\right| = \left|\int_0^1\int_0^1 2\frac{(G_2(st) - G_2^{(\varepsilon)}(st))}{\sqrt{s}\sqrt{t}}\sqrt{h(s)}\sqrt{h(t)}\sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\,ds\,dt\right|$$

$$\leqq \operatorname{Max}|h(s)|\int_0^1\int_0^1 2\frac{|G_2(st) - G_2^{(\varepsilon)}(st)|}{\sqrt{s}\sqrt{t}}\,ds\,dt$$

$$\leqq \operatorname{Max}|h(s)|\int_0^1\int_0^1 2\frac{|G_1(st) - G_1^{(\varepsilon)}(st)|}{\sqrt{s}\sqrt{t}}\,ds\,dt,$$

und da $\operatorname{Max}|h(s)|$ eine endliche Zahl ist, so folgt aus (9) unmittelbar die Behauptung, also

(77) $$\lim_{\varepsilon=0} K_2^{(\varepsilon)}(xy) = K_2(xy).$$

Es ist jetzt wieder $K_2(xy)$ in der in VIII gegebenen Normalform darzustellen.

Die ersten m Eigenwerte $\lambda_p^{(\varepsilon)}$, welche kleiner sind als g_0, konvergieren mit abnehmendem ε gegen die λ_p, wie man sich leicht überzeugt; ebenso konvergieren die dazugehörigen normierten Eigenfunktionen $\overline{\varphi}_p^{(\varepsilon)}(s)$ und Eigenformen $\overline{L}_p^{(\varepsilon)}(x)$ gegen $\overline{\varphi}_p(s)$ und $\overline{L}_p(x)$, und zwar ist auch $\overline{L}_p(x)$ eine beschränkte Linearform, da ja alle $\lambda_p < g_0$ angenommen wurden.

Es sei aber jetzt $\sqrt{\lambda - g_0} = r\pi$ wieder reell, und $u_\varepsilon^{(r)}(s)$ sei eine Eigenfunktion von (61a), die zum Bereiche $(\varepsilon, 1)$ gehört. $u_\varepsilon^{(r)}(s)$ entspricht als normierte Eigenfunktion von (75):

$$\overline{\varphi}_\varepsilon^{(r)}(s) = \frac{u_\varepsilon^{(r)}(s)\sqrt{h(s)}}{\sqrt{s}\sqrt{\int\limits_\varepsilon^1 \frac{h(s)}{s}(u_\varepsilon^{(r)}(s))^2 ds}} \quad \text{für } s > \varepsilon$$

$$\overline{\varphi}_\varepsilon^{(r)}(s) = 0 \quad \text{für } s < \varepsilon.$$

Nun ist

$$h(s) = 1 + s h_1(s)$$

und man erhält aus (64)

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{h(s)}{s}(u_\varepsilon^{(r)}(s))^2 ds = \int\limits_\varepsilon^1 (U_1^{(r)}(1))^2 \cos^2(r\,|\lg s|\,\pi)\frac{ds}{s}$$
$$+ \int\limits_\varepsilon^1 (U_0^{(r)}(1))^2 \sin^2(r\,|\lg s|\,\pi)\frac{ds}{s}$$
$$- 2\,U_0^{(r)}(1)\,U_1^{(r)}(1)\int\limits_\varepsilon^1 \sin(r\,|\lg s|\,\pi)\cos(r\,|\lg s|\,\pi)\frac{ds}{s}$$
$$+ \int\limits_\varepsilon^1 q(s)\,ds,$$

wobei $q(s)$ eine Funktion bedeutet, die für alle $r < N$ und alle ε, also auch für $\varepsilon = 0$ unterhalb einer festen Grenze liegt. Bezeichnen wir jetzt vorübergehend mit M und M' Größen, die ebenfalls für alle ε und für $r < N$ unter einer festen Grenze liegen, so folgt

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{h(s)}{s}(u_\varepsilon^{(r)}(s))^2 ds = \frac{1}{2}\left[(U_1^{(r)}(1))^2 + (U_0^{(r)}(1))^2\right]|\lg\varepsilon| + M,$$

also

$$(78) \qquad \overline{\varphi}_\varepsilon^{(r)}(s) = \frac{u_\varepsilon^{(r)}(s)\sqrt{h(s)}}{\sqrt{s}\sqrt{\frac{1}{2}|\lg\varepsilon|\left((U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2\right)}\sqrt{1 + \frac{M'}{|\lg(\varepsilon)|}}}.$$

Für die zu $\overline{\varphi}_\varepsilon^{(r)}(s)$ gehörige Linearform

$$\overline{L}_r^{(\varepsilon)}(x) = \sum_p \overline{l}_{p,r}^{(\varepsilon)} x_p$$

ist analog zu Kap. I, § 3

$$\overline{l}_{p,r}^{(\varepsilon)} = \int\limits_0^1 \sqrt{2}\,\overline{\varphi}_\varepsilon^{(r)}(s)\sin(p\pi s)\,ds$$
$$= \frac{l_{p,r}^{(\varepsilon)}}{\sqrt{\frac{1}{2}|\lg\varepsilon|\left((U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2\right)}\sqrt{1 + \frac{M'}{|\lg\varepsilon|}}}$$

und

$$L_r^{(s)}(x) = \sum_p l_{p,r}^{(s)} x_p.$$

Es ist also

(79)
$$K_s(xx) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\overline{L}_i^{(s)}(x))^2}{\lambda_i^{(s)}}$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2\left(L_{r_i}^{(s)}(x)\right)^2}{\left(\left(U_0^{(r_i)}(1)\right)^2 + \left(U_1^{(r_i)}(1)\right)^2\right) |\lg \varepsilon| \left(g_0 + \left(\frac{i(1+\varepsilon M^{(i)})}{|\lg \varepsilon|}\right)^2 \pi^2\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{M'}{|\lg \varepsilon|}}},$$

wobei in der zweiten Summe für λ_i, entsprechend den Ausführungen auf S. 37,

$$g_0 + \left(\frac{i(1+\varepsilon M^{(i)})}{|\lg \varepsilon|}\right)^2 \pi^2$$

gesetzt wurde und nach früherem $|M^{(i)}| < M_1$ ist, wenn $r_i < N$.

Führen wir nun hier den Grenzübergang, unter Berücksichtigung des am Anfang dieses Paragraphen abgeleiteten Hilfssatzes, analog durch wie bei der Ableitung*) von (39), so finden wir, wenn $\sum_i |x_i|$ konvergiert,

(80)
$$K(xx) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\overline{L}_i(x))^2}{\lambda_i} + 2\int_0^{\infty} \frac{(L_r(x))^2}{\left((U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2\right)(g_0 + r^2\pi^2)}\, dr.$$

Man kann nun für die $k_{pq}^{(2)}$ dieselben Eigenschaften ableiten wie für die $k_{pq}^{(1)}$; indem man die Schlüsse des Kapitel I wiederholt, findet man

(81)
$$\mathsf{K}_2(\lambda; xx) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\overline{L}_i(x))^2}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}} + 2\int_0^{\infty} \frac{(L_r(x))^2}{\left((U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2\right)\left(1 - \frac{\lambda}{g_0 + r^2\pi^2}\right)}\, dr$$
$$+ E_2(xx).$$

Wir setzen $\lambda = 0$ und erhalten (xx) und daraus

(82)
$$(xy) = \sum_{i=1}^{m} \overline{L}_i(x)\, \overline{L}_i(y) + 2\int_0^{\infty} \frac{L_r(x)\, L_r(y)\, dr}{(U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2} + E(xy).$$

Wählen wir wieder**)

$$x_p = \sqrt{2}\int_0^1 \gamma(t) \sin(p\pi t)\, dt; \quad y_q = \sqrt{2}\int_0^1 K_2(st) \sin(q\pi t)\, dt = k_q^{(2)}(s),$$

---

*) Vgl. speziell Anm. 1 S. 16.

**) $K_2(st)$ ist hier wieder zum Unterschiede von $K(st)$ im Kap. I geschrieben und ist nicht zu verwechseln mit dem dort definierten $K^{(2)}(st)$.

so wird $E(xy) \equiv 0$ und man erhält, wenn $\gamma(t)$ in 0 und 1 verschwindet und eine erste Ableitung besitzt, die den Dirichletschen Bedingungen genügt:

$$f_1(s) = \int_0^1 K_2(st)\gamma(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 f_1(t)\overline{\varphi}_i(t)\,dt\,\overline{\varphi}_i(s)$$

$$+ 2\int_0^\infty dr \frac{u^{(r)}(s)\sqrt{h(s)}}{\sqrt{s}} \int_0^1 \frac{f_1(t)\,u^{(r)}(t)\sqrt{h(t)}\,dt}{\sqrt{t}\left((U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2\right)}.$$

Setzt man dann:

$$f(s) = \frac{\sqrt{s}\,f_1(s)}{\sqrt{h(s)}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{h(s)}} \cdot \int_0^1 K_2(st)\gamma(t)\,dt,$$

so erhält man:

$$(83) \qquad f(s) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\psi}_i(s) \int_0^1 f(t)\overline{\psi}_i(t)h(t)\frac{dt}{t}$$

$$+ 2\int_0^\infty dr\, u^{(r)}(s) \int_0^1 \frac{f(t)\,u^{(r)}(t)\,h(t)}{\left((U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2\right)} \frac{dt}{t}.$$

Dabei sind $\overline{\psi}_i(t)$ für $i = 1$ bis $i = m$ die m normierten Eigenfunktionen von (61a), welche in $t = 0$ und $t = 1$ verschwinden und für die

$$\int_0^1 (\overline{\psi}_i(t))^2 h(t)\frac{dt}{t} = 1, \qquad \int_0^1 h(t)\overline{\psi}_i(t)\overline{\psi}_k(t)\frac{dt}{t} = 0$$

ist.

$u^{(r)}(t)$ ist in (64) definiert. Nun ist wieder wie in Kapitel I, § 6, wenn $f(t)$ für $t = 0$ und $t = 1$ verschwindet:

$$f(s) = \int_0^1 G_2(st)\frac{\sqrt{h(t)}}{\sqrt{t}}\gamma(t)\,dt,$$

also

$$-\frac{\sqrt{h(t)}}{\sqrt{t}}\gamma(t) = \frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}f(t) - \frac{g(t)f(t)}{t}$$

und $\gamma(t)$ muß die oben angegebenen Eigenschaften besitzen.

Der Beweis für die Existenz einer Lösung der inhomogenen Integralgleichung:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda\int_0^1 K(st)\varphi(t)\,dt$$

ergibt sich ebenso wie in Kapitel I, § 7, wenn λ kleiner ist als der kleinste Eigenwert λ_1.

Kapitel III.

Der Wirtingersche Fall.

§ 1.

Die Verteilung der Eigenwerte. Untersuchungen über die Eigenfunktionen.

Das Resultat des letzten Kapitels war wesentlich von der Annahme abhängig, daß $h(s)$ sich in der Umgebung von $s=0$ regulär verhält und einen von 0 verschiedenen Wert besitzt. Ganz anders aber ist die Verteilung des Spektrums, wenn $h(0)=0$ ist oder wenn $h(s)$ sich in der Umgebung von $s=0$ nicht regulär verhält, also sich z. B. verhält wie $(\sin(\lg s))^2+1$.

Nehmen wir zunächst an, $h(s)$ verschwinde für $s=0$ derart, daß

$$\int_0^1 \frac{|h(s)|}{s}\, ds$$

einen endlichen Wert besitzt. Dann ist

$$\int_0^1\int_0^1 (K_2(st))^2 ds\, dt = \int_0^1\int_0^1 \frac{(G_2(st))^2 h(s) h(t)}{s\cdot t}\, ds\, dt$$

und dieses Integral hat nach (9) und (70) unter der obigen Voraussetzung einen endlichen Wert.

Dann folgt aber aus VI und VII, daß $K_2(xy)$ vollstetig ist und daß zu $K_2(xy)$ nur ein Punktspektrum gehört, das sich nur gegen das Unendliche häuft.

Ganz anders liegt aber wieder die Sache in dem von Herrn Wirtinger*) angeregten Falle, den wir jetzt durchführen wollen, jedoch wieder nur unter der Annahme *eines singulären* Punktes, der alles Wesentliche liefert, damit wir uns auf Kap. I stützen können. Wir gehen von der Gleichung aus:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \lambda h(z) y = 0. \tag{84}$$

Dabei sei $h(z)$ eine gerade periodische Funktion mit der Periode $2l$. (Die Annahme, daß $h(z)$ gerade ist, welche wir im Anschluß an Wirtinger treffen, ist für die ganze Entwickelung unwesentlich, jedoch treten dabei die Eigentümlichkeiten des allgemeinen Falles in besonders übersichtlicher Form zu Tage.)

*) Mathematische Annalen 48, S. 387.

$y_1(z, \lambda)$ und $y_2(z, \lambda)$ seien ein solches Fundamentalsystem, daß

$$(85)\quad y_1(0, \lambda) = 0, \quad \left(\frac{d y_1(z, \lambda)}{dz}\right)_{z=0} = 1, \quad y_1(+z) = -y_1(-z),$$
$$y_1'(z) = y_1'(-z);$$

$$(86)\quad y_2(0, \lambda) = 1, \quad \left(\frac{d y_2(z, \lambda)}{dz}\right)_{z=0} = 0, \quad y_2(+z) = y_2(-z),$$
$$y_2'(z) = -y_2'(-z);$$

$$(87)\quad y_1 y_2' - y_2 y_1' = -1$$

ist. Es gibt aber bekanntlich im allgemeinen ein anderes Fundamentalsystem Y_1, Y_2, für welches

$$(88)\quad Y_1(z + 2l) = \varrho_1 Y_1(z); \quad Y_2(z + 2l) = \varrho_2 Y_2(z).$$

Um dieses System zu erhalten, setzen wir:

$$Y = \alpha y_1 + \beta y_2;$$

dann hat man zur Bestimmung von ϱ, α, β unter Berücksichtigung von (85) und (86) die Gleichungen

$$(89)\quad \begin{aligned} \alpha y_1(l, \lambda) + \beta y_2(l, \lambda) &= \varrho(-\alpha y_1(l, \lambda) + \beta y_2(l, \lambda)), \\ \alpha y_1'(l, \lambda) + \beta y_2'(l, \lambda) &= \varrho(\alpha y_1'(l, \lambda) - \beta y_2'(l, \lambda)). \end{aligned}$$

Soll diese Gleichung für α und β möglich sein, so muß ϱ der Gleichung genügen:

$$y_1(l, \lambda)(1 + \varrho)^2 y_2'(l, \lambda) - y_2(l, \lambda)(1 - \varrho)^2 y_1'(l, \lambda) = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (87) findet man

$$\varrho^2 - 2\varrho[y_1(l, \lambda) y_2'(l, \lambda) + y_1'(l, \lambda) y_2(l, \lambda)] + 1 = 0.$$

$$(90)\quad \varrho = y_1(l,\lambda) y_2'(l,\lambda) + y_1'(l,\lambda) y_2(l,\lambda) \pm 2\sqrt{y_1(l, \lambda) y_2(l, \lambda) y_1'(l, \lambda) y_2'(l, \lambda)}.$$

Jeder dieser beiden Werte ϱ liefert ein Wertepaar α, β und damit je eine Fundamentallösung, vorausgesetzt, daß die beiden Werte ϱ_1 und ϱ_2 nicht zusammenfallen.

Dies kann jedoch nach (90) nur für solche Werte λ eintreten, die im Endlichen isoliert liegen und sich nur im Unendlichen häufen; für diese λ bedarf es einer besonderen Untersuchung, die später durchgeführt wird.

Wir gehen jetzt darauf aus, diejenigen Eigenwerte von (84) zu bestimmen, zu denen Eigenfunktionen gehören, die in $-l$ und $2kl - l$ verschwinden. Eine solche noch nicht normierte Eigenfunktion $y_k(z, \lambda)$ läßt sich dann im allgemeinen darstellen in der Form:

$$(91)\quad y_k(z, \lambda) = a\, Y_1(z, \lambda) + b\, Y_2(z, \lambda),$$

wobei dann

(91a) $$y_k(-l, \lambda) = a\, Y_1(-l, \lambda) + b\, Y_2(-l, \lambda) = 0$$

(91b) $$y_k(2kl - l, \lambda) = a\varrho_1^k\, Y_1(-l, \lambda) + b\varrho_2^k\, Y_2(-l, \lambda) = 0$$

sein muß.

Wenn also weder $Y_1(-l, \lambda)$ noch $Y_2(-l, \lambda)$ verschwindet, so muß

$$\varrho_1^k = \varrho_2^k$$

sein und da

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = 1$$

ist, so folgt

$$\varrho_1^{2k} = \varrho_2^{2k} = 1,$$

d. h. ϱ muß eine $2k$te Einheitswurzel sein und dies kann nur dann eintreten, wenn

(92) $$y_1(l, \lambda)\, y_2(l, \lambda)\, y_1'(l, \lambda)\, y_2'(y, \lambda) \leqq 0.$$

Es sei aber

$$Y_1(-l, \lambda) = 0, \quad \text{also} \quad \alpha y_1(-l, \lambda) + \beta y_2(-l, \lambda) = 0,$$

dann ist nach der Definition von $Y_1(-l, \lambda)$ auch

$$Y_1(+l, \lambda) = 0, \quad \text{also} \quad -\alpha y_1(-l, \lambda) + \beta y_2(-l, \lambda) = 0,$$

und diese Gleichungen sind nur dann möglich, wenn entweder

$$y_2(-l, \lambda) = 0 \text{ und } \alpha = 0, \quad \text{oder} \quad y_1(-l, \lambda) = 0 \text{ und } \beta = 0$$

ist.

Bei jeder dieser beiden Annahmen ist aber $\varrho_1 = \varrho_2$ und wir haben einen der vorher ausgeschlossenen Fälle.

Jedenfalls ist durch (92) der Wirtingersche Satz bewiesen, der aussagt, daß mit wachsendem k die Eigenwerte λ sich nur in solchen Bereichen der λ-Achse häufen können, in denen (92) erfüllt ist; der hier gegebene Beweis unterscheidet sich nur durch unwesentliche Modifikationen von dem von Herrn Wirtinger l. c. gegebenen.

Der Unterschied der zu zwei benachbarten Eigenwerten $\lambda_m^{(k)}$ und $\lambda_{m+1}^{(k)}$ gehörigen Werte $\varrho_m^{(k)}$ und $\varrho_{m+1}^{(k)}$ soll jetzt berechnet werden. Es sei

$$\varrho_m^{(k)} = e^{i\chi_m}, \qquad \varrho_{m+1}^{(k)} = e^{i\chi_{m+1}},^{*)}$$

dann ist:

$$|\chi_{m+1} - \chi_m| = \frac{2\pi}{2k} \quad \text{oder} \quad |\chi_{m+1} - \chi_m| = 0,$$

der letztere Fall kann jedoch wieder nur für solche λ eintreten, die isoliert liegen und sich nur im Unendlichen häufen können.

Nun ist:

$$\cos(\chi_m) = y_1(l, \lambda_m^{(k)})\, y_2'(l, \lambda_m^{(k)}) + y_1'(l, \lambda_m^{(k)})\, y_2(l, \lambda_m^{(k)}).$$

---

*) i ist hier $\sqrt{-1}$.

Also erhält man zwischen $\lambda_m^{(k)}$ und $\lambda_{m+1}^{(k)}$ die Beziehung:

$$\begin{aligned}&\arccos[y_1(l,\lambda_m^{(k)})y_2'(l,\lambda_m^{(k)})+y_1'(l,\lambda_m^{(k)})y_2(l,\lambda_m^{(k)})]\\ (93)\quad &-\arccos[y_1(l,\lambda_{m+1}^{(k)})y_2'(l,\lambda_{m+1}^{(k)})+y_1'(l,\lambda_{m+1}^{(k)})y_2(l,\lambda_{m+1}^{(k)})]=\frac{2\pi}{2k}\\ &\qquad\qquad\text{oder } =0.\end{aligned}$$

Da die linke Seite von (93) nur analytische Funktionen der λ enthält, so sieht man, daß die Eigenwerte λ in denjenigen Bereichen, in denen die ϱ Einheitswurzeln sind, sich mit wachsendem k beliebig stark häufen.

Um nun diese vorläufigen Untersuchungen zum Abschluß zu bringen, müssen wir sehen, ob und welche Eigenfunktionen in den oben erwähnten Ausnahmefällen auftreten können. Diese traten dann ein, wenn $\varrho_1=\varrho_2$ war, also wenn $y_1(l,\lambda)=0$ oder $y_2(l,\lambda)=0$ oder $y_1'(l,\lambda)=0$ oder $y_2'(l,\lambda)=0$ war.

Im ersten Falle ist einerseits $y_1(z,\lambda)$ selbst eine Eigenfunktion, die in $-l$ und $2kl-l$ verschwindet, anderseits $\varrho=+1$; im 2. Falle ist $y_2(z,\lambda)$ eine Eigenfunktion, $\varrho=-1$. Ganz anders aber ist die Sachlage, wenn

$$y_1'(l,\lambda)=0 \quad\text{oder}\quad y_2'(l,\lambda)=0$$

ist, ohne daß gleichzeitig einer der beiden anderen Fälle eintritt. Wenn dann, was vorkommen kann, die in $-l$ verschwindende Lösung in diesem Falle auch in $(2k-1)l$ verschwindet, wobei k eine ganze Zahl größer als 1 sein mag, so verschwindet sie auch wieder für $(4k-1)l$ und hat die Periode $2kl$ oder $4kl$.

Denn es sei $y_1'(-l,\lambda)=0$ oder $y_2'(-l,\lambda)=0$. Die in $-l$ verschwindende Lösung bezeichnen wir mit $y(z,\lambda)$ und es sei $y'(-l,\lambda)=1$. Dann ist

$$y(z,\lambda)y_i'(z,\lambda)-y'(z,\lambda)y_i(z,\lambda)=-c,$$

wenn $i=1$ oder $=2$ und $y_i(-l,\lambda)=c$.

Also ist

$$y'((2k-1)l,\lambda)y_i((2k-1)l,\lambda)=+c$$

und

$$y'((2k-1)l,\lambda)=(-1)^{ik},\qquad (i=1 \text{ oder } =2)$$

Es ist daher

$$y(-l,\lambda)=y((2k-1)l,\lambda)=0;\quad y'(-l,\lambda)=(-1)^{ik}y'((2k-1)l,\lambda),$$

und $y(z,\lambda)$ hat, wie behauptet war, die Periode $2kl$ oder $4kl$.

§ 2.

Aufstellung der Integralgleichung und der dazu gehörigen quadratischen Form. Die Darstellung willkürlicher Funktionen.

Nach dieser allgemeinen Orientierung nehmen wir die Methode des Kap. I auf; wir formen die Differentialgleichung um und gehen dann zur Integralgleichung und der dazu gehörigen quadratischen Form über. Wir setzen also:

$$e^{-(s+l)} = s, \quad s = (-l) + |\lg s|; \tag{94}$$

wobei s von 1 bis $e^{-2kl} = \varepsilon$ geht.

Die Differentialgleichung wird dann:

$$\frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} + \lambda \frac{h(-l + |\lg s|)}{s} u = 0. \tag{95}$$

Wir schreiben dann abkürzend $h_1(s)$ statt $h(-l + |\lg s|)$; $h_1(s)$ ist wieder stets positiv und hat für $0 \leqq s \leqq 1$ eine endliche obere Grenze. Ferner ist $h_1(s \cdot e^{-2l}) = h_1(s)$.

Wir bestimmen jetzt eine Zahl α so, daß

$$\alpha h_1(s) > 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq 1$$

und schreiben statt (95)

$$\frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} + \left(\frac{-\alpha h_1(s) + (\lambda + \alpha) h_1(s)}{s}\right) u = 0. \tag{96}$$

Dann ist jeder Eigenwert $\lambda + \alpha$ von (96) größer als α, wie klein auch ε sein mag. Wir bilden jetzt für

$$\frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} - \frac{\alpha h_1(s) u}{s} = 0 \tag{97}$$

die Greensche Funktion, die in ε und 1 verschwinden soll. Dieselbe sei $G_3^{(\varepsilon)}(st)$ und es ist nach (67), (68) und (69)

$$G_3^{(\varepsilon)}(st) \leqq G_1^{(\varepsilon)}(st), \quad \left(\frac{d}{ds} G_3^{(\varepsilon)}(st)\right)_{s=\varepsilon} \leqq \left(\frac{d}{ds} G_1^{(\varepsilon)}(st)\right)_{s=\varepsilon};$$

$$|G_3^{(\varepsilon_1)}(st) - G_3^{(\varepsilon_2)}(st)| \leqq |G_1^{(\varepsilon_1)}(st) - G_1^{(\varepsilon_2)}(st)|;$$

also existiert:

$$\lim_{\varepsilon=0} G_3^{(\varepsilon)}(st) = G_3(st)$$

und es ist

$$|G_3(st) - G_3^{(\varepsilon)}(st)| \leqq |G_1(st) - G_1^{(\varepsilon)}(st)|.$$

Die zum Intervalle ε bis 1 gehörigen Eigenfunktionen von (96) bezeichnen wir mit $\psi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = y_k(s, \lambda)$, dann ist

$$\psi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) - (\lambda + \alpha)\int\limits_\varepsilon^1 G_3^{(\varepsilon)}(st)\frac{h_1(t)}{t}\psi_\lambda^{(\varepsilon)}(t)\,dt = 0 \tag{98}$$

und wir setzen

$$K_3^{(\varepsilon)}(st) = \frac{G_3^{(\varepsilon)}(st)\sqrt{h_1(t)}\sqrt{h_1(s)}}{\sqrt{s}\sqrt{t}} \quad \text{für} \quad s \geqq \varepsilon,\ t \geqq \varepsilon;$$

$$K_3^{(\varepsilon)}(st) = 0 \quad \text{für} \quad s \leqq \varepsilon \quad \text{oder} \quad t \leqq \varepsilon,$$

$$\psi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)\frac{\sqrt{h_1(s)}}{\sqrt{s}} = \varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) \quad \text{für} \quad s \geqq \varepsilon; \quad \varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = 0 \quad \text{für} \quad s \leqq \varepsilon, \tag{99}$$

so daß man erhält

$$\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) - (\lambda + \alpha)\int\limits_0^1 K_3^{(\varepsilon)}(st)\,\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(t)\,dt = 0. \tag{100}$$

Die normierten Eigenfunktionen $\bar{\varphi}_\lambda^{(\varepsilon)}(s)$ sind dann

$$\bar{\varphi}_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = \frac{\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)}{\sqrt{\int\limits_0^1 \varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)^2\,ds}} = \frac{\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)}{\sqrt{\int\limits_\varepsilon^1 y_k^2(z,\lambda)\frac{h_1(s)}{s}\,ds}}.$$

Dabei denken wir uns in (91) die Konstanten a und b so bestimmt, daß

$$ab = 1.$$

Wir haben daher:

$$\int\limits_\varepsilon^1 y_k^2(z,\lambda)\frac{h_1(s)}{s}\,ds = \int\limits_{-l}^{(2k-1)l} y_k^2(z,\lambda)\,h(z)\,dz = a^2\int\limits_{-l}^{(2k-1)l} Y_1^2(z,\lambda)\,h(z)\,dz$$

$$+ 2ab\int\limits_{-l}^{(2k-1)l} Y_1(z,\lambda)\,Y_2(z,\lambda)\,h(z)\,dz + b^2\int\limits_{-l}^{(2k-1)l} Y_2^2(z,\lambda)\,h(z)\,dz$$

$$= a^2\frac{1-\varrho_1^{2k}}{1-\varrho_1^2}\int\limits_{-l}^{+l} Y_1^2(z,\lambda)\,h(z)\,dz + 2kab\int\limits_{-l}^{+l} Y_1(z,\lambda)\,Y_2(z,\lambda)\,h(z)\,dz$$

$$+ b^2\frac{1-\varrho_2^{2k}}{1-\varrho_2^2}\int\limits_{-l}^{+l} Y_2^2(z,\lambda)\,h(z)\,dz = 2kab\int\limits_{-l}^{+l} Y_1(z,\lambda)\,Y_2(z,\lambda)\,h(z)\,dz,$$

wenn wir noch voraussetzen, daß $\varrho^2 \neq 1$, da $\varrho_1^{2k} = 1$, $\varrho_2^{2k} = 1$, $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = 1$ ist.

Nun ist aber $\varrho^2 = 1$ nur in den oben besprochenen Ausnahmefällen; man hat also, wenn wir von diesen absehen:

$$\bar{\varphi}_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = \frac{\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)}{\sqrt{+2k\int\limits_{-l}^{+l} Y_1(z,\lambda)\,Y_2(z,\lambda)\,h(z)\,dz}}. \tag{101}$$

In den ersten beiden Ausnahmefällen erhält man nun als normierte Eigenfunktionen:

$$\overline{\varphi}_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = \frac{\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)}{\sqrt{\int\limits_{-l}^{(2k-1)l}(y_i(z,\lambda))^2 h(z)\,dz}} \quad (i = 1 \text{ oder } 2),$$

also:

$$\overline{\varphi}_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = \frac{\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)}{\sqrt{k\int\limits_{-l}^{+l} y_i^2(z,\lambda)\,h(z)\,dz}}.$$

Im 3. und 4. Falle ist die Sachlage eine andere, da nur für spezielle k Eigenfunktionen hier existieren; jedoch wird, wenn es Eigenfunktionen gibt, der normierende Faktor mit k unendlich groß wie $\sqrt{k}$.*)

Wir bilden jetzt die quadratische Form:

(102) $$K_3^{(\varepsilon)}(xy) = \sum k_{pq}^{(\varepsilon)} x_p y_q,$$

wobei

$$k_p^{\varepsilon,3}(s) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 K_3^{(\varepsilon)}(st)\sin(p\pi t)\,dt$$

und

(103) $$k_{pq}^{\varepsilon,3} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 2K_3^{(\varepsilon)}(st)\sin(p\pi t)\sin(q\pi s)\,ds\,dt$$

ist und wir kürzer $k_{pq}^{(\varepsilon)}$ statt $k_{pq}^{\varepsilon,3}$ schreiben. Es folgt dann wie in Kap. I § 3 und Kap. II § 3:

(104) $$\lim_{\varepsilon=0} K_3^{(\varepsilon)}(xy) = K_3(xy) \quad \text{für } (xx) \leq 1,\ (yy) \leq 1.$$

Es sei nun

$$L_{\lambda_i}^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi_{\lambda_i}^{(\varepsilon)}(s)\,\sin(p\pi s)\,ds\cdot x_p$$

Dann wird

$$K_\varepsilon(xx) = \sum_i{}' \frac{(L_{\lambda_i}^{(\varepsilon)}(x))^2}{2k\int\limits_{-l}^{+l} Y_1(z,\lambda_i)\,Y_2(z,\lambda_i)\,h(z)\,dz\,(\lambda_i + \alpha)}.$$

Dabei bedeutet der Strich am Summenzeichen, daß es Werte von i gibt, für die der dazugehörige Summand eine andere Form hat; das tritt aber nur für die Ausnahmefälle ein.

Wir teilen die Summe wieder in zwei Teile von $i = 1$ bis $i = N_\varepsilon$, wobei N_ε so groß gewählt sein mag, daß $\lambda_{N_\varepsilon} \geq \frac{1}{\delta}$ für alle ε ist, daß also

*) Dies folgt unmittelbar aus dem letzten Satz des vorhergehenden Paragraphen, wenn wir jetzt für k ein beliebig großes Vielfaches des dortigen k nehmen.

wie in Kap. I, § 3 $|R_{N_\epsilon}| < \delta$ wird, sobald λ_{N_ϵ} der $\frac{1}{\delta}$ am nächsten gelegene größere Eigenwert von $K^{(\epsilon)}(st)$ ist. Dann gibt es nur eine endliche Zahl kritischer Punkte $\lambda < \frac{1}{\delta}$, für welche Ausnahmefälle eintreten können, und wir können diese nach obigem durch so kleine Segmente ausschließen, daß der Beitrag aller Summanden, die zu in diese Segmente fallenden λ gehören, für alle ε beliebig klein gemacht werden kann.

Nun war nach (93) der Unterschied von 2 aufeinanderfolgenden χ_m und χ_{m+1} $\frac{2\pi}{2k}$, abgesehen von den Fällen, in denen $\chi_{m+1} - \chi_m = 0$ ist, was nur für eine isolierte Menge von Werten λ eintreten kann, die sich nur im Unendlichen häufen und also auf das Folgende von keinem Einfluß sind. Wir wählen dann $|\chi|$ als Integrationsveränderliche und setzen wieder voraus, daß $\sum |x_i|$ konvergiert.

Dann findet man, da gemäß (93) nach dem Grenzübergang

$$|d\chi| = \left|\frac{d}{d\lambda}[\arccos(y_1(l,\lambda)y_2'(l,\lambda) + y_1'(l,\lambda)y_2(l,\lambda))]\right| d\lambda$$

ist, durch einen ähnlichen Grenzübergang wie in den früheren Kapiteln

(105) $K(xx) =$

$$\sum_\lambda \int \frac{(L_\lambda(x))^2}{2\pi \int_{-l}^{+l} Y_1(z,\lambda)\, Y_2(z,\lambda)\, h(z)\, dz\, (\lambda + \alpha)} \left|\frac{d}{d\lambda}[\arccos \Delta(l,\lambda)]\right| d\lambda,$$

wo

$$\Delta(l,\lambda) = y_1(l,\lambda)\, y_2'(l,\lambda) + y_1'(l,\lambda)\, y_2(l,\lambda)$$

gesetzt ist und jedes Integral über ein kontinuierliches Spektrum und die Summe über die Gesamtheit der kontinuierlichen Spektren zu nehmen ist.

Man sieht, wie nebenbei bemerkt werden soll, leicht ein, daß die von einem Spektrum freien Stücke mit wachsendem λ schließlich immer kleiner werden.

Wir haben jetzt nur noch die in Kap. I, § 5 u. 6 gemachten Schlüsse zu wiederholen, jedoch tritt bei der Abschätzung der Fourierkoeffizienten dadurch eine nicht unwesentliche Modifikation ein, daß $K_3(st)$ den Faktor $\sqrt{h_1(s)}\sqrt{h_1(t)}$ enthält, der zwischen $s = 0$ und $s = 1$ bzw. $t = 0$ und $t = 1$ unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Jedoch kann man zu jedem beliebigen reellen Exponenten γ eine endliche, reelle Zahl β so angeben, daß

$$s^\gamma \sqrt{h_1(s)} - \beta s^{\frac{\gamma}{2}}$$

nur eine endliche Zahl Maxima und Minima hat, so daß jetzt als Analogon zu (42)

$$|k_p^{\epsilon,3}(s)| < \left|\frac{A}{p^{\frac{3}{2}-\gamma}}\right|$$

wird, wobei γ beliebig klein gewählt werden kann; dadurch wird aber die ganze dortige Ableitung nicht gestört. Man findet also wie dort

$$\mathsf{K}(\lambda; xx) = \sum_\mu \int \frac{L_\mu(x)^2}{1 - \frac{\lambda}{\mu + \alpha}} \mathfrak{F}(\mu)\, d\mu + E(xx), \tag{106}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$\mathfrak{F}(\mu) = \frac{\left| \frac{d}{d\mu} [\arccos(y_1(l,\mu)\, y_2'(l,\mu) + y_1'(l,\mu)\, y_2(l,\mu))] \right|}{2\pi \int_{-l}^{+l} Y_1(z,\mu)\, Y_2(z,\mu)\, h(z)\, dz}. \tag{107}$$

Setzt man wieder $\lambda = 0$, so findet man

$$(xy) = \sum_\mu \int L_\mu(x)\, L_\mu(y)\, \mathfrak{F}(\mu)\, d\mu + E(xy). \tag{108}$$

Es sei nun

$$f_1(s) = \int_0^1 K_3(st)\, g(t)\, dt;$$

wir setzen

$$x_p = k_p^{(3)}(s), \quad y_q = \sqrt{2} \int_0^1 \sin(q\pi t)\, g(t)\, dt,$$

wobei $g(t)$ in 0 und 1 verschwinden und eine stetige 1. Ableitung besitzen soll, die den Dirichletschen Bedingungen genügt. Man erhält dann wieder, wenn $s \neq 0$,

$$f_1(s) = \sum_\lambda \int d\lambda\, \mathfrak{F}(\lambda)\, \varphi_\lambda(s) \int_0^1 \varphi_\lambda(t)\, f_1(t)\, dt,$$

und wenn wiederum

$$f(s) = \sqrt{s}\, \frac{f_1(s)}{\sqrt{h_1(s)}}$$

ist,

$$f(s) = \sum_\lambda \int d\lambda\, \mathfrak{F}(\lambda)\, \psi_\lambda(s) \int_0^1 \psi_\lambda(t)\, f(t)\, \frac{h_1(t)}{t}\, dt. \tag{109}$$

Dabei ist $\psi_\lambda(s) = y(x, \lambda)$ durch (91) festgelegt, $\mathfrak{F}(\lambda)$ durch (107) definiert. Nun ist, wie in Kap. I, § 6,

$$-\frac{\sqrt{h_1(t)}}{\sqrt{t}}(gt) = \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt}(ft) - \frac{\alpha h_1(t)\, f(t)}{t},$$

wenn $f(t)$ für $t = 0$ und $t = 1$ verschwindet und zweimal stetig differentiierbar ist; aus den obigen Bedingungen für $g(t)$ erhält man jetzt die Bedingungen, unter denen sich $f(s)$ in der Form (109) darstellen läßt.

Kapitel IV.

Die Integraldarstellungen der Potentialtheorie.

§ 1.

Die Verteilung der Eigenwerte.

In seinen Vorlesungen über Lamésche Funktionen im W. S. 1889/90 hat Herr Klein den Gedanken entwickelt, daß man die Mehrzahl der in der Potentialtheorie auftretenden Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen unter einheitlichem Gesichtspunkte ableiten kann, indem man die sämtlichen bei diesen Darstellungen in Betracht kommenden Orthogonalsysteme als Ausartungen des Systems konfokaler Zykliden betrachtet und unter Zugrundelegung des letzteren zunächst für einen von 6 konfokalen Zykliden begrenzten Körper geeignete Reihenentwicklungen aufstellt.*)

Dieser Gedanke wurde in einer von Herrn M. Bôcher gelösten Göttinger Preisarbeit**) näher dargestellt und ausgeführt, wenigstens was die Reihenentwicklungen anbetrifft; jedoch findet sich bei Bôcher weder ein Konvergenzbeweis, noch weniger die Angabe von hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine vorgegebene Funktion sich durch solche Reihenentwicklungen darstellen läßt.

Ein nicht vollständig durchgeführter Ansatz zum Konvergenzbeweise findet sich in der Doktordissertation von Herrn Jaccottet „Über die allgemeine Reihenentwicklung nach Laméschen Produkten", Göttingen 1895. Der Konvergenzbeweis ergibt sich, wie ich gezeigt habe***), unmittelbar aus der Theorie der Integralgleichungen, aber auch die Bedingungen für die Möglichkeit der Entwicklung einer Funktion nach solchen Reihen sind in der zitierten Arbeit angegeben.

Es handelt sich bei dieser Problemstellung im wesentlichen darum, die Eigenfunktionen der Differentialgleichung†)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \left[-\frac{5}{4}(\mu^3 - \nu^3) + A(\mu - \nu)\right] f = 0 \tag{110}$$

aufzustellen, wobei

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{d\mu}{2\sqrt{(\mu - e_1)(\mu - e_2)(\mu - e_3)(\mu - e_4)(e_5 - \mu)}}, \\ d\eta &= \frac{d\nu}{2\sqrt{(\nu - e_1)(\nu - e_2)(\nu - e_3)(e_4 - \nu)(e_5 - \nu)}} \end{aligned} \tag{111}$$

*) Vergl. F. Klein, Zur Theorie der Laméschen Funktionen. Göttinger Nachrichten 1890.

**) Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Leipzig 1894.

***) Mathematische Annalen 63.

†) l. c. S. 52 u. 53.

und e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 gegebene reelle Größen sind, für welche z. B.

$$e_1 < e_2 < e_3 < e_4 < e_5; \quad e_4 \leqq \mu \leqq e_5; \quad e_3 \leqq \nu \leqq e_4; \quad \sum_{i=1}^{5} e_i = 0;$$

A ist ein Parameter.

Als Eigenfunktionen nehmen wir solche Lösungen von (110), welche auf den Seiten des Rechteckes $\mu = \bar{\mu}_1$; $\mu = \bar{\mu}_2$; $\nu = \varepsilon_1$; $\nu = d$ verschwinden. Der Kernpunkt meiner eben zitierten Arbeit lag nun in dem Nachweis, daß sich alle solche Eigenfunktionen von (110) durch ein Produkt*) $E(\mu) \cdot E_1(\nu)$ darstellen lassen, wobei:

$$\text{(112a)} \qquad \frac{d^2 E(\mu)}{d\xi^2} + \left(-\frac{5}{4}\mu^3 + A\mu + B\right) E(\mu) = 0,$$

$$\text{(112b)} \qquad \frac{d^2 E_1(\nu)}{d\eta^2} - \left(-\frac{5}{4}\nu^3 + A\nu + B\right) E_1(\nu) = 0.$$

Herr Klein**) hatte gezeigt, daß man die Parameter A und B auf eine und nur eine Weise so bestimmen kann, daß $E(\mu)$ in $\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$ verschwindet und dazwischen m Nullstellen hat, und daß ferner $E_1(\nu)$ in ε_1 und d verschwindet und zwischen ε_1 und d n Nullstellen besitzt.

Dieses Theorem heißt *Kleinsches Oszillationstheorem*, und nach der obigen Bemerkung werden alle Eigenfunktionen von (110) durch das Kleinsche Oszillationstheorem geliefert. Dieses steht also im Mittelpunkte der Reihenentwicklungen der Potentialtheorie.

Wir fragen uns jetzt, was aus den Eigenwerten, Eigenfunktionen und den Reihenentwicklungen wird, wenn z. B. die beiden singulären Punkte e_2 und e_3 zusammenfallen und sich das Segment von ν an e_3 heranzieht. Wir setzen speziell fest, daß $e_2 = e_3 = 0$, $\sum e_i = 0$ sei, dann ist:

$$d\xi = \frac{d\mu}{2\mu\sqrt{(\mu - e_1)(\mu - e_4)(e_5 - \mu)}}, \qquad d\eta = \frac{d\nu}{2\nu\sqrt{(\nu - e_1)(e_4 - \nu)(e_5 - \nu)}}.$$

Statt (112a u. b) können wir nun auch schreiben, wenn

$$\mu^2(\mu - e_1)(\mu - e_4)(e_5 - \mu) = R(\mu), \qquad \nu^2(\nu - e_1)(e_4 - \nu)(e_5 - \nu) = R_1(\nu)$$

gesetzt wird,

$$\text{(113a)} \quad 4R(\mu)\frac{d^2 E(\mu)}{d\mu^2} + 2R'(\mu)\frac{dE(\mu)}{d\mu} + \left(-\frac{5}{4}\mu^3 + A\mu + B\right) E(\mu) = 0,$$

$$\text{(113b)} \quad 4R_1(\nu)\frac{d^2 E_1(\nu)}{d\nu^2} + 2R_1'(\nu)\frac{dE_1(\nu)}{d\nu} - \left(-\frac{5}{4}\nu^3 + A\nu + B\right) E_1(\nu) = 0.$$

Die zu einer Oszillationszahl m für das Intervall $\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2$ gehörigen Eigen-

---

*) Herr Hilbert hat diesen Satz neuerdings ohne Kontinuitätsbetrachtungen bewiesen. Jahresberichte 1907 S. 76.

**) Mathematische Annalen Bd. 18.

wertepaare A, B haben die Eigenschaft, daß die Geraden $y = A\mu + B$ in der $y\mu$-Ebene eine Kurve*) von der in der Figur 2 schematisch gezeichneten Form einhüllen. Ein Blick auf die Figur lehrt, daß man von jedem Punkte der μ-Achse, der nicht zwischen $\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$ liegt, eine und nur eine Tangente an die Kurve ziehen kann. Zwei Tangenten an die Kurve können sich nur innerhalb des Streifens $\mu = \bar{\mu}_1$ und $\mu = \bar{\mu}_2$ schneiden; ferner rückt die Kurve mit wachsender Oszillationszahl nach oben. Diese Tatsachen lassen sich leicht analytisch begründen (vgl. die zit. Stellen).

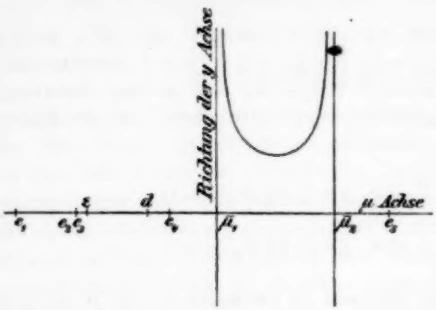


Fig. 2.

Es sei nun $E(\mu; A, B)$ eine Lösung von (113a), die in $\bar{\mu}_1$ verschwindet und deren erste Ableitung daselbst den Wert 1 hat, dann sind A und B durch die Gleichung verbunden

$$E(\bar{\mu}_2;\ A, B) = 0.$$

A ist also eine analytische Funktion von B und umgekehrt.

Um eine weitere Orientierung über die Verteilung der Eigenwerte zu erhalten, nehmen wir zum Vergleiche:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + A_1(\mu - \nu) f = 0, \tag{114}$$

deren Eigenfunktionen sich wieder als Produkte $g(\mu) \cdot h(\nu)$ darstellen lassen, wobei:

$$\frac{d^2 g(\mu)}{d\xi^2} + \quad (A_1 \mu + B_1)\, g(\mu) = 0, \tag{115a}$$

$$\frac{d^2 h(\nu)}{d\eta^2} + (-(A_1 \nu + B_1))\, h(\nu) = 0 \tag{115b}$$

ist.

Wir betrachten jetzt die Oszillationsfigur, die zu denjenigen Eigenfunktionen von (115a) gehört, die nur in $\mu = \bar{\mu}_1$ und $\mu = \bar{\mu}_2$ verschwinden. Diese Figur liegt ganz oberhalb der μ-Achse**); wir ziehen jetzt vom Punkte $(\mu = e_3 = 0, y = 0)$ die Tangente $y = \alpha\mu$ an diese Oszillationsfigur; dann hat α

---

*) Klein, Math. Annalen Bd. 18; ferner Bôcher p. 126f. und die Arbeit des Verf. in den Jahresberichten 1907.

**) Die horizontale Tangente an diese Oszillationsfigur und damit die ganze Figur liegen nämlich oberhalb der μ-Achse, da $B_1 > 0$ sein muß, wenn $A_1 = 0$.

einen bestimmten von 0 verschiedenen Wert. Aus den obigen Bemerkungen folgt ferner, daß für die Tangente $y = \alpha_m \mu$ an die zur Oszillationszahl m gehörige Oszillationsfigur $\alpha_m > \alpha$ ist. Es sei nun A_1, B_1 ein Wertepaar, für das (115a) eine zur Oszillationszahl m gehörige Lösung, (115b) eine solche Lösung besitzt, die in ε und d verschwindet. Dann liegt die Gerade $y = A_1 \mu + B_1$ unterhalb der Geraden $y = \alpha_m \mu$ in dem von den Geraden $\mu = e_3 = 0$ und $\mu = e_4$ gebildeten Streifen. In der Tat schneiden sich zwei Tangenten an die zwischen den Geraden $\mu = \bar{\mu}_1$ und $\mu = \bar{\mu}_2$ gelegene Oszillationsfigur nur innerhalb des von $\mu = \bar{\mu}_1$ und $\mu = \bar{\mu}_2$ gebildeten Streifens. Entweder ist also unsere Behauptung richtig oder $y = A_1 \mu + B_1$ liegt für $e_3 \leqq \mu \leqq e_4$ ganz oberhalb $y = \alpha_m \mu$. Für diese Werte von μ führten wir aber früher ν als Veränderliche ein; es wäre also sicher in dem Streifen zwischen ε und d $A_1 \nu + B_1$ durchaus positiv, also der Faktor von $h(\nu)$ in (115b) durchaus negativ. Dann aber könnte keine Lösung von (115b) bei diesem Wertepaare $A_1 B_1$ mehr als eine Nullstelle im Intervalle ε, d besitzen, also unmöglich in ε und d verschwinden. Es liegt daher die Tangente $y = A_1 \mu + B_1$ im Intervalle (e_3, e_4) unterhalb $y = \alpha_m \mu$; dann folgt aber unmittelbar aus der Figur, daß $A_1 > \alpha_m$ ist, also ist a fortiori $A_1 > \alpha$. D. h. aber: Alle Eigenwerte A_1 von (114) für ein Rechteck, das begrenzt wird von $\nu = \varepsilon_1$, $\nu = d$, $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2$ in der Ebene $\nu\mu$, sind größer als α. Nun geht aus einem von mir bewiesenen Hilfssatze*) hervor, daß, wenn A und A_1 entsprechende Eigenwerte von (110) bzw. (114) sind, die zu dem gleichen Rechteck gehören, stets $A \geqq A_1$ ist; es ist also in (110) A stets positiv und größer als α, wie nahe auch ε_1 an 0 heranrücken mag.

Wir zeigen jetzt, daß $B \leqq 0$ sein muß. In der Tat, nehmen wir an, es gebe für ein Wertepaar $A > 0$, $B > 0$ für (112a u. b) Eigenfunktionen, die in μ_1 und μ_2 bzw. ε_1 und d verschwinden. Es kann aber eine Eigenfunktion für den Bereich (ε_1, d) gewiß nur dann existieren, wenn $\frac{5}{4} \nu^3 - A\nu - B$ auch positive Werte annimmt, was z. B. für einen Wert ν_3 eintreten soll, wobei $\varepsilon_1 \leqq \nu_3 \leqq d$ ist. Dann aber ist

$$\frac{5}{4} \nu^3 - A\nu - B = \nu\left(\frac{5}{4} \nu^2 - A\right) - B$$

positiv für jedes $\nu > \nu_3$, also ist auch $\frac{5}{4} \mu^3 - A\mu - B$ stets positiv, da ja $\mu > d$ ist. Daher wäre der Koeffizient von $E(\mu)$ in (112a) stets negativ und $E(\mu)$ könnte keine Eigenfunktion sein, die in μ_1 und μ_2 verschwindet. Die Annahme eines positiven B ist also unzulässig.

---

*) l. c. S. 47.

Es folgt daraus auch, daß, wenn A und B zu Eigenfunktionen unseres Bereiches gehören, $A\mu + B = y$ die μ-Achse in einem Punkte zwischen 0 und μ_2 schneiden muß. Es ist also stets $\left|\frac{B}{A}\right| < \mu_2$; zusammenfassend haben wir

$$A \geqq \alpha, \quad B \leqq 0; \quad |B| \leqq \mu_2 A. \tag{116}$$

Wir bestimmen jetzt für negative B die Exponenten r' der Fundamentallösungen von (113b) im Punkt $\nu = 0$. Wir setzen zu diesem Zwecke $-e_1 \cdot e_4 \cdot e_5 = e$; e ist also eine positive Zahl und man findet für r'

$$4er'(r'-1) + 4er' - B = 0; \quad r' = \pm\sqrt{\frac{B}{4e}} = \pm\, i\sqrt{\frac{-B}{4e}} = \pm\, ir\pi, \tag{117}$$

wobei $i = \sqrt{-1}$, $\sqrt{\frac{-B}{4e}} = r\pi$ ist.

Man findet daher wieder zwei reelle Fundamentallösungen:

$$\begin{aligned} U_0^{(r)}(\nu) &= \cos(r\pi\,|\lg(\nu)|) + \nu\mathfrak{P}_0^{(r)}(\nu), \\ U_1^{(r)}(\nu) &= \sin(r\pi\,|\lg(\nu)|) + \nu\mathfrak{P}_1^{(r)}(\nu), \end{aligned} \tag{118}$$

und aus diesen setzen wir die Funktion $u(\nu, r)$ zusammen, die für $\nu = d$ verschwindet, indem wir setzen

$$U_0^{(r)}(\nu) \cdot U_1^{(r)}(d) - U_0^{(r)}(d)\, U_1^{(r)}(\nu) = u(\nu, r). \tag{119}$$

Wenn man daher eine beliebig kleine Umgebung von $r = 0$ ausschließt und $A < \mathsf{A}$ voraussetzt, so daß $|B| < \mu_2 \mathsf{A}$ ist, so kann man eine endliche von 0 verschiedene Zahl f angeben, daß stets

$$(U_1^{(r)}(d))^2 + (U_0^{(r)}(d))^2 \geqq f$$

ist.

Berücksichtigen wir ferner die oben konstatierte Tatsache, daß A eine analytische Funktion von B ist, so findet man durch dieselben Betrachtungen wie in Kap. II, § 1, daß der Unterschied zwischen zwei benachbarten Werten $r_1^{(\varepsilon_1)}$ und $r_2^{(\varepsilon_1)}$ $\frac{1 + \varepsilon_1 M}{|\lg \varepsilon_1|}$ ist, wobei M eine variable Größe ist, die aber unter den gemachten Voraussetzungen unterhalb einer festen, von ε_1 unabhängigen Zahl liegt. Unter benachbarten Werten $r_1^{(\varepsilon_1)}$ und $r_2^{(\varepsilon_1)}$ sind hier solche r verstanden, die in bezug auf das Segment (ε_1, d) zu benachbarten Oszillationszahlen, in bezug auf das Segment $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$ zu derselben Oszillationszahl gehören. Aus dem Beweise für diesen Satz folgt weiter, daß in den allenfalls auszuschließenden, aber beliebig klein zu wählenden Segmenten in der Umgebung von $r = 0$ die Eigenwerte nicht dichter liegen, und diese Bemerkung genügt zum Nachweise, daß durch das Auftreten solcher Fälle das folgende in keiner Weise geändert wird, da die Summe der hierher gehörigen Glieder beliebig klein gemacht werden kann.

§ 2.

Die Greensche Funktion.

Nachdem dieses vorausgeschickt ist, verfahren wir wie früher. Es seien die Integrationskonstanten für ξ und η und das Vorzeichen der Wurzeln so gewählt, daß

$$\xi(\mu_1) = 0; \quad \xi(\bar{\mu}_2) = a; \quad \eta(\varepsilon_1) = b, \quad \eta(d) = 0$$

ist. b wächst dann in das Unendliche, wenn ε_1 nach 0 konvergiert.

Wir betrachten jetzt in der $\xi\eta$-Ebene das Rechteck, begrenzt von den Seiten $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\xi = a$, $\eta = b$, und bilden für

$$(120) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \left[-\frac{5}{4}(\mu^3 - \nu^3)\right] f = 0$$

die Greensche Funktion $G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta;\, \xi_1, \eta_1)$, welche auf dem Rande des Rechteckes verschwindet und in dem im Inneren des Rechteckes gelegenen Punkt $\xi_1 \eta_1$ unendlich wird wie $-\frac{1}{2}\lg\left((\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2\right)$.

Da nun $G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta;\, \xi_1, \eta_1)$ wieder zu kompliziert für eine direkte Untersuchung ist, so wählen wir, wie in Kapitel II, eine Vergleichsfunktion, nämlich die Greensche Funktion $G_1^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta;\, \xi_1, \eta_1)$, welche auf dem Rande desselben Rechteckes verschwindet und der Differentialgleichung

$$(121) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$$

genügt.

Diese Funktion wird bekanntlich durch die konforme Abbildung des Rechteckes auf den Einheitskreis gewonnen und läßt sich daher vermittels der Transzendenten, welche in der Theorie der elliptischen Funktionen auftreten, darstellen. Wir setzen zu diesem Zwecke*)

$$\xi + i\eta = z, \qquad \xi_1 + i\eta_1 = z_1, \qquad \xi_1 - i\eta_1 = z_1',$$

$$\vartheta(z) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot e^{-\frac{b}{a}\pi m^2} \cdot \cos(2m\pi z).$$

Dann ist

$$(122) \qquad G_1^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta;\, \xi_1, \eta_1) = -\lg\left|\frac{\vartheta\left(\frac{z - z_1 - bi}{2a}\right)\vartheta\left(\frac{z + z_1 - bi}{2a}\right)}{\vartheta\left(\frac{z - z_1' - bi}{2a}\right)\cdot\vartheta\left(\frac{z + z_1' - bi}{2a}\right)}\right|$$

und

*) Vergl. z. B. A. **Harnack**: Die Grundlagen des logarithmischen Potentials, Seite 78.

$$\vartheta\left(\frac{z-z_1-bi}{2a}\right)=1-e^{\frac{z-z_1}{a}\cdot i\pi}+e^{-b}R_1(z,z_1);$$

$$\vartheta\left(\frac{z+z_1-bi}{2a}\right)=1-e^{\frac{z+z_1}{a}\cdot i\pi}+e^{-b}R_2(z,z_1),$$

und analog, wenn z_1' an die Stelle von z_1 tritt; dabei ist der Wert der $R(z,z_1)$ für alle z, die innerhalb des Rechteckes liegen, bei jedem noch so großen b unterhalb einer endlichen Größe, wenn z_1 fest im Innern des Rechteckes gelegen ist. Ferner erhält man für genügend große η eine Darstellung von der Form:

$$G_1^{(\epsilon_1)}(\xi,\eta;\ \xi_1,\eta_1)=e^{\frac{-\eta\pi}{a}}\gamma_1^{(\epsilon_1)}(\xi,\eta;\ \xi_1,\eta_1),$$

wobei $\gamma_1^{(\epsilon_1)}$ für genügend große η vom Charakter einer ganzen Funktion in bezug auf ξ ist, ferner treten in $\gamma_1^{(\epsilon_1)}$ nur Potenzen mit positiven Exponenten von $e^{\frac{-\eta\pi}{a}}$ und $e^{\frac{(\eta-2b)\pi}{a}}$ auf.

Wir führen jetzt wieder ν statt η ein; es ist

$$\eta=\frac{1}{2\sqrt{-e_1e_4e_5}}\,|\lg\nu|+\mathfrak{P}(\nu).$$

Wir setzen:

$$\frac{\pi}{2a\sqrt{-e_1e_4e_5}}=c_1; \tag{123}$$

dann ist c_1 eine positive von 0 verschiedene Konstante und man erhält

$$G_1^{(\epsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\nu^{c_1}g_1^{(\epsilon_1)}(\xi,\nu;\ \xi_1,\nu_1); \tag{124}$$

für $\epsilon_1=0$ konvergiert*) $G_1^{(\epsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ nach

$$G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\lg\left|\frac{\left(1-e^{\frac{z-z_1}{a}i\pi}\right)\left(1-e^{\frac{z+z_1}{a}i\pi}\right)}{\left(1-e^{\frac{z-z_1'}{a}i\pi}\right)\left(1-e^{\frac{z+z_1'}{a}i\pi}\right)}\right|.$$

Wir wenden nun den bekannten Greenschen Satz zum Vergleich von

$$G_1^{(\epsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\quad\text{und}\quad G_2^{(\epsilon_1)}(\xi,\eta;\ \xi_1,\eta_1)$$

an und finden wie bei (67) u. f.

$$G_2^{(\epsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\leqq G_1^{(\epsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\leqq G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1),$$

*) Wir müssen dabei jedoch voraussetzen, daß η und η_1 sich nicht gleichzeitig dem Werte b in jedem einzelnen Falle nähern. Wir erreichen dies, indem wir immer

$$\eta_1\leqq\frac{b}{2}$$

voraussetzen, wobei zu erinnern ist, daß b unendlich groß wird.

ferner

$$\lim_{\varepsilon_1=0} G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = G_2(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \quad \left(\text{wenn } \eta_1 \leqq \frac{b}{2}\right)$$

und

$$G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = \nu^{\varepsilon_1}\gamma_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1),$$

wenn $\gamma_2^{(\varepsilon_1)}$ dabei eine Funktion von demselben Charakter ist wie $\gamma_1^{(\varepsilon_1)}$.

§ 3.

Aufstellung der Integralgleichung. Übergang zur quadratischen Form.

Es sei jetzt $\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;m,r)$ eine Eigenfunktion von (110), welche für $\xi=0$, $\xi=a$, $\eta=0$, $\eta=b$ verschwindet und im Intervall $\xi=0$ bis $\xi=a$ zur Oszillationszahl m gehört; r ist durch (117) definiert. Dann folgt wieder aus dem Greenschen Satze:

$$(125)\quad \psi^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;m,r) - \frac{A_{m,r}}{2\pi}\int_0^a\int_0^b G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi_1,\eta_1;m,r)(\mu_1-\nu_1)\,d\xi_1\,d\eta_1 = 0$$

oder

$$\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;m,r)$$
$$-\frac{A_{m,r}}{2\pi}\int_0^a\int_{\varepsilon_1}^d G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta(\nu);\xi_1,\eta(\nu_1))\cdot\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi_1,\eta(\nu_1);m,r)(\mu_1-\nu_1)\,d\xi_1\frac{d\nu_1}{\sqrt{R_1(\nu_1)}} = 0.$$

Wir setzen jetzt:

$$(126)\qquad \varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;m,r) = \psi^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;m,r)\frac{\sqrt{\mu-\nu}}{\sqrt[4]{R_1(\nu)}} \quad \text{für } \nu \geqq \varepsilon_1;$$

$$\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;m,r) = 0 \quad \text{für } \nu \leqq \varepsilon_1,$$

$$(127)\; K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;\xi_1,\nu_1) = G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta(\nu);\xi_1,\eta(\nu_1))\frac{\sqrt{\mu-\nu}\sqrt{\mu_1-\nu_1}}{\sqrt[4]{R_1(\nu)}\sqrt[4]{R_1(\nu_1)}} \quad \text{für } \nu_1 \text{ und } \nu > \varepsilon_1$$

$$K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;\xi_1,\nu_1) = 0 \quad \text{für } \nu \leqq \varepsilon_1 \text{ oder } \nu_1 \leqq \varepsilon_1.$$

Dann wird also:

$$(128)\; \varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;m,r) - \frac{A_{m,r}}{2\pi}\int_0^a\int_0^d K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;\xi_1,\nu_1)\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi_1,\nu_1;m,r)\,d\xi_1\,d\nu_1 = 0.$$

Die Eigenfunktionen von (128) sind noch zu normieren; wir setzen für die normierte Eigenfunktion:

$$\overline{\varphi}^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r) = \frac{\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r)}{\sqrt{\int\limits_0^a\int\limits_0^d (\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r))^2 d\xi\, d\nu}}$$

$$= \frac{\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m. r)}{\sqrt{\int\limits_0^a\int\limits_{\varepsilon_1}^d (\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; m, r))^2 \frac{(\mu-\nu)}{\sqrt{R_1(\nu)}}\, d\xi\, d\nu}}.$$

Nun ist

$$\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; m, r) = u^{(\varepsilon_1)}(\nu; m, r)\, E_1^{(\varepsilon_1)}(\mu; m, r),$$

wobei $u^{(\varepsilon_1)}(\nu; m, r)$ mit der in (119) definierten Funktion übereinstimmt. Dann wird:

$$\int\limits_0^a\int\limits_{\varepsilon_1}^d (\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; m, r))^2 \frac{(\mu-\nu)\, d\xi\, d\nu}{\nu\sqrt{(\nu-e_1)(e_4-\nu)(e_5-\nu)}}$$

$$= \int\limits_0^a \mu (E^{(\varepsilon_1)}(\mu; m, r))^2 d\xi \cdot \int\limits_{\varepsilon_1}^d \frac{(u^{(\varepsilon_1)}(\nu; m, r))^2 d\nu}{\nu\sqrt{(\nu-e_1)(e_4-\nu)(e_5-\nu)}}$$

$$- \int\limits_0^a (E^{(\varepsilon_1)}(\mu; m, r))^2 d\xi \cdot \int\limits_{\varepsilon_1}^d \frac{(u^{(\varepsilon_1)}(\nu; m, r))^2 d\nu}{\sqrt{(\nu-e_1)(e_4-\nu)(e_5-\nu)}}$$

$$= \int\limits_0^a \mu (E^{(\varepsilon_1)}(\mu; m, r))^2 d\xi\, [(U_1^{(r)}(d))^2 + (U_0^{(r)}(d))^2]\, \frac{\frac{1}{2}\,|\lg \varepsilon_1|}{\sqrt{-e_1 e_4 e_5}} + M_1$$

$$= \frac{1}{2}\,|\lg \varepsilon_1|\, \chi_{\varepsilon_1}(m, r) + M_1;$$

wobei M_1 unterhalb einer festen Zahl für alle ε_1 liegt, sofern $A < \mathsf{A}$, wenn A beliebig groß vorgegeben ist.*) Man hat also:

$$\overline{\varphi}^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r) = \frac{\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r)}{\sqrt{\frac{1}{2}\,|\lg(\varepsilon_1)|\, \chi_{\varepsilon_1}(m, r) + M_1}},$$

(129)

$$\text{wobei}\quad \chi_{\varepsilon_1}(m, r) = \int\limits_0^a \frac{\mu (E^{(\varepsilon_1)}(\mu; m, r))^2}{\sqrt{-e_1 e_4 e_5}}\, d\xi\, [(U_1^{(r)}(d))^2 + (U_0^{(r)}(d))^2].$$

Wir wählen nun in einer Ebene mit den Koordinatenachsen ξ und ν für das Rechteck, welches von

$$\xi = 0;\ \nu = 0;\ \xi = a;\ \nu = d$$

begrenzt wird, ein vollständiges orthogonales System, z. B.

$$2 \sin\left(\frac{p\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi\nu}{d}\right), \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, \cdots \\ q = 1, 2, \cdots \end{array},$$

für welches eine zu (19) analoge Formel gilt.

*) Vgl. S. 42.

Dann setzen wir

$$(130)\quad \int_0^a\int_0^d 2K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;\xi_1,\nu_1)\sin\left(\frac{p\pi\xi}{a}\right)\sin\left(\frac{q\pi\nu}{d}\right)d\xi\,d\nu = k_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(\xi_1,\nu_1).$$

$$(131)\quad \int_0^a\int_0^d 2k_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(\xi_1,\nu_1)\sin\left(\frac{p_1\pi\xi_1}{a}\right)\sin\left(\frac{q_1\pi\nu_1}{d}\right)d\xi_1\,d\nu_1 = k_{p,q;p_1,q_1}^{(\varepsilon_1)}$$

und

$$K^{(\varepsilon_1)}(xy) = \sum_{p,q;p_1,q_1} k_{p,q;p_1,q_1}^{(\varepsilon_1)}\, x_{p,q}\, y_{p_1,q_1},$$

wobei p, q, p_1, q_1 alle ganzen Zahlen von 1 ab durchlaufen.*)

Wie dann aus den Untersuchungen über die Eigenwerte A hervorgeht, sind alle $K^{(\varepsilon_1)}(xy)$ beschränkte Formen und liegen für alle ε_1 unterhalb einer endlichen Grenze, wenn

$$(xx)\leqq 1;\quad (yy)\leqq 1$$

ist. Da man nun durch Integralabschätzung wieder zeigen kann, daß für alle endlichen, aber festen p, q, p_1, q_1 $k_{p,q;p_1,q_1}^{(\varepsilon_1)}$ nach einem bestimmten $k_{p,q;p_1,q_1}$ konvergiert, so folgt wie in Kap. I § 3, daß $K^{(\varepsilon_1)}(xy)$ mit abnehmendem ε_1 nach einer beschränkten Form $K(xy)$ konvergiert.

Die zu $\overline{\varphi}^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;m,r)$ gehörige normierte Linearform sei:

$$(132)\quad \overline{L}^{(\varepsilon_1)}(x;m,r) = \frac{L^{(\varepsilon_1)}(x;m,r)}{\sqrt{\frac{1}{2}\,|\lg\varepsilon_1|\,\chi_{\varepsilon_1}(m,r)+M_1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\,|\lg\varepsilon_1|\,\chi_{\varepsilon_1}(m,r)+M_1}}\sum_{pq} l_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(m,r)\,x_{p,q}.$$

Dann ist:

$$(133)\quad l_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(m,r) = \int_0^a\int_{\varepsilon_1}^d 2E^{(\varepsilon_1)}(\mu;m,r)\,u^{(\varepsilon_1)}(\nu;m,r)\sin\left(\frac{p\pi\xi}{a}\right)\sin\left(\frac{q\pi\nu}{b}\right)\frac{\sqrt{\mu-\nu}\,d\xi\,d\nu}{\sqrt{\nu}\sqrt[4]{(\nu-e_1)(e_4-\nu)(e_5-\nu)}}.$$

Es folgt also aus der schon oft angewandten Methode:

$$l_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(m,r)\leqq\frac{M_2^{(\varepsilon_1)}}{q^2\cdot p^{\frac{1}{2}}},$$

wobei $M_2^{(\varepsilon_1)}$ für alle p und q und für alle $A < \mathsf{A}$ und alle ε_1 unterhalb einer festen Grenze bleibt.

Wenn also $\sum_{p,q}|x_{p,q}|$ konvergiert, folgt wie immer:

$$(134)\quad \lim_{\varepsilon_1=0} L^{(\varepsilon_1)}(x;m,r) = L(x;m,r).$$

*) Wir können natürlich die Summe wieder als gewöhnliche Doppelsumme, etwa wie in III, auffassen.

Es genügt aber zur Ableitung von (134) schon, wenn

$$x_{p,q} = \frac{M_3}{p^{\frac{1}{2}+c} \cdot q}$$

ist, sofern M_3 unabhängig von p und q unterhalb einer endlichen Grenze liegt, und c eine wesentlich positive Konstante, z. B. die in (123) definierte Zahl c_1, bedeutet.

Nun kann man $K^{(\varepsilon_1)}(xy)$ in der Form darstellen:

$$K^{(\varepsilon_1)}(xy) = \sum_m \sum_r \frac{L^{(\varepsilon_1)}(x; m, r)\, L^{(\varepsilon_1)}(y; m, r)\, 2\pi}{\left(\frac{1}{2} \mid \lg \varepsilon_1 \mid \chi_{\varepsilon_1}(m, r) + M_1\right) \Delta(m, r)} + R_{\mathsf{A}}.$$

Dabei ist die Doppelsumme über alle Eigenfunktionen zu erstrecken, für welche $\Delta \leqq \mathsf{A}$ ist; m bedeutet die Oszillationszahl im Intervall $\xi = 0$ bis $\xi = a$; r ist in (117) definiert und man kann A so groß wählen, daß $|R_{\mathsf{A}}| \leqq \delta$ wird. Wir können nun, wie in Kapitel I, zur Grenze übergehen und finden

$$K(xy) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{4\pi\, L(x; m, r)\, L(y; m, r)}{\chi(m, r)\, \Delta(m, r)}\, dr. \tag{135}$$

Wir nehmen ξ_1, η_1 fest im Innern des betreffenden Intervalles an und setzen:

$$x_{p,q}^{(\varepsilon_1)} = k_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(\xi_1, \nu_1),$$

dann ist

$$x_{p,q}^{(\varepsilon_1)} \leqq \frac{M_4}{p^{\frac{1}{2}+c_2} \cdot q},$$

wobei c_2 die kleinere der beiden Zahlen c_1 und $\frac{1}{2}$ ist.

Um dies einzusehen, ziehen wir von $K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1)$ die Greensche Funktion $G_3(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1)$ ab, welche auf dem Rande des Rechtecks, das von den vier Geraden $\xi = 0$; $\nu = 0$; $\xi = a$; $\nu = d$ begrenzt wird, verschwindet und welche der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2} = 0$$

genügt, nachdem wir sie mit einem konstanten Faktor multipliziert haben, so daß die logarithmische Singularität in Wegfall kommt.

Nun ist aber

$$\frac{1}{p^2 + q^2} \sin\left(\frac{p\pi\xi_1}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi\nu_1}{d}\right) = \int_0^a \int_0^d G_3(\xi_1, \nu_1; \xi, \nu) \sin\left(\frac{p\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi\nu}{d}\right) d\xi\, d\nu.$$

Der übrig bleibende Teil von $K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1)$ verschwindet für $\xi = 0$

und $\xi = a$ von der 1. Ordnung, ebenso für $\nu = d$; in der Nähe von $\nu = \varepsilon_1$ verhält er sich wie $\nu^{\varepsilon_1 - \frac{1}{2}} \gamma_2(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$. (Vergl. den Schluß des letzten Paragraphen.) Daraus folgt die Behauptung.

Für y_{p_1, q_1} setzen wir

$$y_{p_1, q_1} = \int_0^a \int_0^d 2g(\xi, \nu) \sin\left(\frac{p_1 \pi \xi}{a}\right) \sin\left(\frac{q_1 \pi \nu}{d}\right) d\xi\, d\nu.$$

wobei $g(\xi, \nu)$ eine auf dem Rande des Rechtecks in der $\xi\nu$-Ebene verschwindende, beliebig vorgegebene Funktion ist, welche eine stetige erste und zweite Ableitung in bezug auf ξ und ν besitzen soll, die den Dirichletschen Bedingungen genügen. Setzt man nun $\varepsilon_1 = 0$

$$K_2^{(2)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1) = \int_0^a \int_0^d K_2(\xi, \nu; \xi_2, \nu_2)\, K_2(\xi_1, \nu_1; \xi_2, \nu_2)\, d\xi_2\, d\nu_2$$

und

$$f_1(\mu, \nu) = \int_0^a \int_0^d K_2^{(2)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1)\, g(\mu_1, \nu_1)\, d\xi_1\, d\nu_1,$$

wobei ξ_1 und μ_1 genau so zusammenhängen wie ξ und μ, so folgt durch dieselben Schlüsse wie in Kapitel I, § 4 aus (135):

$$f_1(\mu, \nu) = \sum_m 2 \cdot \int_0^\infty dr\, \frac{E(\mu; m, r)\, u(\nu; m, r)}{\chi(m, r)}\, \frac{\sqrt{\mu - \nu}}{\sqrt[4]{R_1(\nu)}}$$

$$\cdot \int_0^a \int_0^d f_1(\mu_1, \nu_1)\, E(\mu_1; m, r)\, u(\nu_1; m, r)\, \frac{\sqrt{\mu_1 - \nu_1}}{\sqrt[4]{R_1(\nu_1)}}\, d\xi_1\, d\nu_1$$

oder

$$f(\mu, \nu) = f_1(\mu, \nu)\, \frac{\sqrt[4]{R_1(\nu)}}{\sqrt{\mu - \nu}} = \sum_m \int_0^\infty dr\, \frac{E(\mu; m, r)\, u(\nu; m, r)}{\chi(m, r)} \tag{136}$$

$$\cdot \int_0^a \int_0^d f(\mu_1, \nu_1)\, E(\mu_1; m, r)\, u(\nu_1; m, r)\, (\mu_1 - \nu_1)\, d\xi_1\, \frac{d\nu_1}{\sqrt{R_1(\nu_1)}},$$

wenn

$$f(\mu, \nu) = \int_0^a \int_0^d \frac{\sqrt[4]{R_1(\nu)}}{\sqrt{\mu - \nu}}\, K_2(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1)\, g_1(\mu_1, \nu_1)\, d\xi_1\, d\nu_1$$

und

$$g_1(\mu_1, \nu_1) = \int_0^a \int_0^d K_2(\xi_2, \nu_2; \xi_1, \nu_1)\, g(\mu_2, \nu_2)\, d\xi_2\, d\nu_2$$

ist.

Ersetzen wir wieder $K_2(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1)$ durch

$$G_2(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \frac{\sqrt{(\mu-\nu)\,\mu_1-\nu_1)}}{\sqrt[4]{R_1(\nu)\,R_1(\nu_1)}},$$

so findet man, wenn $f(\mu, \nu)$ und das etwas weiter unten definierte $g_2(\mu, \nu)$ auf dem Rande des Rechtecks verschwinden und überall zweimal stetig differentiierbar sind, durch Anwendung des Greenschen Satzes analog wie in Kap. I, § 4:

$$\begin{aligned} -2\pi g_1(\mu_1, \nu_1)\sqrt{\mu_1-\nu_1}\cdot\sqrt[4]{R_1(\nu_1)} &= \frac{\partial^2 f(\mu_1, \nu_1)}{\partial \xi_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 f(\mu_1, \nu_1)}{\partial \eta_1^{\,2}} \\ &\quad - \frac{5}{4}(\mu^3-\nu^3) f = -2\pi g_2(\mu_1, \nu_1)\,(\mu_1-\nu_1) \end{aligned}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} -2\pi g(\mu_2, \nu_2)\sqrt{\mu_2-\nu_2}\cdot\sqrt[4]{R_1(\nu_2)} &= \frac{\partial^2 g_2(\mu_2, \nu_2)}{\partial^2 \xi_2^{\,2}} + \frac{\partial^2 g_2(\mu_2, \nu_2)}{\partial^2 \eta_2^{\,2}} \\ &\quad - \frac{5}{4}(\mu_2^{\,3}-\nu_2^{\,3})\, g_2(\mu_2, \nu_2), \end{aligned}$$

und die so definierte Funktion $g(\mu_2, \nu_2)$ muß für $\mu = \bar{\mu}_1$; $\mu = \bar{\mu}_2$; $\nu = 0$; $\nu = d$ von 1. Ordnung in μ und ν verschwinden, und nach μ und ν gleichzeitig differentiierbar sein, und diese Ableitungen müssen den Dirichletschen Bedingungen genügen.

Die Weiterführung des jetzigen Problems, wie in den früheren Kapiteln, bietet nun keine prinzipiellen Schwierigkeiten; da es sich aber hier nur noch um einige Rechnungen infolge der schärferen Koeffizientenabschätzung handelt, so will ich dieses nicht näher durchführen.

Fig. 3.

Zum Schlusse bemerken wir noch, daß, wenn in nebenstehender Figur sich das Intervall von ϱ bis zu den zusammenfallenden $e_1 e_2$ erstreckt, man neben dem Streckenspektrum wieder ein Punktspektrum erhält, analog wie in Kap. II.

September 1907.

Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten.

Von

Fritz Jerosch† und Hermann Weyl in Göttingen*).

§ 1.

Hilfssatz über die Beschränktheit von Funktionsfolgen.

Das nächste Ziel der folgenden Untersuchung ist es, zu entscheiden, unter welchen Voraussetzungen über die Größenordnung der Koeffizienten c_n, $\bar{c}_n$ eine trigonometrische Reihe

$$\frac{c_0}{2} + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + c_3 \cos 3x + \cdots$$
$$+ \bar{c}_1 \sin x + \bar{c}_2 \sin 2x + \bar{c}_3 \sin 3x + \cdots$$

für alle Werte der Variablen x mit Ausnahme solcher, die einer Menge vom Maße 0**) angehören, konvergiert.***) Wir bedürfen dazu eines Satzes über die Beschränktheit einer einfach unendlichen Reihe von periodischen Funktionen.

Es liege eine unendliche Folge

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x), \cdots$$

*) Herr Fritz Jerosch, Student der Mathematik in Göttingen, hatte im August 1907 eine Note über den Gegenstand dieser Arbeit bei den Annalen eingereicht. Er war damit beschäftigt, sie umzugestalten und zu erweitern, als er plötzlich infolge einer Operation verstarb. Herr Weyl hatte die Freundlichkeit, auf Grund der nachgelassenen Papiere des Herrn Jerosch die vorliegende Bearbeitung auszuführen.

D. Red. d. Math. Ann.

**) Zur Definition des Begriffes „Maß" (mesure) vgl. Lebesgue, Leçons sur l'intégration (Paris 1904), pag. 102 ff., Leçons sur les séries trigonométriques (Paris 1906), pag. 8.

***) Die gleiche Fragestellung findet sich bereits bei Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. Bd. 30 (1906), pag. 337. Doch ist das dort ausgesprochene Ergebnis — Fatou gibt als hinreichende Bedingung $\underset{n=\infty}{L}\, nc_n = \underset{n=\infty}{L}\, n\bar{c}_n = 0$ an — weit weniger vollständig als das in § 2 der vorliegenden Note bewiesene.

stetiger Funktionen von der Periode 2π vor. Ist N irgend ein Index, so finden sich für jeden Wert von x unter den Zahlen

$$|F_1(x)|,\ |F_2(x)|,\ \cdots,\ |F_N(x)|$$

eine oder mehrere *größte;* der Index der ersten unter diesen größten (der eine Funktion von N und x ist), werde mit $(N;x)$ bezeichnet, so daß für alle N und alle x

$$|F_n(x)| \leqq |F_{(N;x)}(x)|, \quad \text{falls } n \leqq N,$$

gilt. Es ist leicht zu sehen, daß die Funktionen $F_{(N;x)}(x)$ von x gleichfalls stetig sind und die Periode 2π besitzen. Ist demnach δ irgend ein reeller positiver Exponent, so existieren die Integrale

$$\int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^\delta dx = J_N^{(\delta)} \quad \text{für } N = 1, 2, 3, \cdots,$$

und der zu beweisende Hilfssatz lautet jetzt so:

Ist (für ein festes δ) die Zahlenfolge

$$J_1^{(\delta)},\ J_2^{(\delta)},\ J_3^{(\delta)},\ \cdots \tag{1}$$

beschränkt, so ist die Menge $\mathfrak{M}_0$, die dadurch erklärt ist, daß ihr ein Wert x_0 des Intervalls $0\cdots 2\pi$ dann und nur dann zugerechnet wird, falls die Wertefolge $F_1(x_0)$, $F_2(x_0)$, $F_3(x_0)$, $\cdots$ nicht beschränkt ist, vom Maße 0.

In der Tat: ist etwa

$$J_N^{(\delta)} \leqq H^\delta \quad \text{für alle } N,$$

und verstehen wir unter A irgend eine positive Zahl, so beträgt das Maß $m(\mathfrak{A}_N)$ derjenigen Punktmenge $\mathfrak{A}_N$ des Intervalls $0 \leqq x \leqq 2\pi$, in welcher $|F_{(N;x)}(x)| > A$ ist, höchstens $\left(\frac{H}{A}\right)^\delta$, da notwendig

$$\int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^\delta dx \geqq A^\delta \cdot m(\mathfrak{A}_N)$$

wird. Nun ist aber für jeden Wert von x

$$|F_{(1;x)}(x)| \leqq |F_{(2;x)}(x)| \leqq |F_{(3;x)}(x)| \leqq \cdots,$$

und mithin $\mathfrak{A}_1$ enthalten in $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2$ enthalten in $\mathfrak{A}_3$ u. s. f.; folglich sind alle $\mathfrak{A}_N$ in einer Menge $\mathfrak{A}$ enthalten, für deren Maß $m(\mathfrak{A})$ die Ungleichung gilt:

$$m(\mathfrak{A}) \leqq \left(\frac{H}{A}\right)^\delta.$$

Das heißt aber, daß die Menge derjenigen Punkte x des Intervalls $0\cdots 2\pi$, in denen *irgend eine* der Funktionen $|F_1(x)|$, $|F_2(x)|$, $\cdots$ die

Zahl A übersteigt, höchstens das Maß $\left(\frac{H}{A}\right)^\delta$ besitzt. Daraus ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung.

Für die Zwecke des § 3 ist es erforderlich, eine gewisse Erweiterung dieses Hilfssatzes auf zweifach unendliche Funktionsfolgen vorzunehmen. Indem wir die obigen Bezeichnungen beibehalten, aber jetzt unter δ insbesondere einen positiven Exponenten $\leqq 1$ verstehen, unter $a_1, a_2, a_3, \cdots$ aber irgendwelche reelle Zahlen, für welche die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^\delta, \quad \text{mithin auch} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert, setzen wir

$$G_{m,n}(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k F_n(kx).$$

Hilfssatz: *Ist für einen positiven Exponenten δ der angegebenen Art die Folge* (1) *beschränkt, so machen diejenigen Stellen x, für die die abzählbar-unendlichvielen Werte $G_{m,n}(x)$ $(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$ nicht zwischen endlichen Grenzen bleiben, wiederum nur eine Menge vom Maße* 0 *aus.*

Es ist nämlich

$$(2) \qquad |G_{m,n}(x)| \leqq \sum_{k=1}^{M} |a_k| \cdot |F_{(N;\,kx)}(kx)|, \quad \text{falls } m \leqq M,\ n \leqq N,$$

ferner

$$(3) \qquad \left(\sum_{k=1}^{M} |a_k| \cdot |F_{(N;\,kx)}(kx)|\right)^\delta \leqq \sum_{k=1}^{M} |a_k|^\delta \cdot |F_{(N;\,kx)}(kx)|^\delta,$$

und daher, wenn wir das Integral des auf der linken Seite von (3) stehenden Ausdrucks nach x im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ mit $J^{(\delta)}_{M,N}$ bezeichnen und bedenken, daß

$$\int_0^{2\pi} |F_{(N;\,kx)}(kx)|^\delta\, dx = \frac{1}{k}\int_0^{2\pi k} |F_{(N;\,x)}(x)|^\delta\, dx = \int_0^{2\pi} |F_{(N;\,x)}(x)|^\delta\, dx$$

ist,

$$J^{(\delta)}_{M,N} \leqq \sum_{k=1}^{M} |a_k|^\delta \cdot \int_0^{2\pi} |F_{(N;\,x)}(x)|^\delta\, dx \leqq H^\delta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^\delta;$$

d. h. unter den gemachten Annahmen ist auch die Zahlenmenge der $J^{(\delta)}_{M,N}$ (bei festem δ) beschränkt, und daraus folgt, indem wir den ersten Hilfssatz statt auf die $F_n(x)$ nunmehr auf die doppelte Folge der $G_{m,n}(x)$ anwenden, die zu beweisende Tatsache.

§ 2.

Satz über die Konvergenz einer trigonometrischen Reihe.

Wir beschränken uns beim Ausspruch und Beweis des angekündigten Satzes über die Konvergenz trigonometrischer Entwicklungen auf eine bloße Cosinus-Reihe.

Satz: *Eine Reihe*

$$c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + c_3 \cos 3x + \cdots$$

konvergiert für alle Werte x mit Ausnahme solcher, die einer gewissen Menge $\mathfrak{M}$ vom Maße 0 *angehören, falls sich eine positive Zahl C und ein Exponent $\gamma > \frac{2}{3}$ angeben lassen, so daß für alle n*

$$|c_n| \leqq \frac{C}{n^\gamma}$$

ist.

Wir setzen

$$F_n(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx$$

und wenden auf die hiermit gewonnene Funktionsfolge

$$F_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

den ersten Hilfssatz und die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen an, um *auf solche Art zunächst zu beweisen, daß diejenigen Werte x des Intervalls $0 \leqq x \leqq 2\pi$, für die jene sukzessiven Partialsummen keine beschränkte Zahlenreihe bilden, eine Menge $\mathfrak{M}_0$ vom Maße* 0 *ausmachen.* Dazu ist es nötig, einen positiven Exponenten δ so ausfindig zu machen, daß die Reihe der Integrale $J_N^{(\delta)}$ für alle N unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

Unter den Voraussetzungen des Theorems existiert die Quadratsumme

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \cdots,$$

und es gibt infolgedessen, wenn wir den Integralbegriff in dem von Lebesgue aufgestellten Sinne*) nehmen, nach einem von den Herren Riesz und Fischer bewiesenen Satz**) eine samt ihrem Quadrat integrierbare Funktion $F(x)$, so daß

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \cos nx \, dx = c_n$$

und

$$\pi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_0^{2\pi} (F(x))^2 \, dx$$

---

*) Leç. sur l'intégration pag. 98 ff. — Leç. s. l. sér. trigonom. pag. 10 f.

**) Riesz, Gött. Nachr. (Math.-phys. Klasse) 1907, pag. 116. — Fischer, Comptes Rendus, Bd. 144, p. 1022 (13. Mai 1907).

ist. Wir schreiben noch

$$F(x) - F_n(x) = D_n(x);$$

dann gilt

$$\int_0^{2\pi} (D_n(x))^2\, dx = \pi \cdot \sum_{h=n+1}^{\infty} c_h^2.$$

Das Maß $m(\mathfrak{E}_n)$ derjenigen Menge $\mathfrak{E}_n$ im Intervall $0 \cdots 2\pi$, in welcher $|D_n(x)| \geqq 1$ ist, genügt wegen dieser Gleichung der Bedingung

(4) $$m(\mathfrak{E}_n) \leqq \pi \cdot \sum_{h=n+1}^{\infty} c_h^2 \leqq \pi C^2 \cdot \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{2\gamma}} < \pi C^2 \cdot \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2\gamma}}$$
$$= \frac{\pi C^2}{2\gamma - 1}\, n^{-(2\gamma-1)}.$$

Bedeutet für eine positive Zahl a allgemein $[a]$ die größte ganze Zahl, welche a nicht übersteigt, so schreiben wir jetzt

$$n_1 = 1,$$
$$n_2 = n_1 + [n_1^{\gamma}],$$
$$n_3 = n_2 + [n_2^{\gamma}],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Um das Integral

$$\int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^{\delta}\, dx$$

zu berechnen, teilen wir das Intervall $0 \cdots 2\pi$ (mit Bezug auf den Index N) in eine endliche Anzahl meßbarer Punktmengen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_p$. Dabei rechnen wir einen Punkt x des Intervalls dann und nur dann zu $\mathfrak{R}_k$, falls

$$n_k \leqq (N; x) < n_{k+1}$$

ist, und es bedeutet p den letzten unter den Indizes k, für welche $n_k \leqq N$ ausfällt. Alsdann wird

(5) $$\int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^{\delta}\, dx = \int_{\mathfrak{R}_1} + \int_{\mathfrak{R}_2} + \cdots + \int_{\mathfrak{R}_p},$$

wobei allgemein unter $\int_{\mathfrak{R}_k}$ das über $\mathfrak{R}_k$ zu erstreckende (Lebesguesche) Integral von $|F_{(N;x)}(x)|^{\delta}$ zu verstehen ist. Ein in $\mathfrak{R}_k$ enthaltener Wert x gehört entweder $\mathfrak{E}_{n_k}$ an, falls nämlich $|D_{n_k}(x)| \geqq 1$ ist, oder es gilt für jenen Wert x die Ungleichung $|D_{n_k}(x)| < 1$; im letzten Fall ist aber, da für Werte x aus $\mathfrak{R}_k$

$$0 \leqq (N; x) - n_k < n_{k+1} - n_k \leqq n_k^{\gamma}$$

ist,

$$|D_{(N;x)}(x)-D_{n_k}(x)| = \left|\sum_{\nu=n_k+1}^{(N;x)} c_\nu \cos \nu x\right| \leqq \sum_{\nu=n_k+1}^{(N;x)} |c_\nu|$$
$$\leqq \frac{C}{n_k^\gamma}\{(N;x)-n_k\} < C,$$

und mithin

$$|D_{(N;x)}(x)| < 1 + C.$$

Für Werte x, die $\mathfrak{R}_k$, aber nicht $\mathfrak{E}_{n_k}$ angehören, ist demnach

$$|F_{(N;x)}(x)| < 1 + C + |F(x)|,$$

und falls der Exponent $\delta \leqq 1$ ist, um so mehr

$$|F_{(N;x)}(x)|^\delta < 1 + C + |F(x)|.$$

Aus dieser Überlegung folgt für das in (5) auftretende Integral über $\mathfrak{R}_k$ die Ungleichung

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{R}_k}\right| \leqq \int\limits_{(\mathfrak{R}_k,\,\mathfrak{E}_{n_k})} |F_{(N;x)}(x)|^\delta dx + \int\limits_{\mathfrak{R}_k}(1+C+|F(x)|)\,dx,$$

in der $(\mathfrak{R}_k, \mathfrak{E}_{n_k})$ den „Durchschnitt" der beiden eingeklammerten Mengen bezeichnet.

Sind die Zahlen $H_1, H_2, \cdots$ so gewählt, daß für alle Indizes $n < n_{k+1}$ und alle Werte x

$$|F_n(x)| \leqq H_k$$

wird, so ist im Bereiche der Menge $\mathfrak{R}_k$

$$|F_{(N;x)}(x)| \leqq H_k,$$

und folglich

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{R}_k}\right| \leqq H_k^\delta \cdot m(\mathfrak{E}_{n_k}) + \int\limits_{(\mathfrak{R}_k)}(1+C+|F(x)|)\,dx. \tag{6}$$

Führen wir diese Abschätzung in (5) ein, so kommt

$$\int\limits_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^\delta dx \leqq \sum_{k=1}^{p} H_k^\delta \cdot m(\mathfrak{E}_{n_k}) + 2\pi(1+C) + \int\limits_0^{2\pi} |F(x)|\,dx.$$

Daß die Integrale

$$J_N^{(\delta)} = \int\limits_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^\delta dx$$

eine beschränkte Folge bilden, wird also bewiesen sein, falls gezeigt wird, daß die unendliche Reihe

$$H_1^\delta \cdot m(\mathfrak{E}_{n_1}) + H_2^\delta \cdot m(\mathfrak{E}_{n_2}) + \cdots \tag{7}$$

konvergiert.

Wenn $n < n_{k+1}$ ist, gilt

$$|F_n(x)| \leqq C\left(\frac{1}{1^\gamma} + \frac{1}{2^\gamma} + \cdots + \frac{1}{n_{k+1}^\gamma}\right) \leqq C\left(1 + \int_1^{n_{k+1}} \frac{dx}{x^\gamma}\right) \leqq \frac{C}{1-\gamma}\, n_{k+1}^{1-\gamma};$$

dabei ist noch, was selbstverständlich geschehen kann, $\gamma < 1$ angenommen; denn ist unser Satz für einen gewissen Wert $\gamma = \gamma_0 > \frac{2}{3}$ bewiesen, so gilt er a fortiori für alle Exponenten $\gamma > \gamma_0$. Da

$$n_{k+1}^{1-\gamma} \leqq (2n_k)^{1-\gamma} < 2 \cdot n_k^{1-\gamma}$$

ist, darf in der Abschätzungsformel (6)

$$H_k = \frac{2C}{1-\gamma} \cdot n_k^{1-\gamma}$$

genommen werden. Geschieht dies, so ist zufolge der Ungleichung (4) die Konvergenz von (7) sichergestellt, falls die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{(1-\gamma)\delta - (2\gamma - 1)}$$

konvergiert. Wird

$$\lambda = (2\gamma - 1) - (1-\gamma)\delta$$

gesetzt, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß

(8) $$\lambda + \gamma > 1$$

ausfällt. Denn aus

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_{k+1}^{\lambda+\gamma}} \leqq \sum_{m=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{m^{\lambda+\gamma}} \leqq \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k^{\lambda+\gamma}},$$

$$n_{k+1} - n_k \leqq n_k^\gamma < n_{k+1} - n_k + 1$$

folgen die Ungleichungen

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\lambda+\gamma}} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^\lambda} \leqq 2^{1+\lambda+\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\lambda+\gamma}}.$$

Die Bedingung (8) läßt sich in der Form schreiben

(9) $$\gamma > \frac{2+\delta}{3+\delta}.$$

Da $\gamma > \frac{2}{3}$ ist, kann stets ein positiver Exponent $\delta \leqq 1$ gefunden werden, für den die Beziehung (9) erfüllt ist, z. B. $\delta = 3\gamma - 2$. Die Zahlenfolge

$$J_1^{(3\gamma-2)},\ J_2^{(3\gamma-2)},\ J_3^{(3\gamma-2)}, \ldots$$

stellt sich demnach als beschränkt heraus, und *daraus folgt nach dem in* § 1 *entwickelten Hilfssatz, daß unter den gegenwärtigen Voraussetzungen*

diejenigen Werte x, für welche die Reihe der Zahlen $F_1(x), F_2(x), \cdots$ nicht beschränkt ist, eine Menge $\mathfrak{M}_0$ vom Maße 0 bilden.

Um nicht nur die Beschränktheit, sondern auch die Existenz des Limes $\underset{n=\infty}{L} F_n(x)$ einzusehen, machen wir Gebrauch von der *Abelschen Transformation**). Wir setzen

$$\bar{c}_n = c_n \cdot n^{\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{2}{3}\right)} = \frac{c_n}{\tau_n}.$$

Alsdann ist

$$|\bar{c}_n| \leq \frac{C}{n^{\bar{\gamma}}},$$

wo $\bar{\gamma} = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2}{3}\right)$ ebenfalls noch größer als $\frac{2}{3}$ ist. Folglich gibt es, wenn wir das soeben gewonnene Resultat statt auf die Reihe mit den Koeffizienten c_n auf

$$\bar{c}_1 \cos x + \bar{c}_2 \cos 2x + \cdots$$

anwenden, eine Menge $\overline{\mathfrak{M}}_0 = \mathfrak{M}$ vom Maße 0 derart, daß, wenn x_0 irgend eine Zahl bedeutet, die $\mathfrak{M}$ nicht angehört, die Zahlen

$$\bar{F}_n(x_0) = \bar{c}_1 \cos x_0 + \bar{c}_2 \cos 2x_0 + \cdots + \bar{c}_n \cos n x_0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

sämtlich absolut unterhalb einer von n unabhängigen endlichen Grenze A bleiben. Die Abelsche Transformation liefert

$$\begin{aligned} F_n(x_0) &= \tau_1 \cdot \bar{c}_1 \cos x_0 + \cdots + \tau_n \cdot \bar{c}_n \cos n x_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (\tau_k - \tau_{k+1}) \bar{F}_k(x_0) + \tau_n \bar{F}_n(x_0). \end{aligned}$$

Da nach Definition

$$\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \cdots, \qquad \underset{n=\infty}{L} \tau_n = 0$$

ist, folgt, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tau_k - \tau_{k+1}) \bar{F}_k(x_0) = f(x_0)$$

absolut konvergiert, und es gilt

$$|F_n(x_0) - f(x_0)| < 2A\tau_n,$$

mithin

$$\underset{n=\infty}{L} F_n(x_0) = f(x_0).$$

Damit ist aber bewiesen, daß die Reihe

(10) $$c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots$$

konvergiert außer für Werte x, die der oben definierten Menge $\mathfrak{M}$ angehören.

---

*) Vgl. Lebesgue, Leç. s. l. sér. trigonom., pag. 38 f.

Aus dem Gang des Beweises läßt sich noch schließen, daß zu einer beliebigen positiven Zahl ε eine im Intervall $0 \cdots 2\pi$ gelegene Menge $\mathfrak{N}_\varepsilon$ angegeben werden kann, deren Maß $2\pi - \varepsilon$ übersteigt und welche von solcher Art ist, daß im Gebiet $\mathfrak{N}_\varepsilon$ die Reihe (10) *gleichmäßig* konvergiert. Daraus folgt offenbar

$$\underset{n=\infty}{L} \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} (f(x) - F_n(x))^2 \, dx = 0.$$

Da aber

$$\int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} (F(x) - F_n(x))^2 \, dx \leqq \frac{\pi C^2}{2\gamma - 1} n^{-(2\gamma - 1)}$$

ist, ergibt sich

$$\int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} (f(x) - F(x))^2 \, dx = 0.$$

Mithin besteht die Gleichung

$$f(x) = F(x)$$

im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ mit Ausnahme einer Menge, die höchstens das Maß ε besitzt. Da aber ε beliebig angenommen werden kann, gilt jene Gleichung überall mit Ausnahme einer Menge in x vom Maße 0. Daraus folgt endlich

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos nx \, dx = c_n.$$

Bezeichnen wir demnach den Wert der Reihe (10) *an den Stellen ihrer Konvergenz mit $f(x)$ und definieren $f(x)$ für die übrigen Werte durch $f(x) = 0$, so sind die $c_1, c_2, \cdots$ die sukzessiven Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x)$* (falls die Integrale im Lebesgueschen Sinne genommen werden).

§ 3.

Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten.

In diesem Paragraphen sollen die Untersuchungen des vorigen dahin verallgemeinert werden, daß an Stelle der Funktion $\cos x$ eine stetige Funktion $\varphi(x)$ von der Periode 2π tritt, für die das Integral

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) \, dx = 0$$

wird. *Wir nehmen dabei an, daß $\varphi(x)$ in eine trigonometrische Reihe entwickelbar sei:*

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned}\varphi(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots,\end{aligned}$$

und zwar so, daß für einen gewissen positiven Exponenten $\delta \leqq 1$ die beiden Summen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^\delta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^\delta$$

konvergent sind. Die Reihe (11), durch welche $\varphi(x)$ dargestellt wird, konvergiert alsdann absolut und gleichmäßig im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Der Einfachheit halber setzen wir noch $\varphi(x)$ als eine gerade Funktion voraus, so daß aus der Entwicklung die sin-Glieder fortfallen.

Wir untersuchen jetzt die Konvergenz der Reihe

$$\text{(12)} \qquad c_1\varphi(1x) + c_2\varphi(2x) + c_3\varphi(3x) + \cdots,$$

in der die Koeffizienten c_n von solcher Art sind, daß eine positive Zahl C und ein Exponent $\gamma > \frac{2+\delta}{3+\delta}$ existieren, so daß für alle n

$$|c_n| \leqq \frac{C}{n^\gamma}$$

wird. Indem wir die Bezeichnungen einführen:

$$F_n(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx,$$

$$\varphi_n(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx,$$

$$G_{m,n}(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k F_n(kx) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_k c_i \cos(kix) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_m(ix)$$

und auf die $F_n(x)$ die im vorigen Paragraphen durchgeführten Überlegungen anwenden, erkennen wir aus dem zweiten der in § 1 bewiesenen Hilfssätze, daß *für jeden Wert x, der einer gewissen Menge $\mathfrak{M}_0$ vom Maße 0 nicht angehört, die doppelt unendliche Folge $G_{m,n}(x)$ $(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$ absolut unterhalb einer (von x abhängigen) endlichen Grenze liegt.* Der Unterschied gegenüber dem § 2 besteht jetzt nur darin, daß der Exponent δ nicht mehr beliebig gewählt werden kann, sondern so beschaffen sein muß, daß $\sum |a_k|^\delta$ konvergiert.

Um aus diesem Resultat die Konvergenz von (12) zu erschließen, machen wir wiederum Gebrauch von der Abelschen Transformation. Wir bestimmen zunächst, was leicht geschehen kann, eine Reihe positiver, abnehmender, gegen 0 konvergierender Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$, so daß für die Zahlen

$$\bar{a}_n = \frac{a_n}{\sigma_n}$$

die unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{a}_k|^\delta$ noch konvergiert*). Ferner setzen wir, analog wie in § 2,

$$\tau_n = n^{\frac{1}{2}\left(\frac{2+\delta}{3+\delta} - \gamma\right)},$$

$$\bar{c}_n = \frac{c_n}{\tau_n}.$$

Mit Bezug auf die Zahlen

$$\bar{G}_{m,n}(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_k \bar{c}_i \cos(kix)$$

gilt dann der Satz, daß diejenigen Werte x, für welche unter den Zahlen $\bar{G}_{m,n}(x)$ $(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$ beliebig große vorkommen, wiederum nur eine Menge $\mathfrak{M}$ vom Maße 0 bilden. Ist x_0 ein bestimmter Wert, der $\mathfrak{M}$ nicht angehört, so gibt es also eine Zahl A, so daß für alle m und n

$$|\bar{G}_{m,n}(x_0)| < A$$

ist. Doppelte Anwendung der Abelschen Transformation liefert

$$G_{m,n}(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} [\sigma_k \cdot \tau_i \cdot \bar{a}_k \bar{c}_i \cos(kix_0)]$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma_k - \sigma_{k+1})(\tau_i - \tau_{i+1}) \bar{G}_{k,i}(x_0)$$

$$+ \sigma_m \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_i - \tau_{i+1}) \bar{G}_{m,i}(x_0) + \tau_n \sum_{k=1}^{m-1} (\sigma_k - \sigma_{k+1}) \bar{G}_{k,n}(x_0)$$

$$+ \sigma_m \tau_n \bar{G}_{m,n}(x_0).$$

---

*) Bedeutet A die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^\delta$$

und setzt man

$$r_0 = 1, \quad r_n = 1 - \frac{1}{\mathsf{A}} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^\delta \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

so sind die obigen Bedingungen erfüllt, wenn man

$$\sigma_n = \left(\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

wählt, da dann offenbar

$$|\bar{a}_n|^\delta = \mathsf{A}\left[\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}\right]$$

und folglich

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{a}_k|^\delta = \mathsf{A}$$

wird. Auch ist

$$\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \sigma_3 \geqq \cdots \quad \text{und} \quad \underset{n=\infty}{L} \sigma_n = 0.$$

Bezeichnet man den Wert der absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{\substack{k=1,2,\dots \\ i=1,2,\dots}} (\sigma_k - \sigma_{k+1})(\tau_i - \tau_{i+1})\,\overline{G}_{k,i}(x_0)$$

mit $g(x_0)$, so folgt hieraus

$$|G_{m,n}(x_0) - g(x_0)| < 2A(\sigma_1\tau_n + \sigma_m\tau_1 - \sigma_m\tau_n),$$

mithin

$$\underset{\substack{m=\infty \\ n=\infty}}{L}\, G_{m,n}(x_0) = g(x_0).$$

Da aber

$$\underset{m=\infty}{L}\, G_{m,n}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\varphi(ix_0)$$

existiert, ergibt sich hieraus insbesondere

$$c_1\varphi(1\cdot x_0) + c_2\varphi(2\cdot x_0) + \cdots = \underset{n=\infty}{L}\ \underset{m=\infty}{L}\, G_{m,n}(x_0) = g(x_0).$$

Das Resultat fassen wir in den folgenden Satz zusammen:

Theorem. *Ist $\varphi(x)$ eine stetige Funktion von der Periode 2π, welche in eine Fourierreihe ohne konstantes Glied*

$$\varphi(x) = a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots$$

entwickelt werden kann, deren Koeffizienten von solcher Art sind, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^\delta, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^\delta$$

für einen Exponenten $\delta > 0$ und $\leqq 1$ konvergieren, so konvergiert eine Reihe

$$c_1\varphi(1\cdot x) + c_2\varphi(2\cdot x) + c_3\varphi(3\cdot x) + \cdots$$

für alle Werte x mit Ausnahme solcher, die einer gewissen Menge $\mathfrak{M}$ vom Maße 0 angehören, falls es eine Zahl $\gamma > \frac{2+\delta}{3+\delta}$ gibt, so daß $c_n \cdot n^\gamma$ für alle n absolut unterhalb einer endlichen Grenze liegt.

Wir erwähnen einige spezielle Fälle. Ist $\varphi(x)$ eine Funktion von der Periode 2π, für welche $\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx = 0$ ist, und

1) $\varphi(x)$ in eine absolut konvergente Fourierreihe entwickelbar, so ist die Bedingung unseres Theorems für $\delta = 1$ erfüllt, und demnach genügt zur Konvergenz der Reihe (12) die Voraussetzung $|c_n| \leqq \frac{C}{n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$;

2) $\varphi(x)$ ν-mal stetig differenzierbar ($\nu \geq 1$), so ist $\varphi(x)$ sicherlich in eine Fouriersche Reihe ohne konstantes Glied (deren Koeffizienten wieder a_n, b_n heißen mögen) entwickelbar, und es konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^\nu a_k)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k^\nu b_k)^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}\right)^2 dx.$$

Daraus schließen wir, daß auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\frac{2}{1+2\nu}+\varepsilon} \qquad \text{(für beliebiges } \varepsilon > 0)$$

konvergiert. Scheiden wir nämlich die Indizes k in zwei Klassen k', k'', so daß allgemein

$$|a_{k'}|^{\frac{2}{1+2\nu}} \leq \frac{1}{k'}, \quad \text{hingegen} \quad |a_{k''}|^{\frac{2}{1+2\nu}} > \frac{1}{k''}$$

wird, so ist

$$\sum_{(k')} |a_{k'}|^{\frac{2}{1+2\nu}+\varepsilon} \leq \sum_{(k')} \left(\frac{1}{k'}\right)^{1+\frac{(1+2\nu)\varepsilon}{2}}$$

konvergent, aber auch

$$\sum_{(k'')} |a_{k''}|^{\frac{2}{1+2\nu}+\varepsilon} = \sum_{(k'')} |a_{k''}|^{\varepsilon} \cdot |a_{k''}|^{2\left(1-\frac{2\nu}{1+2\nu}\right)} \leq \sum_{(k'')} |a_{k''}|^{\varepsilon} \{a_{k''}(k'')^\nu\}^2.$$

Zur Konvergenz von (12) ist im gegenwärtigen Fall hinreichend, daß

$$|c_n| \leq \frac{C}{n^{\gamma_\nu+\varepsilon}} \text{ wird, wo } \gamma_\nu = \frac{2+\frac{4^*}{2\nu}}{3+\frac{5}{2\nu}}, \ \varepsilon > 0 \text{ ist; z. B.}$$

$$\gamma_1 = \frac{8}{11} = 0{,}727\cdots; \quad \gamma_2 = \frac{12}{17} = 0{,}705\cdots; \quad \gamma_3 = \frac{16}{23} = 0{,}695\cdots; \quad \text{usw.}$$

Weiß man, daß der ν^{te} Differentialquotient nicht nur stetig, sondern auch von beschränkter Schwankung ist, so erschließt man leicht die Ungleichung

$$|a_n| \leq \frac{A_0}{n^{\nu+1}},$$

in der A_0 nicht von n abhängt. Die Konvergenzbedingung lautet

$$|c_n| \leq \frac{C}{n^{\gamma'_\nu+\varepsilon}} \ (\varepsilon > 0),$$

wo

$$\gamma_\nu^* = \frac{2 + \frac{1}{\nu+1}}{3 + \frac{1}{\nu+1}}$$

ist, z. B.

$$\gamma_1^* = \frac{5}{7} = 0{,}714\cdots; \quad \gamma_2^* = \frac{7}{10} = 0{,}700\cdots; \quad \text{usw.};$$

3) $\varphi(x)$ beliebig oft differenzierbar, so genügt zur Konvergenz der Reihe (12), daß $|c_n| \leqq \frac{C}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$ ist. In diesem letzten Fall erhalten wir also dasselbe Kriterium, das wir in § 2 für $\varphi(x) = \cos x$ abgeleitet hatten.

Über stetige Funktionen.

Von

G. Faber in Karlsruhe.

Die folgenden Untersuchungen scheinen mir die tiefe Kluft, die zwischen den differenzierbaren und den bloß stetigen Funktionen besteht, in deutlicherer Weise, als es bisher der Fall war, zu erhellen, und damit zugleich einen besseren Einblick in die infinitesimale Struktur der stetigen Funktionen zu ermöglichen. Gleichzeitig ergibt sich die Möglichkeit, durch Superposition gebrochener Linienzüge Beispiele stetiger Funktionen zu konstruieren, welche besondere Eigenschaften, z. B. die Nichtdifferenzierbarkeit*) bis zu einem gewissen Grade geometrisch anschaulich werden lassen, im Gegensatz zu den in Lehrbüchern und Vorlesungen üblichen, z. B. der Weierstraßschem Cos-Funktion, wo die Nichtdifferenzierbarkeit eines fertigen analytischen Ausdruckes nachträglich bewiesen wird.

§ 1.

Bestimmung einer stetigen Funktion durch eine abzählbare Menge von Daten.

Es handelt sich nur um Funktionen einer *reellen* Veränderlichen x; als Intervall J für die Veränderliche wähle ich immer die Strecke $(0, 1)$; will man statt dessen x unbeschränkt variieren lassen, so braucht man nur $f(0) = f(1)$ anzunehmen — diese Möglichkeit bleibt immer offen — und der Funktion $f(x)$ die Periode 1 beizulegen.

---

*) Ein besonders einfaches derartiges Beispiel habe ich, losgelöst von den Zielen allgemeinerer Art der vorliegenden Arbeit, kürzlich im Jahresbericht d. D. Mathematiker-Vereinigung mitgeteilt (Bd. 16 (1907), p. 538), nachdem Herr H. v. Koch eine andre, weniger einfache und allgemeine, geometrische Erzeugungsmethode für stetige nichtdifferenzierbare Funktionen (Acta Math. Bd. 30 (1906), p. 145—174) veröffentlicht hatte.

Denkt man sich die bekannte Stetigkeitsbedingung, wonach bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für jedes x in J und genügend kleine $|h|$

(1) $$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

sein muß, in einzelne Bedingungen aufgelöst, deren jede nur *ein* x und *ein* h enthält, so gelangt man offenbar zu einer Menge von Bedingungen, welche die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Andrerseits ist es eine längst bekannte und vielfach benutzte Tatsache, daß eine stetige Funktion durch geeignet gewählte Daten in *abzählbarer* Menge vollständig bestimmt ist, z. B. durch die Werte $f(x_i)$, die sie an irgend einer abzählbaren überall dichten Menge M von Stellen $x_1, x_2, x_3, \cdots$ annimmt. Um im folgenden mit ganz bestimmten Vorstellungen zu operieren, wähle ich als Menge M stets jene der Zahlen von J mit endlicher dyadischer Entwicklung; d. h. es hat jede der Zahlen x_i von M die Form $\frac{k}{2^n}$ (wo n und $k \leqq 2^n$ beliebige ganze Zahlen sind). Es ist nun zu erwarten, daß man einen um so besseren Einblick in die Struktur der stetigen Funktionen gewinnen wird, je mehr es gelingt, dieselben durch möglichst übersichtliche und möglichst voneinander unabhängige, also jedenfalls abzählbare Daten zu charakterisieren. Die vorhin erwähnten Funktionswerte $f(x_i)$ eignen sich wegen der vielen Beziehungen, die gerade wegen der Stetigkeit noch zwischen ihnen bestehen, nicht zu dieser Charakterisierung, wenigstens nicht ohne weiteres. Ich wähle an ihrer Stelle andere Zahlen δ, aus denen man die $f(x_i)$ in umkehrbar eindeutiger Weise berechnen kann, so daß also diese neue Wahl schließlich nur auf eine andere *Anordnung* der $f(x_i)$ hinausläuft; aber gerade in dieser Anordnung scheint mir der Vorteil eines bessern Einblicks in die infinitesimale Struktur zu liegen. Freilich bleibt mein Ansatz noch weit davon entfernt, *zugleich notwendige und hinreichende voneinander unabhängige Bedingungen in abzählbarer Menge für die Stetigkeit einer Funktion aufzustellen* (auf diese Problemstellung bin ich durch eine gelegentliche Bemerkung des Herrn Pincherle aufmerksam gemacht worden). Es ist sogar denkbar, daß dieses Problem überhaupt nie völlig gelöst werden kann, wie es z. B. auch vielleicht nie gelingen wird, ein System völlig voneinander unabhängiger Axiome für den Aufbau der Geometrie zu finden.

Ich nehme (was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen kann) $f(0) = 0$ an und definiere die Zahlen δ durch folgende Gleichungen (vgl. Fig. 1):

$$\delta_0 = f(1),$$

$$\delta_{\frac{1}{2}} = f\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{f(0)+f(1)}{2},$$

$$\delta_{\frac{1}{4}} = f\left(\tfrac{1}{4}\right) - \frac{f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)}{2},$$

$$\delta_{\frac{3}{4}} = f\left(\tfrac{3}{4}\right) - \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)}{2},$$

$$(2)\qquad \delta_{\frac{1}{8}} = f\left(\tfrac{1}{8}\right) - \frac{f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)}{2},$$

$$\delta_{\frac{3}{8}} = f\left(\tfrac{3}{8}\right) - \frac{f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)}{2},$$

$$\delta_{\frac{5}{8}} = f\left(\tfrac{5}{8}\right) - \frac{f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)}{2},$$

$$\delta_{\frac{7}{8}} = f\left(\tfrac{7}{8}\right) - \frac{f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)}{2},$$

. . . .

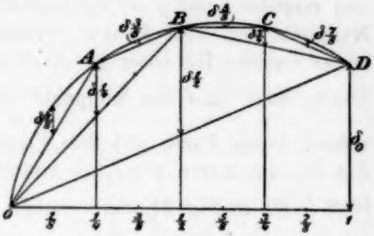


Fig. 1.

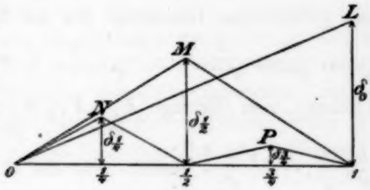


Fig. 2.

Allgemein ist $\delta_{\frac{2m+1}{2^n}}$ (wobei m und n ganze Zahlen sind und $2m+1 < 2^n$ ist) der Unterschied zwischen dem Funktionswert $f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)$ und dem arithmetischen Mittel $\frac{f\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right)+f\left(\frac{m+1}{2^{n-1}}\right)}{2}$:

$$(3)\qquad \delta_{\frac{2m+1}{2^n}} = f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right) - \frac{f\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right)+f\left(\frac{m+1}{2^{n-1}}\right)}{2}.$$

Durch Auflösung der Gleichungen (2) kann man die Funktionswerte $f(x_i)$ (unter x_i immer eine dyadisch rationale Zahl verstanden) durch die δ ausdrücken; man kann dies zunächst in *rekurrenter* Weise tun, indem man aus der ersten dieser Gleichungen den Funktionswert $f(1) = \delta_0$ entnimmt und dann mit Berücksichtigung von $f(0) = 0$ aus der zweiten und dritten der Gleichungen (2) die Funktionswerte $f\left(\frac{1}{4}\right)$ und $f\left(\frac{3}{4}\right)$ durch die δ ausdrückt, sodann mittels der nächsten vier Gleichungen $f\left(\frac{1}{8}\right)$, $f\left(\frac{3}{8}\right)$, $f\left(\frac{5}{8}\right)$, $f\left(\frac{7}{8}\right)$ usw.

Um zu einer *independenten* Darstellung der $f(x_i)$ zu gelangen, denke ich mir im Punkte 0 senkrecht zur Strecke (0, 1) eine Y-Achse errichtet und verstehe unter $y = f_0(x)$ (vgl. Fig. 2: $0L$) das Geradenstück, das den Nullpunkt mit dem Punkte verbindet, dessen Koordinaten $1 \mid \delta_0$ sind; ferner verstehe ich unter $y = f_1(x)$ den gebrochenen Linienzug, den man erhält, wenn man den Nullpunkt mit dem Punkte $x = \frac{1}{2}$, $y = \delta_{\frac{1}{2}}$ und sodann diesen Punkt mit dem Punkte $x = 1$, $y = 0$ verbindet ($0M1$ in Fig. 2); die Kurve $y = f_2(x)$ besteht aus dem gebrochenen Linienzuge $\left(0N\frac{1}{2}P1\right.$ in Fig. $\left.2\right)$, der entsteht, wenn man immer zwei aufeinanderfolgende der folgenden durch ihre Koordinaten gegebenen Punkte verbindet: $0 \mid 0$; $\frac{1}{4} \Big| \delta_{\frac{1}{4}}$; $\frac{1}{2} \Big| 0$; $\frac{3}{4} \Big| \delta_{\frac{3}{4}}$; $1 \mid 0$; allgemein ist die Kurve $y = f_n(x)$ ein gebrochener Linienzug, der die Strecke (0, 1) in den Punkten $x = 0$, $\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{2}{2^{n-1}}, \frac{3}{2^{n-1}}, \cdots, \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$, 1 schneidet und Maxima oder Minima (Ecken) vom Betrage $\delta_{\frac{1}{2^n}}, \delta_{\frac{3}{2^n}}, \delta_{\frac{5}{2^n}}, \cdots, \delta_{\frac{2^n-1}{2^n}}$ in den Punkten $x = \frac{1}{2^n}$, $\frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}$ besitzt. Für die 2^{n-1} Zahlen $\delta_{\frac{1}{2^n}}, \delta_{\frac{3}{2^n}}, \cdots, \delta_{\frac{2^n-1}{2^n}}$ führe ich im folgenden überall da, wo es nicht darauf ankommt, genauer anzugeben, welche dieser Zahlen gemeint ist, die gemeinsame Abkürzung δ_n ein; die größte der Zahlen $|\delta_n|$ bezeichne ich mit $\bar{\delta}_n$, die kleinste mit $\underline{\delta}_n$. (In den Anwendungen des zweiten Paragraphen wird mehrfach große Einfachheit erreicht durch die Annahme, daß alle 2^{n-1} Zahlen δ_n einander gleich sind.)

Ich behaupte nun: *Es ist für jede Zahl x_i von M*

$$f(x_i) = \sum_0^\infty f_\nu(x_i)\text{*)}. \tag{4}$$

Die auf der rechten Seite von (4) stehende Reihe bricht ab, da für $x_i = \frac{2m+1}{2^n}$ und für $\nu > n$: $f_\nu(x_i) = 0$ ist. Nun ergibt sich jedenfalls durch Auflösung der *linearen* Gleichungen (2):

---

*) Die nachher mehrfach benutzten Annäherungskurven $y = \sum_0^n f_\nu(x)$ sind offenbar nichts anderes als der Kurve $y = f(x)$ einbeschriebene gebrochene Linienzüge mit Ecken auf $y = f(x)$ in den Punkten $x = \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \cdots$ (s. Fig. 1, wo $0BD$ die Kurve $y = f_0(x) + f_1(x)$, $0ABCD$ die Kurve $y = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)$ darstellt).

$$f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right) = \alpha_0\delta_0 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \cdots + \alpha_n\delta_n, \tag{5}$$

wo z. B. $\delta_2 = \delta_{\frac{1}{4}}$ oder $\delta_2 = \delta_{\frac{3}{4}}$ sein kann, je nachdem nämlich $\frac{2m+1}{2^n}$ im Intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ oder im Intervalle $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ liegt usw., und wo die α von den δ *unabhängige* Zahlenkoeffizienten sind. Man wird also α_0 am einfachsten berechnen, wenn man $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = \delta_{n+1} = \cdots = 0$ setzt; dann aber besagen die Gleichungen (2), daß die Kurve $y = f(x)$ geradlinig vom Nullpunkte bis zum Punkte mit den Koordinaten $1 \mid \delta_0$ verläuft, kurz mit $y = f_0(x)$ zusammenfällt, daher ist $\alpha_0\delta_0 = f_0(x_i)$; genau so findet man, wenn man sich für einen Moment $\delta_0 = \delta_2 = \delta_3 = \cdots = 0$ gesetzt denkt: $\alpha_1\delta_1 = f_1(x_i)$ und in derselben Weise $\alpha_2\delta_2 = f_2(x_i)$ usw., endlich durch Addition Gleichung (4) (nebenbei sieht man so noch, daß die α positiv und $\leqq 1$ sind). Auf diese Weise ist in geometrischem Gewande eine independente Darstellung der Funktionswerte $f(x_i)$ gefunden.

Ehe ich untersuche, welchen Bedingungen die δ unterliegen, damit die zugehörigen Werte $f(x_i)$ einer stetigen Funktion angehören, nehme ich umgekehrt an, es sei eine stetige Funktion $f(x)$ gegeben, denke mir die zugehörigen Zahlen δ und Funktionen $f_\nu(x)$ gebildet und behaupte:

Die Reihe $\sum\limits_0^\infty f_\nu(x)$ konvergiert gleichmäßig für alle x des Intervalls J und hat $f(x)$ zur Grenze.

Wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $f(x)$ gibt es nämlich eine Zahl n' der Art, daß für jedes x in J:

$$|f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

ist, sobald $|h| \leqq \frac{1}{2^n}$ und $n \geqq n'$ ist. Ist nun $x_i = \frac{m}{2^n}$ und $x_k = \frac{m+1}{2^n}$ und $x_i \leqq x < x_k$, so ist nach (6):

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - f(x_i) < +\frac{\varepsilon}{2}, \tag{7}$$

und da der der Kurve $y = f(x)$ einbeschriebene polygonale Zug $y = \sum\limits_0^n f_\nu(x)$ zwischen x_i und x_k keine Ecke hat, also monoton zu- oder abnimmt, ist

$$\left|\sum_0^n f_\nu(x_i) - \sum_0^n f_\nu(x)\right| \leqq \left|\sum_0^n f_\nu(x_i) - \sum_0^n f_\nu(x_k)\right|; \tag{8}$$

die rechte Seite dieser Ungleichung ist aber identisch mit $|f(x_i) - f(x_k)|$ also $< \frac{\varepsilon}{2}$, so daß (8) besagt:

$$(9) \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < f(x_i) - \sum_0^n f_\nu(x) < +\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Durch Addition von (7) und (9) findet man schließlich

$$(10) \qquad -\varepsilon < f(x) - \sum_0^n f_\nu(x) < +\varepsilon$$

für $n \geqq n'$ und alle x in J, w. z. b. w.

Nunmehr denke ich mir umgekehrt die Zahlen δ gegeben und frage nach den Bedingungen, denen sie unterliegen, damit die aus ihnen durch Auflösung der Gleichungen (2) gebildeten Funktionswerte $f(x_i)$ einer stetigen Funktion angehören; da die Funktionen $f_\nu(x)$ stetig sind, ist dazu die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_0^\infty f_\nu(x)$ *hinreichend* und nach dem soeben Bewiesenen auch *notwendig;* da ferner $|f_\nu(x)| \leqq \bar{\delta}_\nu$ bleibt, ist dieselbe immer gesichert, wenn $\sum_0^\infty \bar{\delta}_\nu$ konvergiert. Von dieser hinreichenden, nicht notwendigen Bedingung wird im nächsten Paragraphen ausschließlich Gebrauch gemacht. Sind stets die 2^{n-1} Zahlen δ_n einander gleich und gleich $\bar{\delta}_n$, so ist diese hinreichende Bedingung auch notwendig*); denn für $x = \frac{1}{3}$ z. B. ist dann $f_0(x) = \frac{\delta_0}{3}$, $f_1(x) = \frac{2\bar{\delta}_1}{3}$, $f_2(x) = \frac{2\bar{\delta}_2}{3}, \cdots$, also $f(x) = \frac{\delta_0}{3} + \sum_1^\infty \frac{2\bar{\delta}_\nu}{3}$; daraus ergibt sich auch, daß die offenbar stets notwendige Bedingung $\lim\limits_{\nu=\infty} \bar{\delta}_\nu = 0$ nicht hinreichend ist.

Soll an *jeder* Stelle ein endlicher *Differentialquotient* existieren, so müssen auch die *Differenzenquotienten*

$$\frac{f\left(\frac{2m+2}{2^n}\right) - f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)}{2^{-n}} \quad \text{und} \quad \frac{f\left(\frac{2m}{2^n}\right) - f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)}{2^{-n}},$$

also auch ihre Summe, die $= -2^{n-1}\delta_n$ ist (siehe (3)), und daher schließlich auch $2^n\bar{\delta}_n$ unter einer endlichen Schranke bleiben. Ist dagegen $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, 2^\nu \underline{\delta}_\nu = \infty$, so gibt es in jedem noch so kleinen Intervall Stellen x und $x+h$, für welche $\overline{\lim\limits_{h=\infty}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \infty$ wird, so daß also die Stellen, an denen kein endlicher Differentialquotient existiert, überall dicht liegen.

---

*) Allgemeiner: wenn alle δ_n ($n > n'$) positiv sind, und wenn der Quotient irgend zweier δ_n mit gleichem Index n unter einer endlichen Schranke bleibt.

Was die *Rektifikation* anlangt, so ist für diese bekanntlich notwendig und hinreichend, daß sich $f(x)$ als Differenz zweier monoton zunehmender, endlich bleibender Funktionen $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ darstellen läßt:

(11) $$f(x) = f^{(1)}(x) - f^{(2)}(x).$$

Jede der Funktionen $f_\nu(x)$ läßt sich in solcher Weise zerlegen:

(12) $$f_\nu(x) = f_\nu^{(1)}(x) - f_\nu^{(2)}(x),$$

wobei sowohl $|f_\nu^{(1)}(x)|$ als $|f_\nu^{(2)}(x)|$ unterhalb der Summe sämtlicher $2^{\nu-1}$ Zahlen $|\delta_\nu|$ bleibt. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihen $\sum\limits_0^\infty f_\nu^{(1)}(x)$ und $\sum\limits_0^\infty f_\nu^{(2)}(x)$ und damit die Existenz der endlichen, monoton zunehmenden Funktionen $f^{(1)}(x)$ und $f^{(2)}(x)$ ist daher jedenfalls gesichert, wenn die Summe der absoluten Beträge sämtlicher Zahlen $\delta_{\frac{2m+1}{2^n}}$ $(2m+1<2^n,\ n=0,1,2,\cdots)$ konvergiert.

Zusammenfassend ergibt sich also folgendes:

Während die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_0^\infty \bar{\delta}_\nu$ *eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für die Stetigkeit ist, ist die Bedingung, daß* $2^\nu \bar{\delta}_\nu$ *unter einer endlichen Schranke bleibt, für die unbeschränkte Differenzierbarkeit notwendig, aber nicht hinreichend. Die Bedingung* $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, 2^\nu \underline{\delta}_\nu = \infty$ *dagegen ist hinreichend dafür, daß in jedem Intervall Stellen ohne endlichen Differentialquotienten existieren. Die absolute Konvergenz der Reihe sämtlicher* δ *ist hinreichend für die Rektifizierbarkeit.*

Ferner: *Die Konvergenz von* $\sum\limits_0^\infty 2^\nu |\bar{\delta}_\nu|$ *ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß an jeder Stelle ein endlicher vorderer und hinterer Differentialquotient existieren, die nur an den Stellen von* M *voneinander verschieden ausfallen können.*

Es ist nämlich, wie ein Blick auf die Kurve $y = f_\nu(x)$ lehrt, für jeden Wert von h:

(13) $$|f_\nu(x+h) - f_\nu(x)| : |h| \leqq \bar{\delta}_\nu : \frac{1}{2^\nu}$$

oder

(14) $$\left|\frac{f_\nu(x+h) - f_\nu(x)}{h}\right| \leqq 2^\nu \bar{\delta}_\nu.$$

Gehört nun x nicht der Menge M an und ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so ist die Existenz einer Zahl $h' > 0$ nachzuweisen, von der Art, daß für $|h_1| < h'$ und für $|h_2| < h'$:

$$\left|\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}-\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}\right|<\varepsilon \tag{15}$$

ausfällt. Man wähle zu diesem Zwecke n so groß, daß

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}' 2^{\nu}\bar{\delta}_{\nu}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

ist und h' gleich dem kleineren der beiden absoluten Beträge der Differenzen zwischen x und der nächst größeren sowie der nächst kleineren Zahl von der Form $\frac{k}{2^n}\cdot$ Dann ist (15) erfüllt. Denn

$$\left|\sum_{0}^{\infty}{}'\frac{f_\nu(x+h_1)-f_\nu(x)}{h_1}-\sum_{0}^{\infty}{}'\frac{f_\nu(x+h_2)-f_\nu(x)}{h_2}\right| \tag{17}$$

$$<\left|\sum_{0}^{n}{}'\frac{f_\nu(x+h_1)-f_\nu(x)}{h_1}-\sum_{0}^{n}{}'\frac{f_\nu(x+h_2)-f_\nu(x)}{h_2}\right|$$

$$+\sum_{n+1}^{\infty}{}'\left|\frac{f_\nu(x+h_1)-f_\nu(x)}{h_1}\right|+\sum_{n+1}^{\infty}{}'\left|\frac{f_\nu(x+h_2)-f_\nu(x)}{h_2}\right|.$$

Da die Kurve $y=\sum_{0}^{n}{}' f_\nu(x)$ zwischen $x-h'$ und $x+h'$ geradlinig verläuft, ist der erste Summand auf der rechten Seite von (17) gleich Null. Die Summe der beiden andern ist nach (14), (16) $<\varepsilon$.

Ist x eine Zahl der Menge M, so ist die linke und rechte Nachbarschaft der Stelle x gesondert zu betrachten, sonst bleibt der Beweis der gleiche.

§ 2.

Differentiation und Rektifikation.

Ich beweise zunächst den folgenden Satz:

Es sei $\varphi(h)$ für alle reellen h (in der Umgebung der Null) definiert und

$$\lim_{h=0}\varphi(h)=0, \tag{18}$$

ferner habe $\varphi(h)$ das Vorzeichen von h); dann existieren durchweg endliche und stetige Funktionen $f(x)$, für welche an jeder Stelle:*

*) Diese Voraussetzung wird offenbar nur gemacht, um die Analogie zwischen den Quotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ und $\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}$ möglichst weit zu treiben; weiteren Einschränkungen unterliegt $\varphi(h)$ nicht; doch wird man natürlich sich unter $\varphi(h)$ Funktionen vorstellen, die langsamer als h der Null zustreben; sonst ist die Aussage des Satzes trivial.

$$(19)\qquad \overline{\lim_{h=0}}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}=+\infty,\qquad \underline{\lim_{h=0}}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}=-\infty$$

ist.

Dieser Satz scheint mir auch insofern von Interesse, als er zeigt, daß es stetige Funktionen gibt, die „in geringerem Maße stetig" sind als irgend eine vorgelegte stetige Funktion. Man kann nämlich, um den soeben gebrauchten Ausdruck zu präzisieren, ähnlich wie die Konvergenz von Reihen, die Stetigkeit von Funktionen in gewissen Fällen vergleichen, wenn man zu einer stetigen Funktion $f(x)$ eine Maßfunktion $\psi(x, h)$ der Stetigkeit an der Stelle x einführt, die als Maximalwert der Differenzen $|f(x+h'-f(x)|$ für ein bestimmtes x und alle $|h'|\leqq h$ definiert ist. Ferner kann man eine Maßfunktion $\psi(h)$ für die Stetigkeit von $f(x)$ in einem Intervall J definieren als Maximum der Werte $\psi(x, h)$, falls h festgehalten wird und x in J variiert. $\psi(x,h)$ und $\psi(h)$ sind, wie leicht zu sehen, stetige Funktionen ihrer Argumente. Von zwei stetigen Funktionen $f(x)$ und $f_1(x)$ heißt dann die erste an der Stelle x bezw. im Intervalle J in geringerem Maße stetig als die zweite, wenn die zugehörigen Maßfunktionen die Relation

$$(20)\qquad \lim_{h=0}\frac{\psi(x,h)}{\psi_1(x,h)}=\infty \quad\text{bezw.}\quad \lim_{h=0}\frac{\psi(h)}{\psi_1(h)}=\infty$$

erfüllen.

Die Richtigkeit des obigen Satzes wird durch Konstruktion passender Beispiele bewiesen, etwa folgendermaßen:

Ich stelle $f(x)$ dar als Summe $\sum_1^\infty f_{n_\nu}(x)$, (die Funktionen $f_i(x)$, deren Index i nicht eine der alsbald zu bestimmenden Zahlen $n_1, n_2, n_3, \cdots$ ist, sind $\equiv 0$). Bei $f_{n_\nu}(x)$ sind sämtliche Zahlen δ_{n_ν} einander gleich und positiv; um unnötige Buchstaben zu vermeiden, wähle ich $\delta_{n_\nu}=\frac{1}{\nu!}$; ist dann die der Bedingung (18) genügende Funktion $\varphi(h)$ gegeben, so lassen sich die Zahlen n_ν immer noch so bestimmen, daß das Bestehen von (19) gewährleistet wird.

Vorerst bestimme man eine Folge wachsender ganzer Zahlen $m_1, m_2, \cdots$ so, daß für

$$|h|<\frac{2}{2^{m_\nu}}$$

$$(21)\qquad |\varphi(h)|<\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2$$

wird. n_ν wird dann jedenfalls $> m_\nu$ gewählt.

In der Reihe $\sum_1^\infty f_{n_\nu}(x)$ für $f(x)$ betrachte ich zunächst einen Summanden $f_{n_k}(x)$ an irgend einer Stelle x und unterscheide zwei Fälle:

$$1)\quad 0 \leqq f_{n_k}(x) \leqq \frac{1}{2\cdot k!},$$

$$2)\quad \frac{1}{2\cdot k!} \leqq f_{n_k}(x) \leqq \frac{1}{k!}.$$

Unter x_{1k} und x_{2k} verstehe ich in beiden Fällen Zahlen, von denen die erste $> x$, die zweite $< x$ ist, und zwar soll im ersten Fall

$$f(x_{1k}) = f(x_{2k}) = \frac{1}{k!}, \tag{22}$$

im zweiten Fall

$$f(x_{1k}) = f(x_{2k}) = 0 \tag{23}$$

sein, und es sollen x_{1k} und x_{2k} jedesmal die der Zahl x zunächst gelegenen Zahlen mit diesen Eigenschaften sein. (Die Existenz der beiden Zahlen x_{1k} und x_{2k} ist wenigstens für hinreichend große Werte von k offenbar.)

Es ist dann für $\lambda = 1$ sowohl als für $\lambda = 2$:

$$|x_{\lambda k} - x| < \frac{2}{2^{n_k}}, \tag{24}$$

$$|f_{n_k}(x_{\lambda k}) - f_{n_k}(x)| \geqq \frac{1}{2\cdot k!}, \tag{25}$$

$$\varphi(x_{\lambda k} - x) < \left(\frac{1}{k!}\right)^2, \tag{26}$$

(vgl. (21)), also durch Division von (24), (25):

$$\left|\frac{f_{n_k}(x_{\lambda k}) - f_{n_k}(x)}{\varphi(x_{\lambda k} - x)}\right| > \frac{k!}{2}. \tag{27}$$

Was das Vorzeichen dieses Quotienten (27) betrifft, so ist es für $\lambda = 1$ entgegengesetzt dem für $\lambda = 2$, denn der Zähler ist beidesmal der gleiche, der Nenner für $\lambda = 1$ positiv, für $\lambda = 2$ negativ.

Um nun nachzuweisen, daß die Ungleichung (27) bis auf den Nenner 2 der rechten Seite, der durch einen größeren*) zu ersetzen ist, gültig bleibt, wenn man auf der linken Seite f statt f_{n_k} schreibt, genügt es zu zeigen, daß in der Differenz

$$f(x_{\lambda k}) - f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(f_{n_\nu}(x_{\lambda k}) - f_{n_\nu}(x)\right)$$

das Glied $f_{n_k}(x_{\lambda k}) - f_{n_k}(x)$ dem absoluten Betrage nach die Summe aller andern Glieder überwiegt (wenigstens für $k > 16$) und so sowohl dem Betrage als dem Vorzeichen nach den Ausschlag gibt.

---

*) Ich wähle als solchen 4 bei dem folgenden Beweise; statt dessen könnte gerade so gut irgend eine andre Zahl > 2 gewählt werden.

Es ist

$$(28)\qquad \sum_{k+1}^{\infty}\nu \left(f_{n_\nu}(x_{\lambda k}) - f_{n_\nu}(x)\right) < \sum_{k+1}^{\infty}\nu \left(|f_{n_\nu}(x_{\lambda k})| + |f_{n_\nu}(x)|\right) < 2\sum_{k+1}^{\infty}\nu \frac{1}{\nu!}$$

$$< \frac{2}{k\cdot k!} < \frac{1}{8k!} \quad \text{für} \quad k > 16.$$

Es ist ferner, wie schon in (13), (14) bemerkt, und wie ein Blick auf den Linienzug $y = f_{n_\nu}(x)$ lehrt, für irgend zwei Stellen x und x':

$$(29)\qquad |f_{n_\nu}(x') - f_{n_\nu}(x)| : |x' - x| \leqq \frac{1}{\nu!} : \frac{1}{2^{n_\nu}}$$

oder

$$(30)\qquad |f_{n_\nu}(x') - f_{n_\nu}(x)| \leqq \frac{|x' - x| \cdot 2^{n_\nu}}{\nu!}$$

(das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn die Punkte mit den Koordinaten $x'|f_{n_\nu}(x')$ und $x|\ f_{n_\nu}(x)$ auf der gleichen geradlinigen Strecke der gebrochenen Linie $y = f_{n_\nu}(x)$ liegen). Daher ist

$$(31)\qquad \begin{aligned} \left|\sum_{1}^{k-1}\nu \left(f_{n_\nu}(x_{\lambda k}) - f_{n_\nu}(x)\right)\right| &\leqq \sum_{1}^{k-1}\nu \frac{|x_{\lambda k} - x|\, 2^{n_\nu}}{\nu!} \\ &< \frac{2}{2^{n_k}} \sum_{1}^{n-1}\nu \frac{2^{n_\nu}}{\nu!} \quad \text{nach (24)} \\ &< \frac{2}{2^{n_k - n_{k-1}}} \sum_{1}^{k-1}\nu \frac{1}{\nu!} < \frac{e-1}{2^{n_k - n_{k-1}}} \\ &< \frac{4}{2^{n_k - n_{k-1}}}. \end{aligned}$$

Man unterwerfe nun die n_ν außer der Bedingung $n_\nu \geqq m_\nu$ noch der weiteren:

$$(32)\qquad \frac{4}{2^{n_\nu - n_{\nu-1}}} < \frac{1}{8\cdot\nu!}$$

oder

$$n_\nu - n_{\nu-1} > 5 + {}^2\log \nu!\,;$$

beiden Bedingungen ist z. B. immer genügt durch

$$n_\nu = m_\nu + (5 + {}^2\log \nu!)^2.$$

Dann ist aber nach (31) und (32):

$$(33)\qquad \left|\sum_{1}^{k-1}\nu f_{n_\nu}(x_{\lambda k}) - f_{n_\nu}(x)\right| < \frac{1}{8\cdot\nu!}.$$

Und schließlich hat man

$$|f(x_{\lambda k}) - f(x)| > |f_{n_k}(x_{\lambda k}) - f_{n_k}(x)|$$

$$- \left|\sum_{1}^{k-1}\left(f_{n_\nu}(x_{\lambda k}) - f_{n_\nu}(x)\right)\right| - \left|\sum_{k+1}^{\infty} f_{n_\nu}(x_{\lambda k}) - f_{n_\nu}(x)\right|$$

$$(34) \qquad > \frac{1}{2\cdot k!} - \frac{1}{8\cdot k!} - \frac{1}{8\cdot k!} \qquad \text{nach (25), (28), (33)}$$

$$= \frac{1}{4\cdot k!}$$

und daher mit Benutzung von (26):

$$(35) \qquad \left|\frac{f(x_{\lambda k}) - f(x)}{\varphi(x_{\lambda k} - x)}\right| > \frac{k!}{4}.$$

Beachtet man noch die Verschiedenheit des Vorzeichens von $\frac{f(x_{\lambda k}) - f(x)}{\varphi(x_{\lambda k} - x)}$ für $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ und daß die Differenz $x_{\lambda k} - x$, die ich mit h bezeichne, für $\lim k = \infty$ der Null zustrebt, so folgt aus (35):

$$(36) \qquad \overline{\lim_{h=0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = +\infty, \quad \underline{\lim_{h=0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = -\infty, \text{ w. z. b. w.*)}$$

Wählt man statt der bisher betrachteten Funktion $f(x)$ die folgende

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} f_{n_\nu}(x),$$

so findet man nach dem gleichen Beweisverfahren *für die Punkte der Menge M* statt (36) die folgenden präziseren Beziehungen

$$(37) \qquad \begin{aligned} \overline{\lim_{h=+0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &= \overline{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}_{+} = +\infty, \\ \underline{\lim_{h=+0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &= \underline{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}_{+} = -\infty, \\ \overline{\lim_{h=-0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &= \overline{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}_{-} = +\infty, \\ \underline{\lim_{h=-0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &= \underline{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}_{-} = -\infty. \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß diese Beziehungen nicht für *alle* Werte von x bestehen können**); dagegen will ich zeigen, daß es *rektifizierbare*

*) Aus dem Beweise folgt sogar die genauere Aussage, daß von den 4 Beziehungen (37) an jeder Stelle x wenigstens die erste und zweite oder die dritte und vierte besteht.

**) Vgl. Dini-Lüroth, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, p. 255.

Kurven $y = f(x)$ gibt, für welche an den Stellen x von M die vier Beziehungen (37) gelten. Über die andern Stellen x werden keine Aussagen gemacht, (es erscheint mir sehr zweifelhaft, ob die Gültigkeit von (36) selbst unter der Annahme $\varphi(h) = h$ an jeder Stelle x sich mit der Rektifizierbarkeit vereinigen läßt). Jedenfalls aber ist durch das Bestehen von (37) an den Stellen x von M die Existenz von $\int \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ ausgeschlossen.

Statt der bisher betrachteten Kurven $y = f_{n_\nu}(x)$ wähle ich für den vorliegenden Zweck andere, die man erhält, wenn man immer zwei aufeinanderfolgende der folgenden durch ihre Koordinaten gegebenen Punkte verbindet:

$$
\begin{array}{lllll}
 & & 0 \,|\, 0; & \frac{1}{2^{n_\nu}} \,\big|\, \frac{1}{\nu!}; & \frac{1}{2^{n_\nu - 1}} \,\big|\, 0; \\
\frac{1}{2^\nu} - \frac{1}{2^{n_\nu - 1}} \,\big|\, 0; & \frac{1}{2^\nu} - \frac{1}{2^{n_\nu}} \,\big|\, \frac{1}{\nu!}; & \frac{1}{2^\nu} \,\big|\, 0; & \frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{n_\nu}} \,\big|\, \frac{1}{\nu!}; & \frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{n_\nu - 1}} \,\big|\, 0; \\
\frac{2}{2^\nu} - \frac{1}{2^{n_\nu - 1}} \,\big|\, 0; & \frac{2}{2^\nu} - \frac{1}{2^{n_\nu}} \,\big|\, \frac{1}{\nu!}; & \frac{2}{2^\nu} \,\big|\, 0; & \frac{2}{2^\nu} + \frac{1}{2^{n_\nu}} \,\big|\, \frac{1}{\nu!}; & \frac{2}{2^\nu} + \frac{1}{2^{n_\nu - 1}} \,\big|\, 0; \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\mu}{2^\nu} - \frac{1}{2^{n_\nu - 1}} \,\big|\, 0; & \frac{\mu}{2^\nu} - \frac{1}{2^{n_\nu}} \,\big|\, \frac{1}{\nu!}; & \frac{\mu}{2^\nu} \,\big|\, 0; & \frac{\mu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{n_\nu}} \,\big|\, \frac{1}{\nu!}; & \frac{\mu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{n_\nu - 1}} \,\big|\, 0; \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 - \frac{1}{2^{n_\nu - 1}} \,\big|\, 0; & 1 - \frac{1}{2^{n_\nu}} \,\big|\, \frac{1}{\nu!}; & 1 \,|\, 0. & &
\end{array}
\tag{38}
$$

Die Kurve $y = f_{n_\nu}(x)$ fällt also streckenweise mit der X-Achse zusammen; nur zu beiden Seiten der Stellen

$$x = \frac{\mu}{2^\nu} \quad (\mu = 1, 2, \cdots, 2^\nu - 1),$$

sowie rechts der Stelle $x = 0$ und links der Stelle $x = 1$ wird die X-Achse ersetzt durch die Schenkel gleichschenkeliger Dreiecke, deren Basis von der Länge $\frac{2}{2^{n_\nu}}$ in die X-Achse fällt und deren Höhe $\frac{1}{\nu!}$ beträgt. Ist nun

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^\nu f_{n_\nu}(x)$$

und x eine Zahl der Menge $M: x = \frac{\mu}{2^\nu}$ und $\nu < n_k$, so ändert sich am Beweise der Relationen (36), (37) gar nichts. Dagegen ist jetzt die Summe sämtlicher $|\delta_{n_\nu}|$ endlich; jede einzelne Zahl $\delta_{n_\nu} = \frac{1}{\nu!}$ ist nämlich

$2 \cdot 2^\nu$ mal zu zählen, die Summe sämtlicher also $= 2 \cdot e^2$; also ist nach dem zu Ende des ersten Paragraphen, p. 87, Bemerkten die Kurve $y = f(x)$ rektifizierbar.

An Stelle der bisher stets benutzten Menge M (bestehend aus den dyadisch rationalen Zahlen) kann man überall mit unschwerer Modifikation des Gedankengangs, der Formulierungen und der Beweisführung irgend eine andre abzählbare überall dichte Menge treten lassen; soll z. B. M die Menge der rationalen Zahlen werden, so hat man das Intervall $(0, 1)$ nacheinander in $2!, 3!, 4!, \cdots$ statt in $2^1, 2^2, 2^3, \cdots$ Teile zu teilen.

Beweis des Satzes, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen läßt.

Von

Arthur Wieferich in Münster i./W.

In der vorliegenden Arbeit soll nachgewiesen werden, daß *die notwendige und hinreichende obere Grenze der Anzahl der zur Darstellung einer ganzen Zahl erforderlichen positiven Kuben gleich neun ist.*

Eine gute Übersicht über die bisher angestellten Untersuchungen findet sich in der Abhandlung des Herrn Albert Fleck: „Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen."*) Ich entnehme ihr folgendes: Tabellen der kleinsten Anzahlen von positiven Kuben, in die sich die ganzen Zahlen zerlegen lassen, sind zuerst im Jahre 1770 von Waring**) für die Zahlen von 1—3000, dann von Jacobi***) für die Zahlen von 1—12 000 und endlich vor kurzem im Jahre 1903 von Herrn von Sterneck†) für die Zahlen bis 40 000 aufgestellt worden. Aus ihnen ergab sich, daß bis zur Grenze 40 000 hin alle Zahlen größer als 239 sich durch höchstens 8, oberhalb 454 durch höchstens 7 und oberhalb 8042 durch höchstens 6 Kuben darstellen lassen, so daß vermutlich über eine gewisse Grenze (8042) hinaus eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens 6 Kuben darstellbar ist. Erst Herrn Ed. Maillet††) ist es gelungen nachzuweisen, daß sich eine jede ganze Zahl in eine feste Höchstzahl von Kuben, die er auf 17 bestimmte, zerlegen läßt. Diese Anzahl ist dann von Herrn A. Fleck in der angegebenen Arbeit leicht auf 13 reduziert worden.

*) Sitzungsberichte der Berliner mathem. Gesellschaft, 5. Jahrgang, 1906, p. 2—3.

**) Meditationes algebraicae, III. Ausgabe, Cambridge 1782, p. 349.

***) Crelles Journal, Bd. 42, p. 41—69; Werke, Bd. 6, p. 322—354.

†) Sitzungsberichte der Kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Math.-naturw. Klasse, Bd. 112, Abt. IIa, 1903, p. 1627—1666.

††) Association française pour l'avancement des sciences, Compte Rendu de la 2ième session (Bordeaux), 1895, 2e partie, p. 242—247.

1.

Es sei z eine beliebige positive ganze Zahl. Dann kann ich stets eine Zahl ν derart bestimmen, daß:

$$7{,}4 \cdot 5^{3\nu} < z \leqq 7{,}4 \cdot 5^{3\nu+3}$$

ist. Es sei

$$z_\alpha = z - \alpha^3.$$

Der größte Wert, den α annehmen darf, falls z_α nicht negativ werden soll, ist also jedenfalls nicht größer als $\sqrt[3]{7{,}4} \cdot 5^{\nu+1}$. Die Differenz zweier aufeinander folgender Zahlen z_α und $z_{\alpha-1}$ ist kleiner als $3\alpha^2$, d. h. sicher $< 3 \cdot \sqrt[3]{7{,}4^2} \cdot 5^{2\nu+2}$. Setze ich:

$$3 \cdot \sqrt[3]{7{,}4^2} \cdot 5^{2\nu+2} = \tau \cdot 5^{3\nu},$$

so wird:

$$3 \cdot \sqrt[3]{7{,}4^2} = \tau \cdot 5^{\nu-2},$$

also für $\nu \gtreqless 3$

$$\tau < 2{,}3.$$

Ist demnach $\nu \gtreqless 3$, so kann ich immer α so bestimmen, daß:

$$7{,}4 \cdot 5^{3\nu} < z_\alpha < (7{,}4 + 2{,}3) \cdot 5^{3\nu},$$

resp. ich kann zwei aufeinander folgende Zahlen α bestimmen, so daß für jedes der beiden z_α:

$$7{,}4 \cdot 5^{3\nu} \leqq z_\alpha < 12 \cdot 5^{3\nu}$$

ist.

2.

Ich kann stets zu mindestens *einem* solchen α eine positive Zahl $\beta < 5^\nu$ finden, für die

$$Z_\beta = z_\alpha - \beta^3 = 5^\nu \cdot M$$

wird.

Denn da zwei aufeinanderfolgende Zahlen z_α zwischen den oben angegebenen Grenzen liegen, so kann ich immer z_α als nicht durch 5 teilbar annehmen. Lasse ich dann β das ganze reduzierte Restsystem modulo 5^ν durchlaufen, so sind alle Kuben β^3 inkongruent, d. h. einer von ihnen muß $\equiv z_\alpha$ (mod. 5^ν) sein.

3.

Es ergibt sich dann:

$$6{,}4 \cdot 5^{3\nu} < z_\alpha - \beta^3 < 12 \cdot 5^{3\nu},$$

also:

$$6{,}4 \cdot 5^{2\nu} < M < 12 \cdot 5^{2\nu}.$$

Ich setze nun:

$$M = 6 \cdot 5^{2\nu} + M_1,$$

wo demnach:

$$0{,}4 \cdot 5^{2\nu} < M_1 < 6 \cdot 5^{2\nu}$$

ist.

Ist ε eine der Zahlen 0, 1 oder 2, so daß

$$\nu + \varepsilon \equiv 0 \pmod{3}$$

ist, so setze ich endlich noch:

$$M_1 = 5^{\varepsilon} \cdot \gamma^3 + M_2,$$

wo ich γ so bestimmen will, daß M_2 durch 6 teilbar, gleich $6M_3$, wird, und M_3 nicht die Form $2^{2\eta}(8n+7)$ hat.

Es genügt demnach, γ so zu bestimmen, daß M_2 eine der Formen:

$$96n + 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 48,\ 54,\ 60,\ 66,\ 78,\ 84$$

annimmt. Aus den folgenden drei Tabellen ergibt sich der zu jedem $M_1 = 96n + \vartheta$ gehörende Wert von γ. So z. B. findet man für

$$M_1 = 96n + 57,$$

im Falle $\varepsilon = 0$, $\gamma = 3$, d. h. ich habe: $M_1 = 3^3 + M_2$ zu setzen. M_2 erhält dann die Form: $96n + 30$.

a) $\varepsilon = 0$.

γ	ϑ											
0	6	12	18	24	30	36	48	54	60	66	78	84
1	7	13	19	25	31	37	49	55	61	67	79	85
2	14	20	26	32	38	44	56	62	68	74	86	92
3	33	39	45	51	57	63	75	81	87	93	9	15
4	70	76	82	88	94	4	16	22	28	34	46	52
5	35	41	47	53	59	65	77	83	89	95	11	17
6	42	72	90									
7	73	91	43									
8	50	80	2									
9	69	21	27									
10	58	64	10									
11	5	23	71									
13	1											
14	8											
15	3											
17	29											
18	0											
22	40											

b) $\varepsilon = 1$.

γ	ϑ											
0	6	12	18	24	30	36	48	54	60	66	78	84
1	11	17	23	29	35	41	53	59	65	71	83	89
2	46	52	58	64	70	76	88	94	4	10	22	28
3	45	51	57	63	69	75	87	93	3	9	21	27
4	38	44	50	56	62	68	80	86	92	2	14	20
5	55	61	67	73	79	85	1	7	13	19	31	37
6	42	72	90									
7	95	5	47									
8	82	16	34									
9	15	33	81									
10	26	32	74									
11	43	49	91									
13	77											
14	40											
15	39											
17	25											
18	0											
22	8											

c) $\varepsilon = 2$.

γ	ϑ											
0	6	12	18	24	30	36	48	54	60	66	78	84
1	31	37	43	49	55	61	73	79	85	91	7	13
2	14	20	26	32	38	44	56	62	68	74	86	92
3	3	9	15	21	27	33	45	51	57	63	75	81
4	70	76	82	88	94	4	16	22	28	34	46	52
5	59	65	71	77	83	89	5	11	17	23	35	41
6	42	72	90									
7	67	1	19									
8	50	80	2									
9	87	93	39	69								
10	58	64	10									
11	95	29	47									
13	25											
14	8											
17	53											
18	0											
22	40											

4.

Der größte Wert, den ich $5^{\varepsilon}\cdot\gamma^3$ zu geben habe, ist demnach gleich $5^{\varepsilon}\cdot 22^3$.

Damit $6\,M_2$ positiv bleibt, muß also:

$$5^{\varepsilon}\cdot 22^3 < 0{,}4\cdot 5^{2\nu},$$

d. h.

$$10\,648 < 0{,}4\cdot 5^{2\nu-\varepsilon}$$

sein. Dieses ist der Fall für $\nu \gtreqqless 4$.

Für $\nu = 3$ ist:

$$18^3 < 0{,}4\cdot 5^{2\nu},$$

dagegen:

$$22^3 > 0{,}4\cdot 5^{2\nu}.$$

Ich habe jedoch nur dann die Potenz 22^3 abzusondern, falls

$$M_1 = 48\,n + 40$$

ist.

Da $M_1 - 4^3 = 48n - 24 = 6\cdot 4(2n-1)$ ist, so kann ich nur dann nicht schon den Kubus 4^3 absondern, falls $2n - 1$ von der Form $8\,N + 7$, d. h. $n = 4n_1$ ist. In diesem Falle ist $M_1 = 192n_1 + 40$.

Ferner ist $M_1 - 10^3 = 192\,n_1 - 960 = 6\cdot 32(n_1 - 5)$; ich kann also nur dann nicht schon den Kubus 10^3 abziehen, wenn $n_1 - 5$ von der Form $2^{2\eta+1}(8n_2 + 7)$, also wenn:

$$M_1 = 192\cdot 2^{2\eta+1}(8n_2+7) + 1000$$

ist. Es ist also M_1 kleiner als 22^3 nur in den drei Fällen:

$$M_1 = 3688,\ 6760,\ 9832.$$

Dann wird:

$$6\cdot 5^{2\nu} + M_1 = 97\,438,\ 100\,510,\ 103\,582.$$

Es ist aber:

$$97\,438 = 45^3 + 16^3 + 10^3 + 10^3 + 6^3 + 1^3,$$
$$100\,510 = 46^3 + 11^3 + 11^3 + 8^3,$$
$$103\,582 = 46^3 + 17^3 + 11^3 + 1^3 + 1^3.$$

In diesen drei Fällen kann ich also $6\cdot 5^{2\nu}+M_1$, demnach auch $5^{\nu}(6\cdot 5^{2\nu}+M_1)$, als Summe von höchstens sechs Kuben darstellen.

Im übrigen ist also die abzusondernde Zahl $5^{\varepsilon}\cdot\gamma^3$ kleiner als $0{,}4\cdot 5^{2\nu}$, d. h. es wird:

$$0 < 6\cdot M_2 < 6\cdot 5^{2\nu}$$

oder:

$$0 < M_2 < 5^{2\nu}.$$

5.

Zwischen vier beliebigen Größen A, x_1, x_2, x_3 besteht die Identität:

$$\sum_{i=1}^{3} \{(A+x_i)^3 + (A-x_i)^3\} = A[6A^2 + 6(x_1^2+x_2^2+x_3^2)].$$

Da nun M_3 nicht die Form $2^{2\gamma}(8n+7)$ hat (abgesehen von den vorweg behandelten drei Fällen), so kann ich M_3 als Summe dreier Quadrate darstellen.

Es sei demnach:

$$M_3 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Ersetzt man also in der obigen Identität A durch 5^ν und x_i durch x_i', so ergibt sich

$$5^\nu \cdot (6\cdot 5^{2\nu} + 6M_3) = \sum_{i=1}^{3} \{(5^\nu + x_i')^3 + (5^\nu - x_i')^3\},$$

d. h. $5^\nu(6\cdot 5^{2\nu}+6M_3)$ ist die Summe von sechs positiven Kuben, da wegen $0 < M_3 < 5^{2\nu}$ sicher jedes $x_i' < 5^\nu$ ist.

6.

Da

$$z = \alpha^3 + \beta^3 + 5^{\nu+\varepsilon}\cdot\gamma^3 + 5^\nu(6\cdot 5^{2\nu}+6M_3)$$

ist, so läßt sich demnach eine jede Zahl, die größer als $7{,}4\cdot 5^9$ ist, als Summe von neun positiven Kuben darstellen.

7.

Ist nun $40000 < z \leqq 7{,}4\cdot 5^9$, und setze ich $z_1 = z - \alpha_1^3$, so kann ich, wie schon erwähnt, α_1 so bestimmen, daß $z_1 < 3\cdot z^{\frac{2}{3}}$ wird, resp. z_1 zwischen zwei Grenzen einschließen, deren Abstand höchstens gleich $3\cdot z^{\frac{2}{3}}$ ist. Ich kann also stets bewirken, daß $10\,000 < z_1 < 3\cdot z^{\frac{2}{3}} + 10\,000$ wird. Dann setze ich ebenso:

$$z_2 = z_1 - \alpha_2^3,$$

und kann hierdurch erreichen, daß $10000 < z_2 < 3(3\cdot z^{\frac{2}{3}} + 10000)^{\frac{2}{3}} + 10000$ wird.

Setze ich demnach $z = 7{,}4\cdot 5^9$, so finde ich, daß ich stets z_2 so festlegen kann, daß $10000 < z_2 < 20000$ ist.

Indem ich also:

$$z = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + z_2$$

setze, kann ich stets bewirken, daß z_2 zwischen 10 000 und 20 000 liegt, d. h. nach der Sterneckschen Tabelle durch höchstens sechs positive Kuben dargestellt werden kann.

Ich kann daher auch eine jede Zahl $< 7{,}4 \cdot 5^9$ als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen.

8.

Da die Zahlen 23 und 239 nicht in weniger als neun Kuben zerlegt werden können, so ergibt sich hieraus der zu Beginn ausgesprochene Satz:

Eine jede ganze Zahl läßt sich als Summe von neun positiven ganzen Kuben darstellen, und es gibt Zahlen, zu deren Darstellung neun Kuben erforderlich sind.

Münster i. W., Mai 1908.

Über eine Anwendung der Primzahltheorie auf das Waringsche Problem in der elementaren Zahlentheorie.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Ich begrüße die vorangehende Arbeit von Herrn Wieferich*) als einen der erfreulichsten Fortschritte, welche die elementare Zahlentheorie in der letzten Zeit gemacht hat. Der Verfasser löst ein altes Problem, indem er eine Vermutung beweist, welche schon im Jahre 1782 in der Literatur vorkam und seitdem allen Zahlentheoretikern vorgelegen hat. Nun ist mit Herrn Wieferichs Ergebnis noch nicht alles geklärt, was mit der Zerlegbarkeit der Zahlen in Kuben zusammenhängt. Es bleibt zunächst folgende bestimmte Frage offen, auf welche der Vergleich mit den entsprechenden, schon durch Lagrange völlig bekannten Tatsachen bei der Zerlegbarkeit in Quadrate führt.

Es bezeichne $f(n)$ die kleinste Anzahl von Quadraten, als deren Summe die positive ganze Zahl n darstellbar ist, d. h. es sei

$$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, f(4)=1, f(5)=2, f(6)=3, f(7)=4, f(8)=2, \cdots.$$

Lagrange hat bewiesen, daß für alle n

$$f(n) \leqq 4$$

ist. Da

$$f(7)=4$$

ist, so ist nach Lagrange

$$\text{obere Grenze von } f(n)=4.$$

Da ferner für $n \equiv 7 \pmod{8}$ stets

$$f(n)=4$$

ist, so ist nach Lagrange

$$\limsup_{n=\infty} f(n)=4.$$

*) „Beweis des Satzes, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen läßt" [Mathematische Annalen, Bd. 66 (1908), S. 95—101]. Durch die Freundlichkeit des Verfassers und der Redaktion war mir die Arbeit vor ihrem Erscheinen zugänglich, so daß ich die vorliegenden Bemerkungen, zu denen sie mir Anlaß gab, in demselben Heft der Annalen erscheinen lassen kann.

Entsprechend sei $g(n)$ die kleinste Anzahl von positiven Kuben, aus denen n additiv gebildet werden kann:

$$g(1)=1,\ g(2)=2,\ g(3)=3,\ \cdots,\ g(7)=7,\ g(8)=1,\ g(9)=2,\ \cdots.$$

Herr Wieferich hat bewiesen, daß für alle n

$$g(n) \leqq 9$$

ist. Da

$$g(23)=9$$

ist, so ist nach Herrn Wieferich

$$\text{obere Grenze von } g(n) = 9.$$

Aber es bleibt unentschieden, ob

$$\limsup_{n=\infty} g(n) = 9$$

oder

$$\limsup_{n=\infty} g(n) < 9$$

ist; denn man kennt nur endlich viele Zahlen ($n=23$ und $n=239$), für welche

$$g(n)=9$$

ist.

Ich bin nun imstande, durch Verbindung von Herrn Wieferichs scharfsinniger Methode mit einem neueren Satz aus der Primzahltheorie zu beweisen, daß

$$\limsup_{n=\infty} g(n) < 9$$

ist; nämlich: *Jede Zahl oberhalb einer gewissen Schranke ist als Summe von höchstens acht positiven Kuben darstellbar.*

Jener Satz aus der Primzahltheorie, welcher zuerst von Herrn de la Vallée Poussin*) auf Hadamardscher Grundlage und später einfacher von mir**) bewiesen worden ist, lautet: Es seien k und l zwei positive teilerfremde Zahlen, $\varrho(x)$ die Anzahl der bis x (inkl.) gelegenen Primzahlen von der Form $ky+l$. Dann ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \varrho(x) = \frac{1}{\varphi(k)}.$$

Daraus folgt, wenn $\delta > 0$ eine positive Konstante ist,

---

*) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers" [Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2 (1896), S. 183—256, 281—397], S. 360—361.

**) „Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression" [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2a (1903), S. 493—535], S. 532.

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log x}{x}(\varrho(x+\delta x)-\varrho(x))=(1+\delta)\lim_{x=\infty}\frac{\log(x+\delta x)}{x+\delta x}\varrho(x+\delta x)-\lim_{x=\infty}\frac{\log x}{x}\varrho(x)$$
$$=\frac{1+\delta}{\varphi(k)}-\frac{1}{\varphi(k)}=\frac{\delta}{\varphi(k)}>0;$$

die Anzahl $\varrho(x+\delta x)-\varrho(x)$ der Primzahlen zwischen x (exkl.) und $x+\delta x$ (inkl.) aus der Progression wird also mit x unendlich.

Speziell $\left(\text{für } k=3,\ l=2,\ \delta=\sqrt[9]{\frac{12}{8}}-1\right)$: Für alle hinreichend großen ganzen z gibt es mindestens zehn Primzahlen p, welche die Bedingungen

(1) $$\sqrt[9]{\frac{z}{12}}<p\leqq\sqrt[9]{\frac{z}{8}},$$

(2) $$p\equiv 2 \pmod{3}$$

erfüllen. Von je zehn solchen Primzahlen geht für alle hinreichend großen z mindestens eine nicht in z auf, da ihr Produkt $>\left(\frac{z}{12}\right)^{\frac{10}{9}}$, also von einer gewissen Stelle an größer als z ist. p bezeichne eine solche Primzahl, die also nicht in z aufgeht und (1), (2) erfüllt.

Aus (1) folgt

$$8p^9\leqq z<12p^9;$$

aus (2) ergibt sich, daß $\varphi(p^3)=p^2(p-1)$ nicht durch 3 teilbar, also jede zu p^3 teilerfremde Zahl, insbesondere z, kubischer Rest mod. p^3 ist. Es gibt also ein β derart, daß

$$0<\beta<p^3$$

und

$$z-\beta^3=p^3M$$

ist. Hierin ist

$$7p^9<p^3M<12p^9,$$
$$7p^6<\ M<12p^6.$$

Es werde nun

$$M=6p^6+M_1$$

gesetzt:

$$p^6<M_1<6p^6.$$

Von M_1 läßt sich nach der ersten Wieferichschen Tabelle*) stets ein Kubus $\gamma^3(0\leqq\gamma<96)$ subtrahieren, so daß

$$M_1-\gamma^3=M_2$$

mod. 96 einen der Reste 6, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 54, 60, 66, 78, 84 läßt. Für alle hinreichend großen z ist also

$$M_2=6M_3,$$

*) l. c., S. 97.

wo die unterhalb p^6 gelegene Zahl M_3 in drei Quadrate zerlegbar ist:

$$M_3 = A^2 + B^2 + C^2,$$

deren Basen A, B, C zwischen 0 (inkl.) und p^3 (exkl.) gelegen sind.

Alsdann ist

$$\begin{aligned} z &= \beta^3 + p^3 M = \beta^3 + p^3(6p^6 + M_1) = \beta^3 + p^3(6p^6 + \gamma^3 + M_2) \\ &= \beta^3 + (p\gamma)^3 + p^3(6p^6 + 6M_3) = \beta^3 + (p\gamma)^3 + 6p^3(p^6 + A^2 + B^2 + C^2) \\ &= \beta^3 + (p\gamma)^3 + (p^3 + A)^3 + (p^3 - A)^3 + (p^3 + B)^3 + (p^3 - B)^3 + (p^3 + C)^3 \\ &\quad + (p^3 - C)^3, \end{aligned}$$

also die gegebene Zahl z in acht nicht negative Kuben zerlegbar.

Anhang: Die Waringsche Vermutung, daß jede positive ganze Zahl sich als Summe einer festen Anzahl von nicht negativen s^{ten} Potenzen darstellen läßt, ist bisher nur für alle $s \leqq 6$ und $s = 8$ bewiesen.*) Mein Freund J. Schur hat nun die Identität gefunden, welche ich mit seiner Zustimmung hier veröffentliche**):

$$22680(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^5 = 9 \sum_{a \cdots d}^{(4)} (2a)^{10} + 180 \sum_{a \cdots d}^{(12)} (a \pm b)^{10}$$

$$+ \sum_{a \cdots d}^{(48)} (2a \pm b \pm c)^{10} + 9 \sum_{a \cdots d}^{(8)} (a \pm b \pm c \pm d)^{10}.$$

Hierdurch***) ist, da die Waringsche Vermutung für $s = 5$ durch Herrn Maillet bewiesen war, der Fall $s = 10$ erledigt und der Satz festgestellt: *Jede positive ganze Zahl läßt sich als Summe einer festen Anzahl von zehnten Potenzen darstellen.*

Berlin, den 21. Juni 1908.

---

*) Literaturangaben siehe in Herrn Maillets kürzlich erschienener Arbeit „Sur la décomposition d'un entier en une somme de puissances huitièmes d'entiers (problème de Waring)" [Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. 36 (1908), S. 69—77]. Zu den dort zitierten Arbeiten sind inzwischen drei weitere hinzugekommen: 1) Hurwitz, „Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n^{ten} Potenzen ganzer Zahlen" [Mathematische Annalen, Bd. 65 (1908), S. 424—427], 2) die oben zitierte Arbeit von Herrn Wieferich, 3) Wieferich, „Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten" [Mathematische Annalen, Bd. 66 (1908), S. 106—108].

**) In Fleck-Hurwitzscher Bezeichnungsweise.

***) Vgl. die allgemeinen Bemerkungen von Herrn Hurwitz (l. c., S. 424—425) über die Tragweite einer solchen Identität.

Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten.

Von

Arthur Wieferich in Münster i/W.

Anknüpfend an die Abhandlung des Herrn E. Landau „Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten" in den „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo", Bd. 23 (1907), p. 91—96 soll im vorliegenden nachgewiesen werden, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von 37 Biquadraten darstellen läßt.

Liouville*) hat zuerst bewiesen, daß sich eine jede Zahl additiv in 53 Biquadrate zerlegen läßt. Diese Zahl wurde von Realis**) auf 47, von Lucas***) auf 45, resp. 41 und von Herrn Fleck†) auf 39 reduziert. Herr E. Landau hat sodann in der oben zitierten Arbeit die Zerlegbarkeit in 38 Biquadrate nachgewiesen.

1.

Herr Landau hat für eine jede der 48 Restklassen modulo 48 die geringste Anzahl der zur Zerlegung hinreichenden Biquadrate angegeben. Bezeichnet B_i diese Zahl, so hat er gefunden, daß alle Restklassen mit Ausnahme von $48n+11$, $48n+27$, $48n+43$ sich als Summe von höchstens 37 Biquadraten darstellen lassen. Für jene drei Klassen ergab sich dagegen die Schranke 38. Er setzte diese nun folgendermaßen zusammen:

---

*) Siehe: Lebesgue, Exercices d'Analyse numérique, Paris 1859, p. 113—115.

**) Note sur un théorème d'Arithmétique (Nouvelle Correspondance Mathématique, Bd. 4, 1878, p. 209/210).

***) Sur la décomposition des nombres en bicarrés, ebenda p. 323—325 und Sur un théorème de M. Liouville, concernant la décomposition des nombres en bicarrés (Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. 2, Bd. 17, 1878, p. 536/537).

†) Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen (Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft, 5. Jahrgang, 1906, p. 2—9).

$$48n + 11 = (48n + 9) + 1^4 + 1^4,$$
$$48n + 27 = (48n + 25) + 1^4 + 1^4,$$
$$48n + 43 = (48(n-1) + 9) + 1^4 + 3^4,$$

und erhielt so, da er $48n + 9$ und $48n + 25$ gleich B_{36} bestimmt hatte, eben die drei Klassen gleich B_{38}. Kann demnach gezeigt werden, daß sowohl $48n + 9$ wie $48n + 25$ gleich B_{35} ist, so wäre bewiesen, daß obige drei Klassen gleich B_{37} sind, d. h. daß eine jede Zahl in 37 Biquadrate zerlegbar ist.

2.

Es sei zunächst:

$$\begin{aligned}24N_i &= 48n + 9 - (6\varepsilon_i + 3)^4 \\ &= 24[2n - 54\varepsilon_i^4 - 108\varepsilon_i^3 - 81\varepsilon_i^2 - 27\varepsilon_i - 3],\end{aligned}$$

wo ε_i der Reihe nach gleich $0, 1, \cdots, 7$ sein möge. Es ergeben sich dann leicht folgende Kongruenzen:

$$\begin{aligned}&N_0 \equiv 2n + 13, \quad N_1 \equiv 2n + 15, \quad N_2 \equiv 2n + 3, \\ &N_3 \equiv 2n + 9, \quad N_4 \equiv 2n + 1, \quad N_5 \equiv 2n + 11, \quad (\text{mod. } 16) \\ &N_6 \equiv 2n + 7, \quad N_7 \equiv 2n + 5,\end{aligned}$$

aus denen sofort folgt, daß für eine der Zahlen ε_i N_i die Form $16n_1 + 13$ haben muß. Ich kann also stets $\varepsilon_i = 0, 1, \cdots, 7$ so bestimmen, daß

$$48n + 9 = (6\varepsilon_i + 3)^4 + 24(16n_1 + 13)$$

wird.

3.

Ebenso erhält man, falls man:

$$\begin{aligned}24N_i &= 48n + 25 - (6\varepsilon_i + 1)^4 \\ &= 24[2n - 54\varepsilon_i^4 - 36\varepsilon_i^3 - 9\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i + 1]\end{aligned}$$

setzt, die Kongruenzen:

$$\begin{aligned}&N_0 \equiv 2n + 1, \quad N_1 \equiv 2n + 13, \quad N_{-1} \equiv 2n + 7, \\ &N_2 \equiv 2n + 11, \quad N_{-2} \equiv 2n + 15, \quad N_{-3} \equiv 2n + 9, \quad (\text{mod. } 16) \\ &N_{-4} \equiv 2n + 5, \quad N_{-5} \equiv 2n + 3,\end{aligned}$$

d. h. für eine der Zahlen $\varepsilon_i = 0, \pm 1, \pm 2, -3, -4, -5$ muß N_i die Form $16n_1 + 13$ annehmen. Ich kann demnach durch geeignete Wahl von ε_i bewirken, daß

$$48n + 25 = (6\varepsilon_i + 1)^4 + 24(16n_1 + 13)$$

wird.

4.

Wie leicht zu verifizieren, kann nun eine Zahl $16n_1 + 13$ nur auf folgende Weise als Summe dreier Quadrate dargestellt werden:

$$16n_1 + 13 = (4x)^2 + (8y \pm 2)^2 + (8z \pm 3)^2.$$

Es wird dann also:

$$24(16n_1 + 13) = 6(8x)^2 + 6 \cdot 2^4 \cdot (4y \pm 1)^2 + 24(8z \pm 3)^2.$$

Es ist nun, wie Herr Landau zeigte: $6 \cdot 2^4(4y \pm 1)^2 = B_{11}$. Ferner folgt aus der Identität:

$$24(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^2 = 2(z_1 + z_2 + z_3)^4 + 2(-z_1 + z_2 + z_3)^4 + 2(z_1 - z_2 + z_3)^4 + 2(z_1 + z_2 - z_3)^4 + (2z_1)^4 + (2z_2)^4 + (2z_3)^4,$$

daß auch:

$$24(8z \pm 3)^2 = B_{11}$$

ist. Da bekanntlich allgemein: $6m^2 = B_{12}$ ist, so ergibt sich:

$$24(16n_1 + 13) = B_{34}.$$

5.

Es ist also jede der Formen $48n + 9$ und $48n + 25$ gleich B_{35} und demnach eine jede Zahl der Restklassen $48n + 11$, $48n + 27$, $48n + 43$ als Summe von 37 Biquadraten darstellbar, falls diese Zahl $> 45^4$ ist, da 45^4 das größte von $48n + 9$ abzusondernde Biquadrat ist. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß auch jede Zahl $< 45^4$ gleich B_{37} ist. Subtrahiert man nämlich von einer Zahl $< 45^4$ das größte sie nicht übertreffende Biquadrat, so findet man, daß die Differenz $< 45^4 - 44^4 = 352\,529$ ist; ferner, daß ihr Überschuß über das größte sie nicht übertreffende Biquadrat $< 24^4 - 23^4 = 51\,935$ ist. Da nun, wie schon Herr Landau zeigte, jede Zahl $< 21^4$ gleich B_{26} ist, so ergibt sich leicht, daß jede Zahl $< 45^4$ gleich B_{28}, d. h. sicher gleich B_{37} wird. Hiermit ist also allgemein bewiesen, daß alle Zahlen sich als Summen von 37 Biquadraten darstellen lassen. Sehr viel weitergehende Reduzierungen dürften sich jedoch aus den bisher benutzten Identitäten kaum mehr ergeben.

Münster i./W., Mai 1908.

Note sur les nombres entiers dépendant d'une racine cinquième de l'unité.

Par

J. OUSPENSKY à St.-Pétersbourg.

La lecture des fragments de Gauss réunis dans le second volume de ses Oeuvres sous le titre „Zur Theorie der komplexen Zahlen" m'a conduit à une démonstration très simple de l' algorithme d'Euclide pour les nombres entiers dépendant d'une racine $5^{\text{ième}}$ de l'unité. Je vais exposer ici cette démonstration, mais d'abord j'établirai quelques formules préliminaires.

En désignant par ε une racine de l'équation

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

les nombres algébriques dont il s'agit ici auront la forme

$$f(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3$$

les nombres a_0, a_1, a_2, a_3 (que nous appelons les coordonnées) étant rationnels. Le nombre $f(\varepsilon)$ sera entier algébrique, si ses coordonnées sont des nombres entiers rationnels, et dans ce cas seulement. Pour calculer la norme

$$Nf(\varepsilon) = f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)f(\varepsilon^3)f(\varepsilon^4),$$

on posera avec Gauss:

$$2p_1 = (a_0-a_1)^2 + (a_1-a_2)^2 + (a_2-a_3)^2 + a_3^2 + a_0^3,$$
$$2p_2 = (a_0-a_2)^2 + (a_1-a_3)^2 + a_2^2 + (a_3-a_0)^2 + a_1^2,$$

et l'on aura par un calcul facile

$$(1) \qquad Nf(\varepsilon) = 3p_1p_2 - p_1^2 - p_2^2 = 5p_1p_2 - (p_1+p_2)^2.$$

Dans ce qui suit nous aurons besoin d'un autre nombre défini par l'égalité:

$$(2) \quad 2s = Mf(\varepsilon) = 2p_1 + 2p_2 = 5(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2) - (a_0+a_1+a_2+a_3)^2$$

auquel Gauss donne le nom *mensura*. Cette dénomination est caractéristique, car la connaissance de la mesure nous permet d'assigner une limite supérieure de la norme; on a en effet

$$(3) \qquad Nf(\varepsilon) = 5p_1p_2 - s^2 \leqq \left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

Ces préliminaires établies, passons à la démonstration. L'existence de l'algorithme d'Euclide sera établie, si pour chaque nombre

$$m = h_0 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + h_3 \varepsilon^3$$

à coordonnées rationnelles on peut trouver un nombre entier $\mathfrak{M}$ tel qu'on ait

$$\text{Norm } (m - \mathfrak{M}) < 1.$$

Pour le faire voir posons:

$$(4) \qquad \begin{cases} 4h_0 - h_1 - h_2 - h_3 & = A_0 + \alpha_0, \\ 4h_1 - h_0 - h_2 - h_3 & = A_1 + \alpha_1, \\ 4h_2 - h_0 - h_1 - h_3 & = A_2 + \alpha_2, \\ 4h_3 - h_0 - h_1 - h_2 & = A_3 + \alpha_3, \\ \quad - h_0 - h_1 - h_2 - h_3 & = A_4 + \alpha_4, \end{cases}$$

les nombres A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 étant entiers rationnels et les nombres α_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ satisfaisant aux conditions

$$0 \leqq \alpha_i < 1 \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Cela posé on a d'après les équations (4)

$$(5) \quad m = \frac{A_0 - A_4 + \alpha_0 - \alpha_4}{5} + \frac{A_1 - A_4 + \alpha_1 - \alpha_4}{5}\varepsilon + \frac{A_2 - A_4 + \alpha_2 - \alpha_4}{5}\varepsilon^2 + \frac{A_3 - A_4 + \alpha_3 - \alpha_4}{5}\varepsilon^3.$$

D'autre part les mêmes équations donnent

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

d'où l'on conclut:

$$(6) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2. \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

Supposons d'abord, qu'on ait $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, c'est-à-dire $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$; dans ce cas on tire de l'équation (5):

$$m = \frac{A_0 - A_4}{5} + \frac{A_1 - A_4}{5}\varepsilon + \frac{A_2 - A_4}{5}\varepsilon^2 + \frac{A_3 - A_4}{5}\varepsilon^3.$$

Si l'on détermine les nombres entiers $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, par les conditions

$$|h_i - \varkappa_i| \leqq \frac{1}{2} \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

et que l'on pose

$$\mathfrak{M} = \varkappa_0 + \varkappa_1 \varepsilon + \varkappa_2 \varepsilon^2 + \varkappa_3 \varepsilon^3,$$

le nombre

$$R = m - \mathfrak{M}$$

aura toutes ses coordonnées $\leqq \frac{2}{5}$ en valeur absolue.

Supposons ensuite $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \varkappa$, $\varkappa$ étant égal à 1, 2, 3, 4, de sorte que

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \varkappa = 0,$$

d'où l'on tire la congruence

$$(7) \quad (A_0 - A_4) + (A_1 - A_4) + (A_2 - A_4) + (A_3 - A_4) + \varkappa \equiv 0 \pmod{5},$$

ou encore

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \varkappa \equiv 0 \pmod{5}$$

en designant par $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les résidus minima des nombres $A_0 - A_4$, $A_1 - A_4$, $A_2 - A_4$, $A_3 - A_4$ suivant le module 5. On a donc $|\lambda_i| \leqq 2$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ et de là cette alternative: ou bien un des nombres λ_i est égal à zero, ou bien ils ne sont pas tous distincts; car autrement les nombres $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ seraient (abstraction faite de l'ordre) $+1, -1, +2, -2$ et leur somme serait $= 0$, contrairement à l'hypothèse.

Supposons d'abord un des nombres $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ égal à zéro, par exemple $\lambda_2 = 0$. Si l'on determine alors les entiers $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ par les conditions

$$|h_i - \varkappa_i| \leqq \frac{1}{2},$$

et que l'on pose

$$\mathfrak{M} = \varkappa_0 + \varkappa_1 \varepsilon + \varkappa_2 \varepsilon^2 + \varkappa_3 \varepsilon^3,$$

on voit aisément que dans l'expression

$$R = m - \mathfrak{M} = s_0 + s_1 \varepsilon + s_2 \varepsilon^2 + s_3 \varepsilon^3$$

les nombres s_0, s_1, s_3 satisfont aux inégalités

$$|s_0| \leqq \frac{1}{2}, \quad |s_1| \leqq \frac{1}{2}, \quad |s_3| \leqq \frac{1}{2};$$

mais s_2 satisfait à une inégalité speciale:

$$|s_2| = \frac{|\alpha_0 - \alpha_4|}{5} < \frac{1}{5}.$$

De même si $\lambda_i = 0$ on aura $|s_j| \leqq \frac{1}{2}$ pour $j \neq i$ et $|s_i| < \frac{1}{5}$.

Si aucun des nombres $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ n'est égal à zéro, on a nécessairement $\lambda_i = \lambda_j$ pour un choix convenable des indices. Supposons, pour fixer les idées, $\lambda_2 = \lambda_3$; en multipliant m par ε^{4-3} (et généralement par ε^{4-j}) on obtient

$$m\varepsilon^{4-3} = \frac{A_4 - A_3 + \alpha_4 - \alpha_3}{5} + \frac{A_0 - A_3 + \alpha_0 - \alpha_3}{5}\varepsilon + \frac{A_1 - A_3 + \alpha_1 - \alpha_3}{5}\varepsilon^2 + \frac{A_2 - A_3 + \alpha_2 - \alpha_3}{5}\varepsilon^3.$$

Comme maintenant $A_2 - A_3$ est divisible par 5, ce cas est ramené au précédent. Ces raisonnements, évidemment généraux, nous conduisent à

cette conclusion: si $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ est différent de zéro, il existe un exposant l et un nombre entier $\mathfrak{M}$ tels que le nombre

$$R = \varepsilon^l m - \mathfrak{M}$$

ait une de ses coordonnées inférieure, en valeure absolue, à $\frac{1}{5}$, les autres étant $\leqq \frac{1}{2}$.

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration qui était l'objet de cette Note. Soit d'abord $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$; dans ce cas le nombre

$$R = m - \mathfrak{M} = s_0 + s_1\varepsilon + s_2\varepsilon^2 + s_3\varepsilon^3$$

a toutes ses coordonnées inférieures ou égales, en valeur absolue, à $\frac{2}{5}$, et sa mesure $M(R)$ est $\leqq 5\,(s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \leqq \frac{16}{5}$. L'inégalité (3) nous donne

$$NR \leqq \left(\frac{4}{5}\right)^2 < 1.$$

Soit au contraire $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \neq 0$; dans ce cas, en déterminant convenablement l et $\mathfrak{M}$, on voit que

$$m - \mathfrak{M}\varepsilon^{-l} = R \cdot \varepsilon^{-l},$$

le nombre R ayant sa mesure $\leqq 5\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25}\right) = \frac{79}{20}$. On en conclut, en se reportant à l'inégalité (3), que l'on a

$$N(m - \mathfrak{M}\varepsilon^{-l}) \leqq \left(\frac{79}{80}\right)^2 < 1.$$

L'existence de l'algorithme d'Euclide est donc établie, ce qui nous montre l'analogie parfaite entre la théorie de la divisibilité des nombres du domaine (ε) et celle des nombres entiers ordinaires.

Über eine Anwendung der Invariantentheorie auf die Entwicklung von Integralen, insbesondere rationaler, elliptischer und hyperelliptischer, in Reihen.*)

Von

W. Fr. Meyer in Königsberg i./Pr.

Herr F. Klein**) hat betont, daß das elliptische Integral erster Gattung:

$$(\mathrm{I}) \qquad J(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4}},$$

oder homogen geschrieben, für $x=\frac{x_1}{x_2}$:

$$(\mathrm{I}') \qquad J(x_1,x_2)=\int\frac{x_2\,dx_1-x_1\,dx_2}{\sqrt{f_4(x_1,x_2)}}$$

$$=\int\frac{x_2\,dx_1-x_1\,dx_2}{\sqrt{a_0x_2^4+a_1x_2^3x_1+a_2x_2^2x_1^2+a_3x_2x_1^3+a_4x_1^4}},$$

eine transzendente Kovariante der binären biquadratischen Form

$$f_4(x)=f_4(x_1,x_2)$$

ist, und zwar in den a von der Dimension $-\frac{1}{2}$ und vom Gewichte -1, in x_1, x_2 von der Dimension Null.

In der Tat, unterwirft man die Variable x resp. die Variabeln x_1, x_2 einer linearen Substitution S:

$$(1) \qquad x=\frac{a\xi+b}{c\xi+d} \quad \text{oder:} \quad \begin{cases} x_1=a\xi_1+b\xi_2\\ x_2=c\xi_1+d\xi_2\end{cases} \qquad (ad-bc=\Delta\neq 0),$$

wodurch $f_4(x_1,x_2)$ in eine neue biquadratische Form $\varphi_4(\xi_1,\xi_2)$ übergehe, so folgt:

$$(\mathrm{II}') \qquad \int\frac{\xi_2\,d\xi_1-\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{\varphi_4(\xi_1,\xi_2)}}=\Delta^{-1}\int\frac{x_2\,dx_1-x_1\,dx_2}{\sqrt{f_4(x_1,x_2)}},$$

---

*) Vgl. die Voranzeige in den Göttinger Nachrichten, Sitzung vom 21. Dez. 1907.

**) Math. Annalen 14 (1879), p. 112 ff. Vgl. auch Klein-Fricke, Elliptische Modulfunktionen I (1890), Kap. 1.

oder nicht homogen geschrieben:

$$\text{(II)} \qquad \int \frac{d\zeta}{\varphi_4(\zeta)} = \Delta^{-1} \int \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}}.$$

Auf Grund dieser Tatsache läßt sich, wie sich zeigen wird, das Integral $J(x)$ in eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen von x mit Koeffizienten entwickeln, die, algebraisch wie arithmetisch, ein durchaus einfaches Gesetz befolgen. Ich versuchte sodann, das für $J(x)$ gefundene Gesetz auf höhere Integrale auszudehnen, die von der Form sind:

$$\text{(III)} \qquad \int dx\, f_n^{\mu}(x)\, g_p^{\nu}(x)\, h_q^{\pi}(x), \cdots,$$

wo $f_n(x), g_p(x), h_q(x), \cdots$ eine endliche Anzahl von binären Formen der Ordnungen $n, p, q. \cdots$ bedeuten, $\mu, \nu, \pi, \cdots$ beliebige feste Exponenten (reell oder komplex). *Es ergab sich, daß die Lösbarkeit dieser Aufgabe lediglich durch die, unmittelbar aus dem Begriff der Kovariante hervorgehende, Tatsache bedingt war, daß die Funktion*

$$\text{(IV)} \qquad F(x) = f_n^{\mu}(x)\, g_p^{\nu}(x)\, h_q^{\pi}(x), \cdots$$

eine (im allgemeinen transzendente) simultane Kovariante der Urformen $f, g, h, \cdots$ *ist.*

Daraufhin wird zuerst $F(x)$ selbst in eine Reihe entwickelt und diese hinterher integriert.

Um die Formeln nicht zu sehr zu überladen, genüge es, die Untersuchung für den Fall von *zwei* Urformen $f_n(x), g_p(x)$ durchzuführen. Der Beweisgang ist so durchsichtig, daß er sich ohne weiteres auf den Fall von mehr als zwei Urformen übertragen läßt.

Es sei also, in homogener Form:

$$\text{(IV')} \qquad F(x_1, x_2) = f_n^{\mu}(x_1, x_2)\, g_p^{\nu}(x_1, x_2),$$

wo

$$\text{(2)} \qquad \left| \begin{aligned} f_n(x_1, x_2) &= a_0 x_2^n + a_1 x_2^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_1^n, \\ g_p(x_1, x_2) &= b_0 x_2^p + b_1 x_2^{p-1} x_2 + \cdots + b_p x_1^p. \end{aligned} \right.$$

Hierbei sei sogleich bemerkt, daß überall da, wo es zweckmäßig erscheint, die nichthomogene Darstellung ($x_1 = x$, $x_2 = 1$) verwendet werden soll. Die Schreibweise der Koeffizienten a_i, b_k ist für das Folgende durchaus nicht gleichgültig: würde man die Indizes der a_i, b_k in umgekehrter Folge laufen lassen, oder gar Binomialkoeffizienten einführen, so würden die entscheidenden Darstellungsformeln erheblich an Durchsichtigkeit einbüßen.

Vermöge einer beliebigen linearen Substitution (1) der x_1, x_2 in neue Variable ζ_1, ζ_2 mögen die Formen f, g, F übergehen in $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$, $\psi(\zeta_1, \zeta_2)$, $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$; dann gilt die Identität:

(V) $$\Phi(\xi_1, \xi_2) \equiv F(x_1, x_2),$$

d. h. F ist eine Kovariante der Urformen f, g vom Gewichte Null. Andererseits ist ersichtlich, daß F in den x_1, x_2 homogen ist von der Dimension d_x, wo:

(3) $$d_x = n\mu + \mu\nu.$$

Indem wir nunmehr nichthomogen $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ schreiben, denken wir uns $F(x)$ nach der Maclaurinschen Reihe entwickelt:

(VI) $$F(x) = D_0 + D_1 \frac{x}{1!} + D_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + D_i \frac{x^i}{i!} + \cdots.$$

Bei beliebigen, komplexen Koeffizienten a_i, b_k, Exponenten μ, ν und der Variabeln x konvergiert die Reihe (VI) jedenfalls innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt, der durch die nächstgelegene Wurzel von $f(x) \cdot g(x)$ hindurchgeht. Die Funktion $F(x)$ wird im allgemeinen unendlichvieldeutig sein; man greife indessen unter den unendlich vielen Zweigen von $F(x)$ einen solchen heraus, der zu einem beliebig, aber fest gewählten Werte von

(4) $$D_0 = a_0^\mu b_0^\nu$$

gehört.

Man schreibe:

(5) $$D_0 a_0^{-\mu} b_0^{-\nu} = 1 = Z_0,$$

und setze entsprechend allgemein:

(VII) $$D_i a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu} = Z_i \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots).$$

Dann überzeugt man sich leicht, daß Z_i eine in den a, b ganzrationale Form ist, *je* in den a und b homogen von der Dimension i, und in beiden Koeffizientenreihen der a, b vom Gesamtgewicht i. Mit andern Worten, für irgend ein in Z_i auftretendes Potenzprodukt P:

(6) $$P = a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \cdots b_p^{\eta_p}$$

genügen die nichtnegativen ganzen Zahlen ε, η den drei linearen diophantischen Gleichungen:

$$\begin{cases} (7\text{a}) & \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = i, \quad \eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_p = i, \\ (7\text{b}) & 1 \cdot \varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2 + \cdots + n\varepsilon_n + 1 \cdot \eta_1 + 2\eta_2 + \cdots + p\eta_p = i. \end{cases}$$

Der Beweis beruht auf der Eigenschaft (V). Da $F(x)$ eine Kovariante von $f(x)$, $g(x)$ ist, sich also im besondern gegenüber irgend einer Schiebung von x:

(8) $$x = \xi + k$$

absolut invariant verhält, so genügt $F(x)$ der bekannten linearen partiellen Differentialgleichung:

(VIII) $$\left(\nabla - \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = 0,$$

wo unter ∇ der auf die Koeffizienten a, b auszuübende Differentiationsprozeß zu verstehen ist:

$$\text{(IX)}\qquad \nabla = a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + 2a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + 3a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + na_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}}$$
$$+ b_1 \frac{\partial}{\partial b_0} + 2b_2 \frac{\partial}{\partial b_1} + 3b_3 \frac{\partial}{\partial b_2} + \cdots + pb_p \frac{\partial}{\partial b_{p-1}}.$$

Substituiert man in (VIII) für $F(x)$ die Reihe (VI), so erweist sich die Existenz der Bedingung (VIII) als gleichwertig mit dem Bestehen der Rekursionsformeln*):

$$\text{(X)}\qquad \nabla D_i = D_{i+1} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots).$$

Versteht man unter ∇^i die i-malige Wiederholung des Prozesses ∇, so läßt sich (X) auch ersetzen durch:

$$\text{(X')}\qquad D_i = \nabla^i D_0,$$

so daß die Reihenentwickelung (VI) für $F(x)$ die invariantentheoretische Gestalt gewinnt:

$$\text{(VI')}\qquad F(x) = f^\mu(x) g^\nu(x) = D_0 + \frac{x}{1!} \nabla D_0 + \frac{x^2}{2!} \nabla^2 D_0 + \cdots$$
$$+ \frac{x^i}{i!} \nabla^i D_0 + \cdots,$$
$$(D_0 = a_0^\mu\, b_0^\nu).$$

Man nehme jetzt an, die Form Z_i in (VII) erfülle die oben angegebenen Eigenschaften bis zu einem Index i. Unterwirft man dann beide Seiten von (VII) dem Prozesse ∇, so kommt zunächst auf Grund von (X):

$$\text{(9)}\qquad D_{i+1} a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu} + D_i \nabla (a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu}) = \nabla Z_i.$$

Hier ist:

$$\nabla (a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu}) = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial b_0}\right) (a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu})$$
$$= (i-\mu)\, b_0^{i-\nu} a_0^{i-\mu-1} a_1 + (i-\nu)\, a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu-1} b_1,$$

somit:

$$\text{(10)}\qquad a_0 b_0 \nabla (a_1^{i-\mu} b_0^{i-\nu}) = (i-\mu)\, a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu+1} a_1 + (i-\nu)\, b_0^{i-\nu} a_0^{i-\mu+1} b_1.$$

Multipliziert man daher (9) mit $a_0 b_0$, und führt gemäß der Festsetzung (VII) statt der D_i, D_{i+1} die Z_i, Z_{i+1} ein, so entsteht für letztere die Rekursionsformel:

$$\text{(XI)}\qquad Z_{i+1} = \{(\mu - i)\, b_0 a_1 + (\nu - i)\, a_0 b_1\}\, Z_i + a_0 b_0 \nabla Z_i.$$

*) Die Formeln (X), (X') fallen für *endliche* Kovarianten mit den bekannten, von Cayley zuerst aufgestellten Formeln zusammen. S. Encyklopädie der math. Wiss. I, Art. „Invariantentheorie" von W. Fr. Meyer, Nr. 18, p. 375—376.

Jeder der beiden Prozesse $(\mu - i)\, b_0 a_1 + (\nu - i)\, a_0 b_1,\ a_0 b_0 \nabla Z_i$ erhöht sowohl die Dimension jedes Gliedes von Z_i, je in den a und b, wie auch das Gesamtgewicht jedes Gliedes in Z_i, um eine Einheit.

Damit sind die in (7) angegebenen Dimensions- und Gewichtseigenschaften der Form Z_i in (VII), die ja für $i = 0$ gemäß (5) ersichtlich erfüllt sind, allgemein bewiesen.

Sieht man im Augenblick von der für das Folgende grundlegenden Rekursionsformel (XI) ab, so lassen sich die Eigenschaften der Form Z_i in (VII) auch ohne Zuhilfenahme des Prozesses ∇ direkt erkennen. Die Maclaurinsche Entwickelung (VI) von $F(x)$ lehrt, daß Z_i jedenfalls in den a, b ganz und in jeder dieser Variabelenreihen homogen ist.

Die Dimension irgend eines Koeffizienten D_i in (VI) in den a, resp. b muß stets dieselbe sein, wie in $F(x)$ selbst, also μ resp. ν; somit wird die Dimension von Z_i wegen des Faktors $a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu}$ von D_i in (VII) je in den a und b gleich i.

Daß das Gesamtgewicht (in den a und b) von Z_i, und damit auch von D_i, gleich i wird, folgt wiederum aus einer besonderen Art der Invarianz (V) von $F(x)$.

Unterwirft man nämlich die Variable x einer „Streckung":

(11) $$x = m\xi,$$

wodurch $f(x)$, $g(x)$ in die neuen Formen $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ mit den Koeffizienten α, β übergehen mögen, $F(x)$ in $\Phi(\xi)$, so ist identisch $\Phi(\xi) = F(x)$. Man hat aber:

(12) $$\alpha_i = m^i a_i, \quad \beta_k = m^k b_k \quad (i = 0, 1, \cdots, n; \quad k = 0, 1, \cdots, p).$$

Bildet man daher die, in die Reihe (VI) entwickelt gedachte, Funktion $F(x)$ für die neue Variable ξ und die neuen Koeffizienten α, β, und drückt diese mittels (11), (12) wiederum durch die alten Größen x, resp. a, b aus, so erscheint in D_i irgend ein Potenzprodukt P (siehe (6)), gemäß (5) noch behaftet mit dem Faktor $a_0^{\mu-i} b_0^{\nu-i}$, multipliziert mit einer Potenz von m, deren Exponent den Wert hat

$$1 \cdot \varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2 + \cdots + n\varepsilon_n + 1 \cdot \eta_1 + 2 \cdot \eta_2 + \cdots + p\eta_p - i.$$

Dieser Exponent von m muß aber infolge der Identität $\Phi(\xi) = F(x)$ stets verschwinden, und das ist der Inhalt der Gewichtsrelation (7b).

Man hat nunmehr die numerischen Koeffizienten der in Z_i (VII) auftretenden Potenzprodukte P zu ermitteln. Führt man für die niedrigsten Werte des Index i die Rechnung aus, und achtet andererseits auf die Struktur der Rekursionsformel (XI), so gewinnt man für den numerischen Koeffizienten $A^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \eta_0 \eta_1 \cdots \eta_p}$ irgend eines Potenzproduktes

$$a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \cdots b_p^{\eta_p}$$

in Z_i den Ansatz:

$$\text{(XII)}\qquad \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\eta_0\eta_1\cdots\eta_p} = i!\cdot\frac{\mu(\mu-1)\cdots\{\mu-(i-\varepsilon_0-1)\}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\cdots\varepsilon_n!}\cdot\frac{\nu(\nu-1)\cdots\{\nu-(i-\eta_0-1)\}}{\eta_1!\,\eta_2!\cdots\eta_p!},$$

wo die Exponenten ε, η alle nichtnegativen, ganzzahligen Lösungen der Relationen (7) durchlaufen.

So erhält man z. B. für Z_2 den Ausdruck:

$$Z_2 = 2\mu\nu a_0 a_1 b_0 b_1 + 2\mu a_0 a_2 b_0^2 + 2\nu b_0 b_2 a_0^2 + \mu(\mu-1)\,a_1^2 b_0^2 + \nu(\nu-1)\,a_0^2 b_1^2.$$

Um den Beweis der Formel (XII) von i auf $i+1$ zu führen, greife man irgend ein Glied

$$(13)\qquad \mathsf{A}^{(i+1)}_{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\eta_0\eta_1\cdots\eta_p}\, a_0^{\varepsilon_0}a_1^{\varepsilon_1}\cdots a_n^{\varepsilon_n}b_0^{\eta_0}b_1^{\eta_1}\cdots b_p^{\eta_p}$$

aus Z_{i+1} heraus, wo der Bequemlichkeit halber die Bezeichnung gewählt ist, wie in (XII) für Z_i, wo aber darauf zu achten ist, daß in den für die ε, η geltenden Relationen (7) jetzt der Index i durch den nächstfolgenden $i+1$ ersetzt werden muß.

Ein solches Glied (13) in Z_{i+1} kann seine Entstehung wegen (XI) nur folgenden Potenzprodukten von Z_i verdanken, die alle zu *demselben* in (13) angegebenen Potenzprodukte führen, während jedes zu dem numerischen Koeffizienten $\mathsf{A}^{(i)}$ (13) einen gewissen Beitrag steuert:

$$\text{(a)}\qquad a_0^{\varepsilon_0}a_1^{\varepsilon_1-1}a_2^{\varepsilon_2}\cdots a_n^{\varepsilon_n}b_0^{\eta_0-1}b_1^{\eta_1}\cdots b_p^{\eta_p},$$

das vermöge des in (XI) enthaltenen Teilprozesses

$$(\mu-i)\,b_0a_1 + a_0b_0a_1\frac{\partial}{\partial a_0}$$

den Beitrag liefert:

$$(14^a)\qquad (\mu-i+\varepsilon_0)\,\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0,\,\varepsilon_1-1,\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n;\;\eta_0-1,\,\eta_1\cdots\eta_p};$$

$$\text{(b)}\qquad a_0^{\varepsilon_0-1}a_1^{\varepsilon_1+1}a_2^{\varepsilon_2-1}a_3^{\varepsilon_3}\cdots a_n^{\varepsilon_n}b_0^{\eta_0-1}b_1^{\eta_1}\cdots b_p^{\eta_p},$$

vermöge $2a_0b_0\cdot a_2\frac{\partial}{\partial a_1}$ mit dem Beitrage:

$$(14^b)\qquad 2(\varepsilon_1+1)\,\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0-1,\,\varepsilon_1+1,\,\varepsilon_2-1,\,\varepsilon_3\cdots\varepsilon_n,\;\eta_0-1,\,\eta_1,\cdots\eta_p}.$$

Geht man so weiter, so erscheint an $(k+1)^{\text{ter}}$ Stelle das Potenzprodukt in Z_i:

$$(k+1)\,a_0^{\varepsilon_0-1}a_1^{\varepsilon_1}\cdots a_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}a_k^{\varepsilon_k+1}a_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}-1}a_{k+2}^{\varepsilon_{k+2}}\cdots a_n^{\varepsilon_n}b_0^{\eta_0-1}b_1^{\eta_1}\cdots b_p^{\eta_p},$$

vermöge $(k+1)\,a_{k+1}\frac{\partial}{\partial a_k}\cdot a_0b_0$ mit dem Beitrage:

$$(14^{k+1})\qquad (k+1)(\varepsilon_k+1)\,\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0-1,\,\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_k-1,\,\varepsilon_k+1,\,\varepsilon_{k+1}-1,\,\varepsilon_{k+2},\cdots\varepsilon_n;\;\eta_0-1,\,\eta_1\cdots\eta_p}.$$

Mit $k = n - 1$ findet die erste Serie von Beiträgen (14^a), (14^b), $\cdots$, (14^{k+1}), $\cdots$, (14^n) ihren Abschluß.

Analog zu dieser Serie verhält sich eine zweite $(14^{a'})$, $(14^{b'})$, $\cdots$, $(14^{p'})$, die sich nur dadurch von jener unterscheidet, daß die ε und η ihre Rolle vertauschen.

Summiert man nunmehr diese sämtlichen Einzelbeträge, indem man jeweils auf Grund der für den Index i als richtig angenommenen Formel (XII) für das einzelne $\mathsf{A}^{(i)}$ seinen Wert einsetzt, so gelangt man zu dem gewünschten numerischen Koeffizienten $\mathsf{A}^{(i+1)}$ in (13).

Bei dieser Zusammenfassung der Einzelbeträge (14), (14′) läßt sich, wenn sie durch Erweiterung alle auf den gleichen Nenner

$$\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\cdots\varepsilon_n!\,\eta_1!\,\eta_2!\cdots\eta_p!$$

gebracht werden, als gemeinsamer Faktor das Produkt abspalten:

$$(15)\qquad i!\cdot\frac{\mu(\mu-1)\cdots\{\mu-(i-\varepsilon_0)\}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\cdots\varepsilon_n!}\cdot\frac{\nu(\nu-1)\cdots\{\nu-(i-\eta_0)\}}{\eta_1!\,\eta_2!\cdots\eta_p!}.$$

Dagegen hat das übrig bleibende Aggregat von Faktoren den Ausdruck:

$$1\cdot\varepsilon_1+2\cdot\varepsilon_2+\cdots+n\varepsilon_n+1\cdot\eta_1+2\eta_2+\cdots+p\eta_p,$$

der nach dem oben bewiesenen Satze über das Gewicht $i+1$ von Z_{i+1} den Wert $i+1$ besitzt. Hierdurch geht der Faktor $i!$ in (15) über in $(i+1)!$, und damit nimmt der numerische Koeffizient $\mathsf{A}^{(i+1)}$ in (13) gerade den aus (XII) vermöge Vertauschung des Index i mit dem Index $i+1$ hervorgehenden Wert an.

Die allgemeine Gültigkeit der Darstellungsformel (XII) ist so bewiesen, und der Beweis überträgt sich ersichtlich ohne weiteres auf den Fall einer beliebigen endlichen Anzahl von Urformen $f(x), g(x), h(x), \cdots$ in (IV).

Die Formel (XII) läßt sich noch durch Einführung von Binomial- und Polynomialkoeffizienten übersichtlicher gestalten. Erweitert man die rechte Seite von (XII) mit dem Produkt der beiden Fakultäten

$$(i-\varepsilon_0)!\cdot(i-\eta_0)!,$$

so werden die Brüche

$$\frac{\mu(\mu-1)\cdots\{\mu-(i-\varepsilon_0-1)\}}{(i-\varepsilon_0)!},\qquad\frac{\nu(\nu-1)\cdots\{\nu-(i-\eta_0-1)\}}{(i-\eta_0)!}$$

die zu den Größen μ, ν gehörigen $(i-\varepsilon_0)^{\text{ten}}$, $(i-\eta_0)^{\text{ten}}$ Binomialkoeffizienten $\binom{\mu}{i-\varepsilon_0}$, $\binom{\nu}{i-\eta_0}$. Die dann als Faktoren in (XII) noch verbleibenden Brüche

$$\frac{(i-\varepsilon_0)!}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\cdots\varepsilon_n!},\qquad\frac{(i-\eta_0)!}{\eta_1!\,\eta_2!\cdots\eta_p!}$$

sind mit Rücksicht auf die Dimensionsregeln (7a)

(7a) $\quad i - \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n, \qquad i - \eta_0 = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_p,$

nichts anderes, als die zu $i - \varepsilon_0$, $i - \eta_0$ gehörigen, der Zerlegung dieser natürlichen Zahlen in die Summanden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, resp. $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p$ zugeordneten Polynomialkoeffizienten

$$\binom{i-\varepsilon_0}{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n}, \quad \binom{i-\eta_0}{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p}.$$

Damit gewinnt die Formel (XII) die einfache Struktur:

(XII′) $$\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_p}$$
$$= i!\binom{\mu}{i-\varepsilon_0}\binom{\nu}{i-\eta_0}\binom{i-\varepsilon_0}{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n}\binom{i-\eta_0}{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p}. \text{*)}$$

Man bemerke noch, daß bei der Einsetzung dieser Werte in die Reihenentwickelung (VI) von $F(x)$ der erste Faktor $i!$ in (XII′) sich jeweils forthebt.

Die Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse liefert den grundlegenden Satz:

Satz I. *Sind*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_p x^p,$$
$$h(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_q x^q, \cdots$$

vorgelegte binäre Urformen der Ordnungen $n, p, q \cdots$ mit einer komplexen Variabeln x und beliebigen komplexen Koeffizienten — nur daß $a_0, b_0, c_0, \cdots$ von Null verschieden angenommen werden —; bedeuten ferner $\mu, \nu, \varkappa, \cdots$ beliebige konstante komplexe Exponenten, und ∇ den linearpartiellen Differentiationsprozeß:

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} i a_i \frac{\partial}{\partial a_{i-1}} + \sum_{k=1}^{p} k b_k \frac{\partial}{\partial b_{k-1}} + \sum_{l=1}^{q} l c_l \frac{\partial}{\partial c_{l-1}} + \cdots,$$

so gestattet das Produkt $F(x) = f^\mu(x)\, g^\nu(x)\, h^\varkappa(x) \cdots$ die Entwickelung:

$$F(x) = D_0 + \frac{x}{1!} \quad D_1 + \frac{x^2}{2!} \quad D_2 + \cdots + \frac{x^i}{i!} \quad D_i + \cdots$$
$$= D_0 + \frac{x}{1!}\nabla D_0 + \frac{x^2}{2!}\nabla^2 D_0 + \cdots + \frac{x^i}{i!}\nabla^i D_0 + \cdots,$$

wo $D_0 = a_0^{-\mu} b_0^{-\nu} c_0^{-\varkappa} \cdots$, und die Reihe sicher konvergiert innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt, der durch die nächstgelegene Wurzel von $f g h \cdots$

---

*) Schreibt man überdies die Urformen (2) auch in den Koeffizienten nichthomogen, d. h. setzt $a_0 = b_0 = 1$, so fällt D_i mit Z_i zusammen, die Differenzen $i - \varepsilon_0$, $i - \eta_0$ werden ersetzt durch

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n, \quad \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_p,$$

und die Exponenten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \eta_1, \cdots, \eta_p$ haben dann *lediglich* der Gewichtsrelation (7b) zu genügen.

hindurchgeht. Setzt man $D_i = Z_i a_0^{\mu-i} b_0^{\nu-i} c_0^{\pi-i} \cdots$, *so ist* Z_i *eine ganz-rationale homogene und isobare Form der* $a, b, c, \cdots$, *in diesen Koeffizientenreihen je von der Dimension i und vom Gesamtgewicht i. Der numerische Faktor irgend eines diesen Bedingungen genügenden Potenzproduktes von* $\frac{Z_i}{i!}$,

$$a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} \, b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \cdots b_p^{\eta_p} \, c_0^{\zeta_0} c_1^{\zeta_1} \cdots c_q^{\zeta_q} \cdots$$

wird erhalten, wenn man das Produkt der Binomialkoeffizienten

$$\binom{\mu}{i-\varepsilon_0}, \ \binom{\nu}{i-\eta_0}, \ \binom{\pi}{i-\zeta_0}, \cdots$$

multipliziert mit dem Produkte der Polynomialkoeffizienten

$$\binom{i-\varepsilon_0}{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n}, \ \binom{i-\eta_0}{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p}, \ \binom{i-\zeta_0}{\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_q} \cdots.$$

Es sei nicht unerwähnt, daß man diesen Satz auch hätte herleiten können durch geeignete Erweiterung eines Faà di Bruno schen*) Satzes über die explizite Darstellung der höheren Differentialquotienten einer Funktion von einer Funktion einer unabhängigen Variabeln.

Aber dieser Beweis wäre nur als eine formale Verifikation des Satzes I anzusehen, und vor allem bliebe dabei der innere Grund des Ganzen, die *Invarianz* von $F(x)$, verborgen.

Bevor der Satz I auf das Integral der Funktion $F(x)$ angewendet wird, sei noch die Wirkung eines zweiten, in der Invariantentheorie oft verwendeten Differentialoperators ∇_2 auf $F(x)$ untersucht, wo:

$$\text{(XIII)} \qquad \begin{aligned} \nabla_2 = {} & a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n} + 2a_{n-2} \frac{\partial}{\partial a_{n-1}} + \cdots + n a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} \\ & + b_{p-1} \frac{\partial}{\partial b_p} + 2b_{p-2} \frac{\partial}{\partial b_{p-1}} + \cdots + p b_0 \frac{\partial}{\partial b_1} \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

Denkt man sich die Urformen $f, g, h, \cdots$ nebst F wieder homogen geschrieben und versteht man unter $K(x_1, x_2)$ irgend eine (algebraische oder transzendente) Kovariante der Urformen, von einer endlichen Dimension d_x in den Variabeln x_1, x_2, so findet die Tatsache, daß $K(x_1, x_2)$ gegenüber einer Schiebung von der Gestalt:

---

*) Theorie der binären Formen (1876), deutsch von Walter, 1881, p. 3 f. Im Falle einer einzigen Urform $f(x)$ führt die Darstellung (XII') zu der polynomischen Reihe für f^μ; umgekehrt liefert die Ausführung der Multiplikation der einzelnen polynomischen Reihen für $f^\mu, g^\nu, h^\pi, \ldots$ formal die allgemeine Darstellung (XII'), nur daß die Aufstellung der Konvergenzbedingung auf diesem Wege Schwierigkeiten bereitet. Man vgl. noch den besonderen Fall auf p. 129

(16) $$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = l\xi_1 + \xi_2$$

absolut invariant bleibt, ihren Ausdruck in dem Bestehen der für endliche Kovarianten (s. das Zitat auf p. 116) bekannten linearen partiellen Differentialgleichung:

(XIV) $$\left(\nabla_2 - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) K = 0.$$

Für den vorliegenden Zweck, wo an die Stelle von K unsere Funktion $F = f^\mu g^\nu h^\pi \cdots$ treten soll, ist es erforderlich, die Bedingung (XIV) in nichthomogene Gestalt zu setzen. Nach dem Eulerschen Satze ist

$$x_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} = d_x K,$$

oder mit x_1 multipliziert:

(17) $$x_1^2 \frac{\partial K}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} = x_1 d_x K.$$

Setzt man hier wieder $x_1 = x$, $x_2 = 1$ und trägt das Ergebnis in (XIV) ein, so lautet (XIV) in nichthomogener Gestalt:

(XV) $$\nabla_2 K(x) \equiv x d_x K(x) - x^2 K'(x),$$

wo $K'(x)$ die Ableitung von $K(x)$ nach x bezeichnet.

Wendet man jetzt die Identität (XV) auf

$$K(x) = F(x) = f^\mu g^\nu h^\pi \cdots$$

an, so ist die Dimension d_x von F gemäß (3):

(3) $$d_x = n\mu + p\nu + q\pi \cdots,$$

und $F(x)$ genügt außer (VIII) auch der folgenden linearen partiellen Differentialgleichung:

(XVI) $$\nabla_2 F(x) \equiv (n\mu + p\nu + q\pi + \cdots) xF - x^2 F'(x).$$

Ersetzt man nunmehr wieder $F(x)$ durch seine Reihenentwicklung (VI), und berücksichtigt noch, daß $\nabla_2 D_i = \nabla_2 Z_i$, so erweist sich die Identität (XVI) als gleichwertig mit einem Rekursionsgesetze, dem man eine der beiden Gestalten geben kann:

(XVII) $$\begin{cases} \nabla_2 Z_{i+1} \equiv (i+1)(n\mu + p\nu + q\pi + \cdots - i)\, a_0 b_0 \cdots Z_i, \\ \nabla_2 D_{i+1} \equiv (i+1)(n\mu + p\nu + q\pi + \cdots - i)\, a_0 b_0 \cdots D_i. \end{cases}$$

Das ist der Inhalt von

Satz II. *Die Funktion* $F(x) = f^\mu(x) g^\nu(x) h^\pi(x) \cdots$ *des Satzes I genügt auch noch der linearen partiellen Differentialgleichung* (XVI), *oder was dasselbe ist, dem Rekursionsgesetze* (XVII).

Man kann diesen Satz aber auch ohne Kenntnis der Identität (XV) direkt aus der Darstellungsformel (XII) herleiten. Zunächst erkennt man, daß jedes Glied in $\nabla_2 Z_{i+1}$ den Faktor $a_0 b_0 \cdots$ aufweist, und daß der ver-

bleibende Faktor, bis auf einen numerischen Koeffizienten, die Struktur eines Potenzproduktes von Z_i besitzt. Den numerischen Koeffizienten selbst, wie er in (XVII) angegeben ist, gewinnt man auf einem Wege, der dem oben zum Beweise von (XII) eingeschlagenen im wesentlichen analog ist.

Nunmehr wenden wir uns zu den Integralen der Funktionen $F(x)$:

$$\text{(XVIII)} \qquad J(x) = \int^x F(x)\,dx = \int^x f_n^\mu(x)\, g_p^\nu(x)\, h_q^\pi(x) \cdots dx.$$

Aus der Entwicklung (VI) von $F(x)$ entspringt ohne weiteres die von $J(x)$:

$$\text{(XIX)} \qquad J(x) = C + \frac{x}{1!} D_0 + \frac{x^2}{2!} D_1 + \cdots + \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} D_i + \cdots$$

$$= C + \frac{x}{1!} D_0 + \frac{x^2}{2!} \nabla D_0 + \cdots + \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \nabla^i D_0 + \cdots,$$

wo C eine Integrationskonstante*) ist und die D_i die in Satz I, II angegebenen Eigenschaften besitzen. Das Konvergenzgebiet von $J(x)$ ist bekanntlich dasselbe wie das von $F(x)$ selbst. Sind die Exponenten $\mu, \nu, \pi, \cdots$ rational und entweder positiv, oder, wenn negativ, derart, daß ihr absoluter Wert unter der positiven Einheit liegt, so bleibt zwar $J(x)$ für jeden Wert von x endlich und stetig, aber die Reihe (XIX) für $J(x)$ konvergiert doch nur bis zum nächsten Verzweigungspunkt des Integranden.

Besonders beachtenswert ist der Fall, wo die Ordnung (Dimension) d_x von $F(x)$:

$$\text{(31)} \qquad d_x = n\mu + p\nu + q\pi + \cdots$$

den Wert -2 hat. Alsdann ist das Integral $J(x)$ *selbst*, wie im speziellen Falle (I) das elliptische Integral erster Gattung, eine *Kovariante* der Urformen $f, g, h, \cdots$, von der Dimension Null in x. Für diesen Fall ist die Identität (XVI) auf $J(x)$ anwendbar, die sich reduziert auf:

$$\text{(XX)} \qquad \nabla_2 J(x) = -x^2 J'(x) = -x^2 F(x).$$

Überdies erfreut sich für $d_x = -2$ $J(x)$, als Kovariante der $f, g, h, \cdots$, noch einer *spezifischen* Eigenschaft, die für die Reihenentwicklung (XIX) von wesentlicher Bedeutung ist.

Man denke sich vermöge einer geeigneten linearen Substitution S von x eine oder mehrere der Urformen $f, g, h, \cdots$ auf eine gewisse *kanonische* Gestalt gebracht, also etwa im Falle (I) des elliptischen

*) Bezeichnet α die untere Grenze des Integrals, so ist

$$C = \int_\alpha^0 F(x)\,dx.$$

Integrals erster Gattung, auf eine der bekannten Normalformen und es soll $J(x)$ in eine korrespondierende „kanonische“ Reihe entwickelt werden.

Dann ist es nur erforderlich, in der Reihe (XIX) die gemeinte lineare Substitution S direkt vorzunehmen, während es nicht nötig ist, dieser Substitution die mit allgemeinen Koeffizienten vorgelegten Urformen zuvor explizite zu unterwerfen.

Somit gilt:

Satz III. *Die Reihenentwicklung für das Integral $J(x)$ der Funktion $F(x) = f^{\mu}(x)g^{\nu}(x)h^{\pi}(x)\cdots$ fließt direkt aus* (VI) *durch Integration. Ist im besonderen die Dimension d_x von $F(x)$ gleich -2, so ist $J(x)$ selbst eine Kovariante der $f, g, h, \cdots$; $J(x)$ genügt dann noch der spezifischen linearen partiellen Differentialgleichung* (XX), *und wenn $J(x)$ für eine gewisse kanonische Gestalt der Urformen $f, g, h, \cdots$ in eine Reihe entwickelt werden soll, so genügt es, die bezügliche lineare Substitution von x direkt in der Reihe* (XIX) *vorzunehmen.*

Von dem Satze III lassen sich, je nach der Gestalt von $F(x)$, zahlreiche Anwendungen machen.

Ist zuvörderst der Integrand *rational* in x, sind also die Exponenten $\mu, \nu, \pi, \cdots$ ganzzahlig, so ergeben sich, auch wenn die Koeffizienten der Urformen $f, g, h, \cdots$ irgend welche partikulären Werte besitzen, die zugehörigen Reihenentwicklungen sofort, ohne daß man, wie es sonst üblich ist, auf Partialbruchzerlegungen rekurrieren muß.

Ist umgekehrt $F(x)$ eine rationale Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$, und wird die Zerlegung des Nenners $g(x)$ in Linearfaktoren, die in beliebiger Vielfachheit auftreten mögen, als *bekannt* vorausgesetzt, so führt die Formel (XII) resp. (XIX) mit Leichtigkeit zu den allgemeinen Partialbruchentwicklungen, die ich an anderem Orte*) auf ziemlich mühsamem Wege erhalten habe.

Sodann lassen sich die allgemeinsten elliptischen Integrale, insbesondere die der drei Normalgattungen, der Formel (XIX) unterwerfen, weiterhin die hyperelliptischen Integrale, u. s f.

Um den Umfang dieser Abhandlung nicht über Gebühr auszudehnen, beschränken wir uns auf das elliptische Integral erster Gattung $J(x)$ (I) und seine am häufigsten gebrauchten Normalformen, die Legendre-Jacobische und die Weierstraßsche. Gibt man dem Integral $J(x)$ (I) der Bequemlichkeit halber die untere Grenze Null, so geht die allgemeine Entwicklung (XIX) in diesem Falle über in:

---

*) S. meine „Integralrechnung“, Leipzig 1905, §§ 29, 30, sowie Archiv für Math. Phys. (3) 10, 1906, p. 239; vgl. auch G. Zemplén, Archiv für Math. Phys. (3) 8, 1905, p. 214.

$$\text{(XXI)} \quad J(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1 x + \cdots + a_4 x^4}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}}$$

$$= x D_0 + \frac{x^2}{2!} D_1 + \cdots + \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} D_i + \cdots$$

$$= x \cdot \frac{1}{\sqrt{a_0}} + \frac{x^2}{2!} \nabla \frac{1}{\sqrt{a_0}} + \cdots + \frac{x^{i+1}}{(i+1)} \nabla^i \frac{1}{\sqrt{a_0}} + \cdots,$$

und umgekehrt ist durch diese Entwicklung das Integral $J(x)$ völlig definiert. Hierbei ist ∇ gemäß (IX) der Prozeß:

$$\text{(18)} \qquad \nabla = a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + 2 a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + 3 a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + 4 a_4 \frac{\partial}{\partial a_3} \cdot$$

Nach (VII) hat man, da jetzt $\mu = -\frac{1}{2}$, zu setzen:

$$\text{(19)} \qquad D_i = a^{\frac{2i+1}{2}} Z_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots),$$

und (XI) liefert für Z_i die Rekursionsformel:

$$\text{(20)} \qquad Z_{i+1} = -a_1 \cdot \frac{2i+1}{2} Z_i + a_0 \nabla Z_i,$$

die mit dem Bestehen der linearen partiellen Differentialgleichung (VIII):

$$\text{(20')} \qquad \nabla J = \frac{1}{\sqrt{f_4(x)}}$$

gleichwertig ist.

Nach (6), (7) wird:

$$\text{(21)} \qquad Z_i = \sum \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4} a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3} a_4^{\varepsilon_4},$$

wo die ε alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der beiden Relationen:

$$\text{(22a)} \qquad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = i,$$

$$\text{(22b)} \qquad 1 \cdot \varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2 + 3 \cdot \varepsilon_3 + 4 \cdot \varepsilon_4 = i$$

durchlaufen. Der numerische Koeffizient $\mathsf{A}^{(i)}$ in (21) bestimmt sich durch (XII) wegen $\mu = -\frac{1}{2}$:

$$\text{(XXII)} \qquad \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4} = \frac{(-1)^{i-\varepsilon_0}}{2^{i-\varepsilon_0}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \{2(i-\varepsilon_0)-1\}}{\varepsilon_1!\, \varepsilon_2!\, \varepsilon_3!\, \varepsilon_4!} \cdot i!\,.$$

$J(x)$ ist Kovariante von $f_4(x)$. Bedeutet daher gemäß (XIV) ∇_2 den Prozeß:

$$\text{(23)} \qquad \nabla_2 = a_3 \frac{\partial}{\partial a_4} + 2 a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + 3 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 4 a_0 \frac{\partial}{\partial a_1},$$

so genügt $J(x)$ noch der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\text{(24)} \qquad \nabla_2 J(x) \equiv -x^2 \frac{1}{\sqrt{f_4(x)}},$$

was mit Rücksicht auf (XVII) gleichbedeutend ist mit der Rekursionsformel:

$$\nabla_2 Z_{i+1} = -(i+1)(i+2)\, a_0 Z_i, \tag{25}$$

oder auch mit:

$$\nabla_2 D_{i+1} = -(i+1)(i+2)\, a_0 D_i. \tag{25'}$$

Satz IV. *Für das elliptische Integral erster Gattung gelten insbesondere die Darstellungsformeln* (XXI), (XXII), (18) *bis* (25).

Beim Legendre-Jacobi'schen Normalintegral:

$$J(x;k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{26}$$

ist zu setzen:

$$a_0 = 1,\quad a_2 = -(1+k^2),\quad a_4 = k^2;\qquad a_1 = a_3 = 0. \tag{27}$$

Von den in Z_i (21) auftretenden Potenzprodukten sind somit jetzt nur die zu berücksichtigen, für die ε_1 und ε_3 verschwinden, während nach (22) $\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_4$ die nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der beiden Relationen sind:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 = i,\qquad \varepsilon_2 + 3\varepsilon_4 = \varepsilon_0. \tag{28}$$

Hieraus folgt zunächst $2(\varepsilon_0 - \varepsilon_4) = i$, so daß, wie vorauszusehen war, i eine gerade Zahl ist, die mit $2l$ bezeichnet sei. Man drücke mittels (28) ε_0 und ε_4 durch ε_2 aus:

$$2\varepsilon_0 = 3l - \varepsilon_2,\quad 2\varepsilon_4 = l - \varepsilon_2 \quad (i = 2l). \tag{29}$$

Mithin ist auch $l - \varepsilon_2$ gerade, also l zugleich mit ε_2 gerade oder ungerade. Man unterscheide daher zunächst zwei Hauptfälle:

(a) l und ε_2 gerade; (b) l und ε_2 ungerade.

Fall (a). l gerade, $= 2n$ $(i = 4n)$; ε_2 gerade, $= 2\eta$.

Dann geht (29) über in:

$$\varepsilon_0 = 3n - \eta,\quad \varepsilon_4 = n - \eta \quad (\eta = 0, 1, \cdots, n), \tag{30a}$$

und überdies wird:

$$2i - 1 - 2\varepsilon_0 = 2(n+\eta) - 1,\quad \varepsilon_2 + \varepsilon_4 = n + \eta. \tag{31a}$$

Mit Rücksicht auf (21) und (XXII) ergibt sich so für Z_i, wenn k^2 kürzer mit ϱ bezeichnet wird:

$$\underset{(i=4n,\, k^2=\varrho)}{Z_i} = \sum_{\eta=0}^{n} \frac{(-1)^{n-\eta} \varrho^{n-\eta} (1+\varrho)^{2\eta}}{2^{n+\eta}(2\eta)!\,(n-\eta)!} \cdot 1\cdot 3\cdot 5 \cdots \{2(n+\eta)-1\} \cdot (4n)! \tag{32a}$$

Fall (b). l ungerade, $= 2n+1$ $(i = 4n+2)$; ε_2 ungerade, $= 2\eta + 1$.

Mit Rücksicht auf (29) kommt jetzt:

$$\varepsilon_0 = 3n - \eta + 1,\quad \varepsilon_4 = n - \eta \quad (\eta = 0, 1, \cdots, n), \tag{30b}$$

$$(31\text{b})\qquad 2i-1-2\varepsilon_0 = 2(n+\eta)-1, \quad \varepsilon_2+\varepsilon_4 = n+\eta+1,$$

und damit für Z_i die Entwicklung:

$$(32\text{b})\qquad \underset{(i=4n+2,\,k^2=\varrho)}{Z_i =} \sum_{\eta=0}^{n} \frac{(-1)^{n-\eta}\,\varrho^{n-\eta}\,(1+\varrho)^{2\eta+1}}{2^{n+\eta+1}(2\eta+1)!\,(n-\eta)!}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots\{2(n+\eta)+1\}\cdot(4n+2)!.$$

Bei Einsetzung der Werte von Z_i (32) in die Reihe (XXI) für $J(x,k)$ hebt sich beidemal der Faktor $i!$ weg, und es verbleibt von $(i+1)!$ noch ein Nenner $i+1$.

Die Entwicklungen (32) lassen sich in eine bequemere trigonometrische Gestalt bringen. Setzt man nämlich:

$$(33)\qquad k = \operatorname{tg}\varphi, \quad \varrho = k^2 = \operatorname{tg}^2\varphi, \quad 1+\varrho = \frac{1}{\cos^2\varphi},$$

so ergibt sich sofort:

$$\left|\begin{aligned} &(34\text{a}) && \varrho^{n-\eta}(1+\varrho)^{2\eta} = \frac{(\sin\varphi)^{2(n-\eta)}}{(\cos\varphi)^{2(n+\eta)}}. \\ &(34\text{b}) && \varrho^{n-\eta}(1+\varrho)^{2\eta+1} = \frac{(\sin\varphi)^{2(n-\eta)}}{(\cos\varphi)^{2(n+\eta+1)}}. \end{aligned}\right.$$

Dies setze man in (32a), (32b) ein, und das Ergebnis wiederum in (19′), (XXI); es sei dem Leser überlassen, die so für $J(x,k)$ entstehende Reihe explizite hinzuschreiben.

Zu einer wesentlich einfacheren und durchsichtigeren Darstellung für $J(x,k)$ gelangt man jedoch bei algebraisch-arithmetischer Weiterentwicklung der Formeln (32a), (32b).

Man entwickle $(1+\varrho)^{2\eta}$ resp. $(1+\varrho)^{2\eta+1}$ nach dem binomischen Satze, indem man sukzessive η die Werte $n, n-1, \cdots, 1, 0$ gibt, und multipliziere jeweils noch mit $\varrho^{n-\eta}$.

Sodann wird Z_i nach Potenzen von ϱ geordnet; wobei sich die beiden Fälle (a), (b) wieder in einen einzigen vereinigen:

$$(35)\qquad \underset{\binom{i=2l}{\varrho=k^2}}{Z_{2l}} = R_0^{(2l)} + \varrho R_1^{(2l)} + \varrho^2 R_2^{(2l)} + \cdots + \varrho^l R_l^{(2l)}.$$

Um das für irgend einen dieser Koeffizienten $R_s^{(2l)}$ $(s=0,1,\cdots,l)$ auf diesem Wege entstehende arithmetische Aggregat zusammenzuziehen, bedarf es eines Hilfssatzes über die Ausdehnung des binomischen Satzes auf „Fakultäten“ (in allgemeinerem Sinne).

Seien x und a beliebig gegebene reelle oder komplexe Größen, so definiere man die „Fakultät“ $[x,a]_n$ durch das Produkt:

$$(36)\qquad [x,a]_n = x(x+a)(x+2a)\cdots\{x+(n-1)a\}.$$

Bedeutet endlich y eine dritte beliebig gegebene Größe, so gilt die Identität*) (für alle Werte von x, y, a):

$$\text{(XXIII)}\quad [x,a]_n - \binom{n}{1}[x,a]_{n-1}[y,-a]_1 + \binom{n}{2}[x,a]_{n-2}[y,-a]_2$$
$$\mp \cdots + (-1)^r\binom{n}{r}[x,a]_{n-r}[y,-a]_r \pm \cdots + (-1)^n[y,-a]_n$$
$$\equiv [x-y,a]_n.$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Die Formel (XXIII) sei richtig bis zu irgend einem Index n. Um daraus deren Gültigkeit für den Index $n+1$ abzuleiten, ersetze man in der linken, für den Index $n+1$ gebildeten Seite von (XXIII) der Reihe nach jeden Binomialkoeffizienten $\binom{n+1}{r}$ durch $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}$, und vereinige sodann je zwei, mit dem nämlichen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{r}$ als Faktor behaftete Glieder. Dadurch gehen der Reihe nach die Glieder der linken Seite von (XXIII) (für den Index n) hervor, jedes noch multipliziert mit dem Faktor $x-y+na$. Ersetzt man jetzt die linke Seite von (XXIII) durch die rechte, so geht die letztere über in $[x-y,a]_{n+1}$, womit die Formel (XXIII) auch für den Index $n+1$ als richtig nachgewiesen ist. Denn für $n=0$ ist die Formel (XXIII) ersichtlich erfüllt, da man hat:

$$[x,a]_0 - [y,-a]_0 = x - y = [x-y,a]_0.$$

Bei der Anwendung von (XXIII) auf die Umgestaltung des Koeffizienten $R_s^{(2l)}$ in (35) kommt nur der besondere Fall $x=i,\ y=i-1,\ a=2$ in Betracht.

Mit Übergehung der Zwischenrechnung gewinnt man so folgenden Ausdruck für $R_s^{(2l)}$:

$$\text{(37)}\quad \underset{(i=2l)}{R_s^{(2l)}} = \frac{1}{2^{2l}}\cdot\binom{2(l-s)}{l-s}\binom{2s}{s}(2l+1)!$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\{2(l-s)-1\}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(l-s)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2s}\cdot(2l+1)!$$

Substituiert man diesen Wert von $R_s^{(2l)}$ in Z_{2l} (siehe I) (35) und sodann

*) Vgl. ähnliche Entwicklungen z. B. bei L. Saalschütz, Zeitschr. für Math. Phys. (1) 44, 1899, p. 340. Die Formel (XXIII) schreibt sich theoretisch noch bequemer, wenn man y durch $-y$ ersetzt:

$$[x,a]_n + \binom{n}{1}[x,a]_{n-1}[y,a]_1 + \binom{n}{2}[x,a]_{n-2}[y,a]_2 + \cdots + [y,a]_n = [x+y,a]_n.$$

Z_{2v} das gemäß (19), da hier $a_0 = 1$, mit D_{2l} zusammenfällt, in (XXI), so resultiert für $J(x, k)$ die Reihenentwicklung*) ($\varrho = k^2$):

$$\text{(XXIV)}\quad J(x,k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l} x^{2l+1} \varrho^s \cdot \frac{1}{2^{2l}} \cdot \frac{1}{2l+1} \cdot \binom{2(l-s)}{l-s} \binom{2s}{s}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l} x^{2l+1} \varrho^s \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\{2l-s)-1\}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\{2(l-s)\}} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2s},$$

wo für $s = 0$ der Restfaktor $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2s}$ durch Eins zu ersetzen ist. Somit reduziert sich für $\varrho = 0$, d. i. für $k = 0$, wie es sein muß, die Entwicklung (XXIV) auf die elementare des Arcussinusintegrals:

$$(38)\qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} x^{2l+1} \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2l-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2l},$$

und umgekehrt ist (XXIV) als unmittelbare Verallgemeinerung der Entwicklung (38) anzusehen**). Somit gilt der Satz:

Satz V. *Das Legendre-Jacobische Normalintegral*

$$J(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

gestattet, in direkter Erweiterung der elementarbekannten Entwicklung des Arcussinusintegrals

---

*) Hieraus geht die entsprechende Entwicklung für das Riemannsche Normalintegral

$$u = \frac{1}{2}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)}}$$

hervor, indem man x durch $\sqrt{y}$ ersetzt.

**) In der Tat kann man ohne weiteres zu (XXIV) gelangen, wenn man die beiden binomischen Reihen für

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

multipliziert und die so entstehende Reihe integriert. Die Schwierigkeit des Textes besteht darin, die spezielle Formel (XXIV) durch Spezialisierung der allgemeineren Formel (XXIII) wirklich herzustellen.

$$J(x, 0) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

die Reihenentwicklung (XXIV).

Man vergleiche hiermit die Weierstraßsche*) Entwicklung:

$$\text{(XXV)} \quad \begin{cases} J(x,k) = L_0 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\left\{L_{01}x + \frac{2}{3}L_{02}x^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}L_{03}x^5 + \cdots\right\} \\ (\varrho = k^2) \\ \qquad L_0 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varrho + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \varrho^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \varrho^3 + \cdots, \end{cases}$$

wo L_{0r} aus L_0 durch Weglassung der ersten r Glieder hervorgeht. Man hätte auch diese Entwicklung aus (XXI) und (35) ohne besondere Schwierigkeit erhalten können, wenn man die Aggregate, die je ein $R_i^{(2i)}$ bilden, in anderer Weise anordnet.

Man beachte indessen, daß im ersten Gliede rechts von (XXV) das Arcussinusintegral mit einer Potenzreihe in ϱ multipliziert erscheint, im zweiten Gliede sogar $\sqrt{1-x^2}$ multipliziert mit einer Potenzreihe in x, deren Koeffizienten wiederum Potenzreihen in ϱ sind.

Schließlich sei noch das Weierstraßsche Normalintegral:

$$(39) \qquad J(x; g_2, g_3) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

als Spezialfall von (XXI) behandelt.

Es ist jetzt:

$$(40) \qquad a_0 = -g_3, \quad a_1 = -g_2, \quad a_3 = 4; \quad a_2 = a_4 = 0.$$

Gemäß (XXII), (21), (22) sind daher:

$$(41) \qquad Z_i = \frac{\sum(-1)^{i-\varepsilon_1}}{2^{i-\varepsilon_0-2\varepsilon_3}} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\{2(i-\varepsilon_0)-1\}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_3!} \cdot g_3^{\varepsilon_0} g_2^{\varepsilon_1} \cdot i!,$$

wo sich die Summierung auf alle nichtnegativen ganzzahligen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_3$ erstreckt, die den Relationen genügen:

$$(42) \qquad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = i, \quad \varepsilon_0 = 2\varepsilon_3.$$

Man drücke ε_0 und ε_1 durch ε_3 aus, und schreibe für letzteres einfach ε, so geht (42) über in:

$$(43) \qquad \varepsilon_0 = 2\varepsilon, \quad \varepsilon_1 = i - 3\varepsilon,$$

*) S. z. B. die bekannte Schwarz-Weierstraßsche Sammlung von Formeln und Lehrsätzen . . ., p. 53 ff.

wo ε der Reihe nach die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \cdots$ bis zum größten in $\frac{i}{3}$ enthaltenen Ganzen $E\left(\frac{i}{3}\right)$ durchläuft. Damit geht Z_i (41) über in:

$$(44)\qquad Z_i = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=E\left(\frac{i}{3}\right)} \frac{(-1)^{3\varepsilon}\, 2^{4\varepsilon-i}}{\varepsilon!\,(i-3\varepsilon)!}\, 1\cdot 3\cdot 5\cdots\{2(i-2\varepsilon)-1\}\cdot g_3^{2\varepsilon} g_2^{i-3\varepsilon}\cdot i!,$$

und, weil vermöge (19):

$$(45)\qquad D_i = (-g_3)^{\frac{2i+1}{2}} Z_i,$$

so gewinnt man für $J(x;\, g_2, g_3)$ die Reihenentwicklung:

$$(46)\qquad J(x; g_2, g_3) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=E\left(\frac{i}{3}\right)} \frac{x^{i+1}}{i+1}\cdot(-g_3)^{\frac{2i+1}{2}}\cdot\frac{(-1)^{3\varepsilon}\cdot 2^{4\varepsilon-i}}{\varepsilon!\,(i-3\varepsilon)!}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots$$
$$\cdots\{2(i-2\varepsilon)-1\}\cdot g_3^{2\varepsilon}\, g_2^{i-3\varepsilon}.$$

Diese Formel läßt sich noch übersichtlicher gestalten.

Einmal spalte man rechts den Faktor $\sqrt{-g_3}$ ab und bringe ihn auf die linke Seite. Führt man sodann den der Zerlegung der Zahl $2(i-2\varepsilon)$ in die Summanden $\varepsilon,\ i-2\varepsilon,\ i-3\varepsilon$ entsprechenden Polynomialkoeffizienten $\binom{2(i-2\varepsilon)}{\varepsilon,\ i-2\varepsilon,\ i-3\varepsilon}$ ein, so nimmt (46) die Gestalt an:

$$(\mathrm{XXVI})\qquad \frac{1}{\sqrt{-g_3}}\, J(x; g_2, g_3) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=E\left(\frac{i}{3}\right)} \frac{x^{i+1}}{i+1}\cdot\frac{(-1)^{i-\varepsilon}}{2^{2(i-3\varepsilon)}}\cdot\binom{2(i-2\varepsilon)}{\varepsilon,\ i-2\varepsilon,\ i-3\varepsilon}$$
$$\cdot\, g_3^{i+2\varepsilon}\, g_2^{i-3\varepsilon}.$$

Sind x, g_2, g_3 reell, so unterscheide man zwei Fälle, je nachdem g_3 negativ oder positiv ist.

Bei negativem g_3 sind alle in (XXVI) auftretenden Größen reell.

Bei positivem g_3 wird sowohl $\sqrt{-g_3}$, wie $J(x;\, g_2, g_3)$ rein imaginär, also das Produkt reell, während auf der rechten Seite von (XXVI) wieder alles reell bleibt.

Somit gilt:

Satz VI. *Für die Weierstraßsche Normalform*

$$J(x;\, g_2, g_3) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

des elliptischen Integrals erster Gattung gelten die Formeln (40) *bis* (46), *und insbesondere die Reihenentwicklung* (XXVI).

Am Schlusse sei darauf hingewiesen, daß das befolgte Prinzip, alle Reihenentwicklungen aus der *Invarianz* der Funktion

$$F(x) = f^{\mu}(x)\, g^{\nu}(x)\, h^{\pi}(x) \cdots$$

herzuleiten, nach verschiedenen Richtungen hin ausgedehnt werden kann.

Einmal lassen sich statt der Potenzen von $f, g, h, \cdots$ andere Funktionen (z. B. Logarithmen*)) verwenden. Sodann kann man von einer einzigen Variabeln x zu mehreren aufsteigen, und entsprechend zu mehrfachen Integralen.

Drittens lassen sich aber auch die binären Urformen $f, g, h, \cdots$ durch Potenzreihen ersetzen, wenn man sich einiger Hilfssätze bedient, die neuerdings Herr Hilbert über Funktionen von unendlich vielen Variabeln aufgestellt hat.

Königsberg i. Pr., Anfang Dezember 1907.

---

*) Entwickelt man z. B. nach dem Verfahren des Textes den Logarithmus einer einzelnen Urform f, so gelangt man zu den Waringschen Potenzsummen-Formeln: auch diese erscheinen also als direkter Ausfluß der Tatsache, daß $lf(x)$ eine Kovariante von $f(x)$ ist.

On the multiple holomorphs of a group.

By

G. A. Miller of Urbana, U. S. A.

If any group K is represented as a regular substitution group its holomorph H has been defined as the group composed of all the possible substitutions which transform K into itself and involve no letters except those found in K. The holomorph has also been defined as the abstract group which is simply isomorphic with this substitution group. In the present article the former of these two definitions will be employed. If H is invariant under a larger substitution group on the same letters all the substitutions of this group which are not in H must transform K into another invariant subgroup under H. Moreover, if H involves an invariant subgroup which is similar to K without being identical with K, the substitutions which transform K into this invariant subgroup transform H into itself. In this case K is said to have a multiple holomorph, the degree of multiplicity being the number of the different invariant subgroups of H which are similar to K.

Since all the substitutions*) which are commutative with every substitution of the regular group K constitute a group K' similar to K, it follows that any non-abelian group has a multiple holomorph. Any substitution which transforms K into K' must also transform K' into K since each of these subgroups contains all the substitutions which are commutative with the other. Hence such a substitution transforms H into itself and has its square in H. The group generated by all the substitutions which transform K either into itself or into K' has been called the *double holomorph* of the non-abelian group K. The object of the present paper is to examine the abelian groups with respect to multiple holomorphs. We shall prove that if an abelian group has a multiple holomorph the degree of multiplicity is either 2 or 4. In

*) It is assumed throughout this article that the substitutions under consideration involve no letters besides those found in K.

particular, we shall prove that an abelian group whose order is not divisible by 8 cannot have a multiple holomorph. From this it follows that the assumption made by Burnside*) that an abelian group of odd order be a characteristic subgroup of its holomorph is unnecessary.

From the known fact that the group of isomorphisms of an abelian group is the direct product of the groups of isomorphisms of its Sylow subgroups, it follows that the holomorph of an abelian group is the direct product of the holomorphs of its Sylow subgroups. It is known that the holomorph of a cyclic group of odd order is a complete group and that the holomorph of the cyclic group K of order 2^m contains just one other invariant subgroup which is similar to K, whenever $m > 2$. Hence it follows that the necessary and sufficient condition that a cyclic group has a multiple holomorph is that its order is divisible by 8. If its order is divisible by 8 it has a double holomorph, and the degree of multiplicity of the holomorph of a cyclic group cannot exceed 2.

§ 1.

Abelian groups of odd order.

Let K be an abelian group of odd order and suppose that its holomorph H involves another invariant abelian subgroup K_1 which is of the same type as K. Since the substitutions which are common to K and K_1 form a characteristic subgroup of K they cannot involve any of the operators of highest order in K**). The group J which is composed of all the substitutions of H which omit a given letter is simply isomorphic with the group of isomorphisms of K and it involves an invariant substitution i_0 which transforms each operator of K into its inverse and hence is of order 2. As i_0 transforms K_1 into itself and is not commutative with any substitution of H except those of J it follows that each division of K_1 with respect to the substitutions which it has in common with K must involve a substitution of J since i^0 transforms each of these divisions into itself and the division involves an odd number of substitutions.

The commutator subgroup of the group $\{K, K_1\}$ generated by K and K_1 is composed of invariant operators under $\{K, K_1\}$. Hence any operator of J which is also in $\{K, K_1\}$ is of the same order as some commutator of $\{K, K_1\}$ and therefore its order divides the order of some operator which is common to K and K_1. As the order of the

*) Theory of groups of finite order, 1897, p. 238.

**) American Journal of Mathematics, vol. 27 (1905), p. 15.

product of such an operator into an operator of K which is not of highest order could not be equal to that of an operator of highest order in K, it follows that some operators of K_1 must be the product of an operator of J and an operator of highest order in K. As i_0 would transform such a product into itself multiplied by an operator of highest order in K while K and K_1 cannot have an operator of highest order in common, we have arrived at a contradiction by assuming that H involves another invariant subgroup which, is of the same type as K. Hence K is a characteristic subgroup of H and we have proved the theorem that *the holomorph of any abelian group of odd order is a complete group.* In particular, an abelian group of odd order cannot have a multiple holomorph and as the groups of orders 2 and 4 do not have a multiple holomorph it results that *if an abelian group has a multiple holomorph its order is divisible by* 8, and there is at least one abelian group of order $8k$, k being an arbitrary integer, which has a multiple holomorph.

§ 2.

Abelian groups of order 2^m which involve only one independent generator of highest order.

When K involves only one independent generator t of highest order 2^α all its operators of this order may be obtained by multiplying t by operators of lower order in K and t can be transformed into all its conjugates under H by means of substitutions of J which are commutative with each one of the other independent generators of K*). Suppose that H contains another invariant subgroup K_1 which is similar to K and let i be an operator of J which transforms the operators of K in the same way as an operator of highest order in K_1. The commutator subgroup C of $\{K, K_1\}$ is composed of operators which are common to K and K_1, and these are invariant under $\{K, K_1\}$. It is easy to prove that C cannot involve any operator of order 4 whenever $\alpha > 3$. If an operator of order 2^α in K_1 may be obtained by multiplying i into an operator of highest order in K this product is transformed by i_0 into itself multiplied by the square of an operator of highest order in K. In this case the common operators of K, K_1 include the square of all the operators of K since they constitute a characteristic subgroup and include the square of one operator of highest order in K. As the square of every operator of K_1 would be in K and the commutators are invariant, C must be composed of operators of order 2 in this case.

*) Annals of Mathematics, vol. 6 (1904), p. 1.

If an operator of highest order in K_1 can be obtained by multiplying i into an operator of order $2^{\alpha-1}$ in K this operator is transformed by i into itself multiplied by an operator of order $2^{\alpha-1}$ in C. As C is a characteristic subgroup of K and involves an operator of order $2^{\alpha-1}$, it involves the fourth power of every operator of K. It must therefore also involve the fourth power of every operator of K_1. Hence $2^{\alpha-1} < 2^3$; i. e. $\alpha < 4$. In other words, when $\alpha > 3$ it is not possible to obtain operators of order 2^α by multiplying i into operators of order $2^{\alpha-1}$ in K. As the products of i into the operators of lower order in K cannot be of order 2^α it has been proved that C does not involve any operator of order 4 whenever $\alpha > 3$. In what follows it will be assumed that α satisfies this condition.

It will now be proved that C is of order 2. Suppose that t was so selected that ti is in K_1 and that i transforms some operator of K into itself multiplied by a non-characteristic operator of order 2. There is an operator in J which is commutative with t and also with every operator of the quotient group of $\{K, K_1\}$ with respect to the squares of all the operators of K, while this operator transforms any given noncharacteristic operator of order 2 which is common to K and K_1 into itself multiplied by the characteristic operator of order 2 in K. This operator must therefore be non-commutative with i. As t has as many conjugates under J as ti can have and none of the operators of J are commutative with ti unless they are commutative with both t and i it follows that J cannot contain an operator which is commutative with t but not with i. Hence i cannot transform an operator of K into itself multiplied by a non-characteristic operator and we have proved the theorem: *If an abelian group K of order 2^m contains only one largest invariant exceeding 2^3 and if its holomorph H contains another invariant subgroup K_1 which is similar to K then will K and K_1 generate a group whose commutator subgroup is of order 2.*

Since ti can be transformed into all its conjugates under H by operators of J which transform into themselves all the independent generators of K besides t it follows that all the operators of highest order in K_1 transform the operators of K which are not of highest order in the same manner and hence each of the operators which is not of highest order in K_1 is commutative with every operator of K which is not of highest order. The operators of K_1 whose order is less than 2^α must therefore either be commutative with all the operators of K or transform each of these operators into its $2^{\alpha-1}+1$ power. In the former case there is always one K_1 which has just half of its operators in common with K. The latter case can present itself only when K contains a characteristic

subgroup of one-fourth its own order, which includes t^2. This is possible only when the group generated by the remaining independent generators of the group composed of all the operators of K whose orders divide $2^{\alpha-1}$ has a characteristic subgroup of half its order; i. e. this group can have only one independent generator of highest order. When this condition is satisfied H contains exactly three subgroups which can be used for K_1 since the operators of highest order in K_1 may transform the operators of highest order in K in two distinct ways. Hence the theorem: *If an abelian group K contains only one largest invariant equal to 2^α but more than one second largest invariant its holomorph contains only one other invariant subgroup which is similar to K. When K contains only one largest invariant equal to 2^α and only one second largest invariant its holomorph contains three other invariant subgroups which are similar to K.*

This theorem may also be expressed as follows: If an abelian group contains only one largest invariant equal to 2^α, but more than one second largest invariant its holomorph is the holomorph of just one other similar subgroup and hence this holomorph is invariant under a group of twice its order on the same letters but under no larger group. When it contains only one largest and only one second largest invariant its holomorph is the holomorph of three other similar subgroups and it is invariant under a group of four times its own order on the same letters but under no larger group. Under this multiple holomorph the four similar subgroups in question are transformed according to the non-cyclic transitive group of order four. The operators which are common to these four similar subgroups are composed of the squares of all their operators together with all their operators whose orders are less than the second largest invariant. These four subgroups may be divided into two pair, each pair having a subgroup of half the order of the group in common.

§ 3.

Abelian groups of order 2^m in which all the invariants are equal to each other.

We begin with the case when K contains only two independent generators of order 2^α, $\alpha > 3$. From the proof in the preceding section it follows that if the holomorph of K contains a second invariant subgroup K_1 similar to K the common operators of K, K_1 are allthe operators of K whose orders divide $2^{\alpha-1}$. With respect to these common operators K_0 the quotient group of K is evidently the four-group. Hence the substitutions of $\{K, K_1\}$ may be written as follows:

$$K_0 + K_0 t_1 + K_0 t_2 + K_0 t_3 + K i_1 + K i_2 + K i_3$$

where t_1, t_2, t_3 are operators of order 2^α in K and i_1, i_2, i_3 are commutative operators of order 2 in J. Suppose that i_1, i_2, i_3 have been so selected as to satisfy the following conditions:

$$i_1 t_1 i_1 = t_1 t_1^{2^{\alpha-1}}, \quad i_1 t_2 i_1 = t_2 t_3^{2^{\alpha-1}}, \quad i_1 t_3 i_1 = t_3 t_2^{2^{\alpha-1}},$$
$$i_2 t_1 i_2 = t_1 t_3^{2^{\alpha-1}}, \quad i_2 t_2 i_2 = t_2 t_2^{2^{\alpha-1}}, \quad i_2 t_3 i_2 = t_3 t_1^{2^{\alpha-1}},$$
$$i_3 t_1 i_3 = t_1 t_2^{2^{\alpha-1}}, \quad i_3 t_2 i_3 = t_2 t_1^{2^{\alpha-1}}, \quad i_3 t_3 i_3 = t_3 t_3^{2^{\alpha-1}}.$$

The four-group $1, i_1, i_2, i_3$ is invariant and the three operators i_1, i_2, i_3 are conjugate under J. The group

$$K' \equiv K_0 + K_0 t_1 i_1 + K_0 t_2 i_2 + K_0 t_3 i_3$$

is abelian

$$t_1 i_1 \cdot t_2 i_2 = t_2 i_2 \cdot t_1 i_1 = t_1 t_2 t_3^{2^{\alpha-1}} i_3.$$

Hence it is similar to K. It is invariant under H since

$$K_0 t_\beta i_\beta \ (\beta = 1, 2, 3)$$

is composed of all the operators of order 2^α in $K i_\beta$ which are both transformed into their $2^{\alpha-1}+1$ powers by operators of order 2^α in K and also transform these operators into the same powers. Hence it has been proved that the holomorph of K contains at least one other invariant subgroup which is similar to K. That is, the holomorph of K is also the holomorph of K'. We proceed to prove that H does not contain another invariant subgroup which is similar to K.

There are 15 operators of order 2 in J which transform each operator of K_0 into itself and the remaining operators of K either into themselves or into themselves multiplied by an operator of order 2 in K_0. Three of these have been considered and it has been proved that they give rise to at least one invariant subgroup K' which can be used for K_1. That they cannot lead to more than one such subgroup follows from the fact that J contains operators which transform t_2 into itself and transform i_1 into i_3. Hence $t_2 i_1$ has more conjugates under J than t_2 has. Similarly it may be observed that $t_3 i_1$ has more conjugates under J than t_3 has. That is: i_1, i_2, i_3 lead to only one invariant subgroup which is similar to K and not identical with K. If three others would lead to such an invariant subgroup they would form a complete set of conjugates under J. It is readily seen that no such set exists; for 6 of them are separately commutative with half the operators of K and transform half of the remaining operators of K into their $2^{\alpha-1}+1$ powers. As these form a complete set of conjugates they may be directly rejected.

Three of the remaining 6 operators of J are separately commutative with half the operators of K and transform the remaining operators of K into themselves multiplied by the $2^{\alpha-1}$ power of one of these invariant operators of order 2^{α}. If we call these operators i_1, i_2, i_3, the operators of the group generated by them and K can be arranged in exactly the same way as in the case considered above, and there is again one invariant subgroup which is conformal with K while the other two are conjugate under J. As this invariant subgroup is non-abelian these three conjugate operators of J do not give rise to a group which may be used for K.

Twelve of the possible 15 operators have now been considered. As one of the remaining ones is invariant under J there cannot be another set of three conjugates under J and we have therefore proved the following theorem: *The holomorph of an abelian group K generated by two independent operators of order 2^{α}, $\alpha > 3$, contains one and only one other invariant subgroup which is similar to K.* Hence the holomorph of K is invariant under a substitution group of twice its own order but not under any larger group on the same letters.

Having disposed of the case when K contains 2 equal invariants we proceed to the consideration of the general case when K contains $n > 2$ such invariants and begin with the hypothesis that some operator of order 2^{α} in K_1 is commutative with no operator of K except those of K_0; i. e., the operators whose orders are less than 2^{α}. The operator of J which transforms the operators of K in the same manner as the given operator of K_1, will be denoted by i. As the group K/K_0 is composed of operators of order 2 besides the identity, the isomorphisms under consideration may be associated with the isomorphisms of the abelian group of order 2^n and of type $(1, 1, 1, \cdots)$, the operator of J which transforms every operator of K into the same power corresponding to the identity. If K_1 exists it must correspond to a system of $2^n - 1$ conjugates which form a complete system under the group of isomorphisms (J_0) of the group of type $(1, 1, 1, \cdots)$ and of order 2^n. It is therefore only necessary to prove that J_0 cannot have such a complete system of conjugates when $n > 2$.

To prove this theorem we may first observe that J_0 cannot have a complete system of $2^n - 1$ operators of odd order. If such a system existed each of its operators would be invariant under a Sylow subgroup of order 2^{λ} in J_0. Such a Sylow subgroup is composed of one transitive constituent of each of the orders $2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{n-1}$. As a substitution s cannot be commutative with every substitution of a transitive group on the same letters whose order is a power of a prime unless the order of s is a power of the same prime, and as the transitive constituents of the

Sylow group under consideration cannot be permuted, it has been proved that every operator of odd order in J_0 has an even number of conjugates under J_0. To complete the proof of the theorem under consideration it is only necessary to prove that every operator of order 2 has more than $2^n - 1$ conjugates under J_0. This follows almost directly from the fact that such an operator must be commutative with more than 2 operators of the group of type $(1, 1, 1, \cdots)$ since J_0 is positive, being simple. The operator must therefore have more than $2^n - 1$ conjugates under J_0 since the number of subgroups of order 2^α, $1 < \alpha < n-1$, in a group of the given type is greater than $2^n - 1$. If this operator of order 2 is commutative with 2^{n-1} operators of the given group it evidently has more than $2^n - 1$ conjugates.

It remains to consider the cases when i is commutative with some operator of order 2^α in K. When i is commutative with two or more independent generators these could be selected in at least $2^n - 1$ ways and as this selection would not determine i it would have more than $2^n - 1$ conjugates under J. Similarly i would have more than $2^n - 1$ conjugates if it were commutative with only one of the independent generators of K. Hence we have established the theorem: *If an abelian group K of order 2^m is generated by $n > 2$ independent operators of order 2^α, $\alpha > 3$, its holomorph cannot involve another invariant subgroup which is similar to K.*

§ 4.

Conclusion.

When K contains two equal largest invariants which are equal to 2^α, $\alpha > 3$, together with one or more smaller invariants it may be proved just as in § 2 that the commutator subgroup of $\{K, K_1\}$ is the characteristic subgroup of order 4 in K. If K_0 represents all the operators which are not of highest order in K, the considerations employed at the beginning of the preceding section prove that H contains at least one subgroup which may be used for K_1. To prove that it cannot contain more than one such subgroup it is only necessary to observe that the operators of J which would transform the operators of K in the same manner as those of highest order in such a subgroup, could not form a complete set of conjugates under J. This statement follows almost directly from the fact that an operator of order 2^α in K can be transformed into one-third of the operators of order 2^α by means of operators of J which are commutative with each of the independent generators of K except those of order 2^α and are also commutative with each operator of the characteristic subgroup of order 4 in K.

In what precedes it was assumed that the largest invariant in K exceeds 8. It is not difficult to prove that all of the results are true even when the largest invariant is 8. In fact, the reason for assuming this largest invariant greater than 8 was to make it easier to prove that each of the commutators of $\{K, K_1\}$ must be of order 2 if it is not the identity. We shall now prove that the order of such a commutator could not exceed 2 even when the largest invariant in K is 8. In this case the J of K would involve only two invariant operators whose degree is equal to the order of K diminished by 2. One of these transforms each operator of K into its inverse while the other transforms each of these operators into its third power. As an operator which transforms K into K_1 may be so selected as to transform J into itself, and, as J is also the group of isomorphisms of K_1, it follows that the two given invariant operators of J are either commutative with this operator or are transformed among themselves by it. As each of these invariant operators of J transforms operators of order 8 in K into themselves multiplied by operators of order 4 while it transforms operators of order 4 in K into themselves multiplied by operators of order 2, it must have the same effect on the operators of K_1. Hence it results that an operator of order 8 in K_1 is obtained by multiplying an operator of J into an operator of order 8 in K. That is, the square of every operator of K and of K_1 is among the common operators of K and K_1 and hence all the commutators of $\{K, K_1\}$ are of order 2.

It remains yet to consider the case when K contains operators of order 4 but of no higher order. In this case J contains only one invariant operator i_0 and hence i_0 must also transform each operator of K_1 into its inverse. As i_0 has exactly as many conjugates under H as there are independent generators of order 4 in K, it follows that the operators of K and K_1 have the same squares. Since the common operators of $\{K, K_1\}$ are of order 2, besides the identity, the operators of J contained in $\{K, K_1\}$ are all of order 2. Let i be such an operator and suppose that ti is in K_1, t being an operator of order 4 in K. As i_0 is not commutative with ti it must transform it into its inverse. That is, ti is of order 4 and $t^{-1}i = (ti)^{-1} = it^{-1}$. Hence t and i are commutative. Moreover, all the operators of order 4 in K_1 are obtained by multiplying some i into an operator of order 4 in K.

When K has independent generators of order 2 it contains two characteristic subgroups besides the identity but it contains only one such subgroup when it does not involve any independent generator of order 2*).

*) American Journal of Mathematics, vol. 27 (1905), p. 15.

As the common operators of K and K_1 form a characteristic subgroup of K and as i is commutative with an operator of order 4 it follows that the common operators of K, K_1 cannot involve all the operators of order 2 in K when K contains only one highest invariant. Moreover, it follows from the preceding section that K could not contain two or more invariants equal to 4 and that the operators of order 2 in K_1 are commutative with the operators of this order in K. These results lead to the theorem: *If an abelian group K of order 2^m involves no operators whose orders exceed 4 its holomorph cannot involve any other invariant subgroup which is similar to K except when K is of type* (2, 1). In this special case H contains only one subgroup which can be used for K_1. There is another invariant subgroup in H, which is of the same type as K but it does not occur in the form of a regular group and hence is not similar to K as a substitution group.

If we bear in mind that the holomorph of any abelian group is the direct product of the holomorphs of its Sylow subgroups and that the holomorph of an abelian group of odd order is a complete group we may state the preceding results as follows: If the holomorph of any abelian group K contains four invariant subgroups which are similar to K then the Sylow subgroup of order 2^m in K contains just one invariant equal to 2^a, $a > 2$, and just one second largest invariant. The holomorph of K cannot contain more than four invariant subgroups which are similar to K nor can it contain exactly three such subgroups. The holomorph of K contains exactly one other invariant subgroup similar to K when one of the following conditions is satisfied: 1) The Sylow subgroup of order 2^m in K is of type (2, 1); 2) This Sylow subgroup is cyclic and $m > 2$; 3) The Sylow subgroup of order 2^m contains only one largest invariant exceeding 4 but more than one second largest invariant; 4) This Sylow subgroup contains exactly two largest invariants which exceed 4. In all other cases the holomorph of K contains no subgroup which is invariant and similar to K except K itself.

Preisausschreiben
der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen
für den Beweis des Fermatschen Satzes.

Auf Grund des von dem verstorbenen Herrn Dr. Paul Wolfskehl in Darmstadt uns zugewendeten Vermächtnisses wird hiermit ein Preis von 100000 Mk., in Worten: „Einhunderttausend Mark", für denjenigen ausgesetzt, dem es zuerst gelingt, den Beweis des großen Fermatschen Satzes zu führen. Herr Dr. Wolfskehl bemerkt in seinem Testamente, daß Fermat (siehe z. B. Oeuvres de Fermat, Paris 1891, t. I p. 291, observ. II) mutatis mutandis die Behauptung aufgestellt hat, daß die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist für alle diejenigen Exponenten λ, welche ungerade Primzahlen sind. Dieser Fermatsche Satz ist entweder im Sinne Fermats allgemein oder, in Ergänzung der Untersuchungen von Kummer (Crelles Journal 40, S, 130 ff., Abh. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1857), für alle die Exponenten λ zu beweisen, in denen er überhaupt Geltung hat. Über weitere Literatur vergleiche man: Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV (1894—95) § 172—173, und Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 1 (Arithmetik und Algebra), Teil 2 (1900—1904) I C 4 b, S. 713.

Die Aussetzung des Preises erfolgt unter folgenden näheren Bedingungen:

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen entscheidet frei darüber, wem der Preis zuzuerkennen ist. Sie lehnt die Annahme jeder Manuskriptsendung ab, die auf die Bewerbung um den Preis für den Fermatschen Satz Bezug hat; sie berücksichtigt für die Preiszuteilung lediglich solche mathematische Abhandlungen, die in periodischen Zeitschriften, als Monographien oder in Buchform im Buchhandel käuflich erschienen sind. Die Gesellschaft stellt dem Verfasser solcher Abhandlungen anheim, etwa fünf gedruckte Exemplare davon an sie einzusenden.

Außer Betracht bleiben für die Verleihung des Preises solche Arbeiten, die in einer Sprache gedruckt sind, welche den zur Beurteilung der Arbeit berufenen Fachgelehrten unverständlich ist. An die Stelle solcher Arbeiten können vom Verfasser als richtig anerkannte Übersetzungen treten.

Die Gesellschaft lehnt alle Verantwortlichkeit für eine Nichtberücksichtigung von Arbeiten ab, die nicht zu ihrer Kenntnis gelangt sind, desgleichen für alle Irrtümer, die daraus entspringen könnten, daß der wirkliche Verfasser der Arbeit oder eines Teiles derselben als solcher der Gesellschaft unbekannt geblieben ist.

Sie behält sich für den Fall, daß an der Lösung der Aufgabe mehrere Personen beteiligt sind oder die Lösung durch die Arbeiten mehrerer Gelehrter herbeigeführt worden ist, freieste Entscheidung, insbesondere auch die Teilung des Preises nach ihrem Ermessen vor.

Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft erfolgt frühestens zwei Jahre nach der Veröffentlichung der zu krönenden Abhandlung. Es soll innerhalb dieses Zeitraumes deutschen und ausländischen Mathematikern Gelegenheit geboten werden, über die Richtigkeit der durch die Veröffentlichung bekannt gewordenen Lösung sich zu äußern.

Ist der Preis durch die Gesellschaft zuerkannt, so wird davon den Berechtigten durch den vorsitzenden Sekretär im Namen der Gesellschaft Mitteilung gemacht und solches öffentlich an allen denjenigen Orten bekannt gegeben werden, an denen der Preis im letzten Jahre ausgeschrieben war. Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft ist unanfechtbar.

Die Auszahlung des Preises erfolgt an den Berechtigten innerhalb dreier Monate nach seiner Zuerkennung durch die Königliche Universitätskasse in Göttingen oder auf Gefahr und Kosten des Empfängers an einem anderen von ihm zu bezeichnenden Orte, und zwar wird das vermachte Kapital je nach der Wahl der Gesellschaft bar oder in den hierfür hinterlegten Papieren gegen rechtsgültige Quittung zur Auszahlung gebracht. Die Auszahlung des Preises kann durch Aushändigung der hinterlegten Wertpapiere auch dann erfolgen, wenn deren Kurswert die Summe von 100000 Mark nicht mehr erreichen sollte.

Falls der Preis bis zum 13. September 2007 nicht zuerkannt ist, können Ansprüche auf ihn nicht mehr erhoben werden.

Mit dem heutigen Tage tritt die Wolfskehlsche Preisstiftung unter den vorstehend angegebenen Bedingungen in Kraft.

Göttingen, den 27. Juni 1908.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik.

Von

Ernst Jacobsthal in Berlin.

Vorwort.

Die Begründung der arithmetischen Eigenschaften der transfiniten Ordnungszahlen ist von Georg Cantor auf einem nicht völlig einheitlichen Wege gegeben worden.*) Die Addition und Multiplikation und die Gesetze, denen diese beiden Operationen unterworfen sind, stützt Cantor auf mengentheoretische Verknüpfungen. Es wird zurückgegangen auf die Definition der Ordnungszahlen durch wohlgeordnete Mengen; zwei oder mehr derartige Mengen werden nach bestimmten Regeln komponiert, und die Ordnungszahl der resultierenden wohlgeordneten Menge wird als die Summe oder das Produkt der den Komponenten entsprechenden Ordnungszahlen bezeichnet.

Um den Potenzbegriff zu erhalten, hat Cantor einen anderen Weg eingeschlagen; es ist das — kurz gesprochen — der Weg der transfiniten Induktion.

Beide Methoden haben ihre Vorzüge. Da die erste Methode aus derjenigen Quelle schöpft, aus der sowohl der Ordinalzahl- als auch der Kardinalzahlbegriff fließt, so ist sie besonders geeignet, die Eigenschaften der Ordinalzahlen nutzbar zu machen für Fragen, die die Kardinalzahlen betreffen. So hat F. Hausdorff den Potenzbegriff nach der ersten Methode definiert**) und G. Hessenberg aus dieser Definition einen außerordentlich kurzen und einfachen Beweis des Satzes über die Multiplikation zweier Alefs abgeleitet.***)

---

*) G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann. Bd. 49.

**) F. Hausdorff: 1) Berichte der Math.-Phys. Klasse der kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Bd. LVIII, 26. II. 1906. Untersuchungen über Ordnungstypen, I. Die Potenzen von Ordnungstypen. 2) Math. Ann., Bd. 65. Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen.

***) G. Hessenberg: Potenzen transfiniter Ordnungszahlen. Jahresberichte der Deutschen Mathem.-Vereinigung, Bd. 16. Heft 2. Wir zitieren diese Arbeit mit: P. t. O.

Dagegen hat die zweite Methode, die einen mehr arithmetisch-funktionalen Charakter zeigt, den Vorzug, die den Operationen wesentlichen Eigenschaften zum Zwecke der Definition an die Spitze zu stellen und deutlich die arithmetischen Voraussetzungen hervortreten zu lassen, die den Operationen und ihren Gesetzen zugrunde liegen. Und vor allem zeigt sich, daß man bei diesem Verfahren eine ganze Reihe analoger Sätze über Summen, Produkte und Potenzen von Ordnungszahlen auf allgemeiner funktionaler Grundlage mit einem Schlage beweisen und dadurch zugleich die eigentlichen Quellen und Voraussetzungen dieser Sätze und den Grund dieser Analogien kennen lernen kann. Ein sehr wesentlicher Vorteil des induktiven Definitionsverfahrens scheint mir aber auch darin zu liegen, daß es leicht ist, mit Hilfe dieses Verfahrens zu Operationen oder Funktionen mit vorgeschriebenen Eigenschaften zu gelangen.

Diese Methode setzt nur die beiden folgenden Sätze über Ordnungszahlen voraus:

A) *Jede Menge*) von Ordnungszahlen ist wohlgeordnet.*

B) *Zu jeder Menge von Ordnungszahlen α gibt es eine Zahl μ, die für jedes dieser α die Bedingung $\mu > \alpha$ erfüllt.*

Nach A) gibt es dann ein kleinstes derartiges μ, das wir mit $\bar{\alpha}$ bezeichnen. Gibt es unter den gegebenen Zahlen α keine größte, dann hat $\bar{\alpha}$ keine unmittelbar vorhergehende Zahl, und $\bar{\alpha}$ heißt dann der *Limes* der Zahlen α, in Zeichen: $\bar{\alpha} = \lim \alpha$. Diese Limeszahl $\bar{\alpha}$ erfüllt die beiden charakteristischen Bedingungen:

a) *Wenn für eine Zahl β jedes α kleiner als β, d. h. wenn $\alpha < \beta$ ist, dann ist $\bar{\alpha} \leqq \beta$.*

b) *Wenn $\beta < \bar{\alpha}$ ist, dann gibt es ein α, so daß $\beta < \alpha < \bar{\alpha}$ ist.*

Den Limes der endlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \cdots$ bezeichnet man mit ω**); diese Zahl ist die erste Limeszahl.

Im folgenden wird viel benutzt der Satz von der *transfiniten Induktion*. Er lautet***): *Wenn eine Behauptung $\varphi(\alpha)$ folgenden Bedingungen genügt:*

1) $\varphi(\alpha)$ ist richtig für $\alpha = \beta$,

2) aus der Richtigkeit von $\varphi(\alpha)$ für jedes der Bedingung $\beta \leqq \alpha < \alpha'$ genügende α folgt auch die Richtigkeit von $\varphi(\alpha')$,

so ist $\varphi(\alpha)$ für jedes $\alpha \geqq \beta$ richtig.

---

*) Wir legen den von Zermelo eingeführten Mengenbegriff zugrunde. Math. Annalen, Bd. 65: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.

**) Transfinite Zahlen bezeichnen wir mit griechischen, endliche Zahlen mit lateinischen Buchstaben.

***) Man vgl. G. Cantor, l. c. pag. 231 f., F. Hausdorff, pr. l. c. pag. 127 f. und A. Schoenflies: Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Jahresberichte der Deutschen Mathem.-Vereinigung, Bd. 8. pag. 45.

Denn gäbe es Zahlen $\alpha > \beta$, für die $\varphi(\alpha)$ falsch wäre, so gäbe es unter ihnen nach A) eine kleinste Zahl α'. Es wäre also $\varphi(\alpha')$ falsch, aber $\varphi(\alpha)$ richtig für jedes der Bedingung $\beta \leqq \alpha < \alpha'$ genügende α. Da das 2) widerstreitet, muß $\varphi(\alpha)$ richtig sein für jedes $\alpha \geqq \beta$.

Mit Hilfe dieses Satzes von der transfiniten Induktion werden in § 1 Operationen oder Funktionen zweier Variabeln definiert, unter denen als ganz spezielle Fälle die Addition, Multiplikation und Potenzierung enthalten sind. Der Verlauf dieser Funktionen läßt sich durch Aufstellung von Ungleichungen in gewisser Weise beschreiben; es zeigt sich, daß für jede derartige Operation gewisse Zahlen — *Hauptzahlen* der Funktion nennen wir sie — von hervorragender Bedeutung sind, die das eigentümliche Verhalten dieser Funktionen charakterisieren und deren Studium für die Untersuchung der Funktionen wichtig ist. Doch will ich an dieser Stelle keine Einzelheiten hervorheben. — In den folgenden Paragraphen*) werden speziell die Addition, die Multiplikation und Potenzierung als Anwendung der allgemeinen Prinzipien behandelt. Von den hier sich bietenden Spezialfragen erwähne ich nur die, die sich auf den Begriff der Primzahl und auf die Divisoren und Vielfachen gegebener Zahlen beziehen; gerade für diese Fragen sind die Untersuchungen wichtig, die die oben erwähnten Hauptzahlen betreffen. Es zeigt sich, daß unter allen betrachteten Operationen die Addition eine ausgezeichnete Stellung einnimmt. Ist die endliche Zahlentheorie multiplikativer Art, so sind es im Bereich der transfiniten Zahlen die additiven Gesetze, denen eine entsprechende Bedeutung zukommt. Diese Vollkommenheit und durchsichtige Gesetzmäßigkeit tritt bei den multiplikativen Formeln nicht immer auf. Es liegt das zum Teil an der Ungültigkeit des kommutativen Gesetzes; die Vollkommenheit der additiven Gesetze wird, trotzdem auch hier das kommutative Prinzip nicht gilt, gewährleistet durch die charakteristische Eigenschaft der additiven Hauptzahlen, für die additive Operation Primzahlen zu sein.

§ 1.

Funktionen transfiniter Variabeln.

Bedeutet α eine beliebige Ordnungszahl, dann bezeichnen wir die auf α unmittelbar folgende Zahl mit $s(\alpha)$.

Es sei nun β_0 eine bestimmte Ordnungszahl und jeder Ordnungszahl $\alpha \geqq \beta_0$ sei eine eindeutig bestimmte Ordnungszahl zugeordnet, d. h. es sei

*) § 3 enthält als Fortsetzung von § 1 allgemeine Untersuchungen; die in § 2 entwickelte Addition wird hier benutzt, und es zeigt sich, daß sie allen anderen Funktionen gegenüber eine besondere Stellung einnimmt.

eine Funktion $w(\alpha)$ gegeben, die für jeden Wert $\alpha \geqq \beta_0$ eindeutig definiert sei, wobei die Funktionswerte wieder Ordnungszahlen sind; $w(\alpha)$ *besitze die Eigenschaft, beständig zu wachsen;* es gelte also stets:

(a) *aus* $\alpha > \alpha' \geqq \beta_0$ *folge* $w(\alpha) > w(\alpha')$.

Unter dieser Voraussetzung kann $w(\alpha)$ nach unten hin abgeschätzt werden. Denn es gilt

Satz I. *Bedeutet* λ_0 *die kleinste nicht unterhalb* β_0 *gelegene Zahl, für die* $w(\lambda_0) \geqq \lambda_0$ *ist, dann ist* $w(\alpha) \geqq \alpha$ *für jedes der Bedingung* $\alpha \geqq \lambda_0$ *genügende* α.

Dieser Satz ist evident für die Funktion $w(\alpha) = s(\alpha)$, da ja $s(\alpha) > \alpha$ ist für $\alpha \geqq 0$. In § 2 benutzen wir nun gerade diese Funktion $w(\alpha) = s(\alpha)$. Also sind alle Folgerungen, die wir aus I ziehen, für den Inhalt von § 2 als bindend anzusehen. Es wird I in seiner Allgemeinheit erst hinterher mit den in § 2 entwickelten Hilfsmitteln bewiesen werden. — Wir können hier jedenfalls ohne Schwierigkeit einen Teil von I beweisen, nämlich folgendes: ist für eine Zahl $\xi \geqq \beta_0$ die Ungleichung $w(\xi) \geqq \xi$ erfüllt, dann ist $w(\alpha) \geqq \alpha$ für jedes $\alpha \geqq \xi$.

Nach dem Satz von der transfiniten Induktion ist nur zu zeigen, daß $w(\alpha') \geqq \alpha'$ ist, falls für jedes der Beziehung $\alpha' > \alpha \geqq \xi$ genügende α stets $w(\alpha) \geqq \alpha$ ist. Ist nun α' keine Limeszahl, d. h. $\alpha' = s(\alpha'') > \alpha'' \geqq \xi$, dann ist $w(\alpha'') \geqq \alpha''$, also nach (a):

$$w(\alpha') > w(\alpha'') \geqq \alpha'', \quad \text{d. h.} \quad w(\alpha') \geqq s(\alpha'') = \alpha'.$$

Ist aber α' Limeszahl, dann besitzt wegen (a) die Zahlenfolge $w(\alpha)$ $(\xi \leqq \alpha < \alpha')$ einen Limes ϑ und da nach (a) $w(\alpha') > w(\alpha)$ ist, so ist $w(\alpha') \geqq \vartheta$; andererseits ist nach Voraussetzung für jedes dieser α auch $w(\alpha) \geqq \alpha$, also $\vartheta = \lim\limits_{\alpha < \alpha'} w(\alpha) \geqq \lim \alpha = \alpha'$. Somit ist $w(\alpha') \geqq \vartheta \geqq \alpha'$.

Aus diesem Beweise geht hervor, daß es, um I in seinem ganzen Umfange zu beweisen, nur noch nötig ist, die Existenz *einer* Zahl ξ nachzuweisen, die der Beziehung $w(\xi) \geqq \xi$ genügt. Das wird eben später nachgeholt werden.

Um nun unsere Funktionen zweier Variabeln definieren zu können, müssen wir außer $w(\alpha)$ noch eine Funktion zweier Variabeln, die eine einfache Eigenschaft hat, als gegeben annehmen.

Es sei $g(\xi, \eta)$ eine für $\xi \geqq \xi_0$, $\eta \geqq \eta_0$ eindeutig erklärte Funktion von ξ und η; *es besitze* $g(\xi, \eta)$ *die Eigenschaft, beständig größer als das erste Argument* ξ *zu sein,* in Zeichen:

(b) *es sei* $g(\xi, \eta) > \xi$ *für jedes Wertepaar* $\xi \geqq \xi_0$, $\eta \geqq \eta_0$.

Eine solche Funktion ist speziell $g(\xi, \eta) = s(\xi)$ $(\xi_0 = \eta_0 = 0)$, die von η gar nicht abhängt.

Aus Satz I folgt, daß für $\alpha \geqq \max(\xi_0, \lambda_0)$ stets $w(\alpha) \geqq \alpha \geqq \xi_0$ ist.

Es werde nun unter den Zahlen $\alpha \geqq \max(\eta_0, \lambda_0)$ die kleinste, die der Beziehung $w(\alpha) \geqq \xi_0$ genügt, mit λ bezeichnet; *die Zahl* λ *ist also die kleinste Zahl, die die beiden Bedingungen* $\lambda \geqq \max(\eta_0, \lambda_0)$, $w(\lambda) \geqq \xi_0$ *zugleich erfüllt.*

Wir definieren nun eine Funktion $f(\alpha, \beta)$ mit Hilfe von $w(\alpha)$ und $g(\xi, \eta)$.

Satz II.*) *Es gibt für den Variabilitätsbereich* $\alpha \geqq \lambda$, $\beta \geqq 1$ *der Veränderlichen* α *und* β *eine einzige, völlig bestimmte, eindeutige Funktion* $f(\alpha, \beta)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

$$f(\alpha, 1) = w(\alpha)^{**}), \tag{1}$$

$$f(\alpha, s(\beta)) = g(f(\alpha, \beta), \alpha), \tag{2}$$

$$f(\alpha, \bar{\beta}) = \lim_{\beta} f(\alpha, \beta), \tag{3}$$

wenn $\bar{\beta}$ *eine Limeszahl bedeutet, und* β *auf der rechten Seite der Gleichung* (3) *alle Zahlen* $\beta < \bar{\beta} = \lim \beta$ *durchläuft.*

Beweis. Nach (1) ist $f(\alpha, 1)$ für $\alpha \geqq \lambda$ eindeutig definiert und nach Gleichung (2) und Voraussetzung (b) ist $f(\alpha, 2) = g(f(\alpha, 1), \alpha) > f(\alpha, 1)$, da ja $\alpha \geqq \lambda$ ist und λ derart bestimmt war, daß zugleich die Bedingungen $f(\alpha, 1) = w(\alpha) \geqq \xi_0$ und $\alpha \geqq \eta_0$ erfüllt sind. Nehmen wir nun an, die Existenz der Funktion mit allen behaupteten Eigenschaften sei für den Variabilitätsbereich $\alpha \geqq \lambda$, $1 \leqq \beta < \beta'$ nachgewiesen, so ist nur noch zu zeigen, daß die Funktion auch in dem Bereich $\alpha \geqq \lambda$, $1 \leqq \beta \leqq \beta'$ existiert und die verlangten Eigenschaften besitzt. Dann folgt nach dem Satz von der transfiniten Induktion die Behauptung in ihrem ganzen Umfange.

Sei also β' erstens keine Limeszahl, d. h. $\beta' = s(\beta'')$; dann ist $f(\alpha, \beta'')$ erklärt, und nach (2) folgt: $f(\alpha, \beta') = g(f(\alpha, \beta''), \alpha)$. Also ist auch $f(\alpha, \beta')$ eindeutig erklärt. Ist aber β' eine Limeszahl, dann beachte man, daß aus (2) und (b) in Verbindung mit (3) folgt: $f(\alpha, \beta)$ wächst bei konstantem α zugleich mit β. Also ist nach (3) auch $f(\alpha, \beta')$ eindeutig erklärt durch die Gleichung $f(\alpha, \beta') = f(\alpha, \lim \beta) = \lim\limits_{\beta} f(\alpha, \beta)$.

Zugleich folgt aus dem Beweise, daß $f(\alpha, \beta)$ mit β zugleich wächst, wenn α konstant bleibt. Diese wichtige Tatsache mit den sich daraus unmittelbar ergebenden Folgerungen heben wir hervor durch

Satz III. *Ist* $\alpha \geqq \lambda$***) *und* $\beta > \beta' \geqq 1$, *dann ist* $f(\alpha, \beta) > f(\alpha, \beta')$; *ist* $f(\alpha, \beta) > f(\alpha, \beta')$, *so ist umgekehrt* $\beta > \beta'$; *aus* $f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta')$ *folgt* $\beta = \beta'$.

*) Wir schließen uns hier eng an G. Cantor an, l. c. pag 231 f.

**) Es erweist sich im Hinblick auf die Anwendungen nicht als zweckmäßig, $f(\alpha, 0) = w(\alpha)$ zu setzen.

***) Das erste Argument von f wird in § 1 stets nicht unterhalb λ angenommen, falls nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird.

Die Gleichung (3) definiert $f(\alpha, \bar{\beta})$ für den Fall, daß $\bar{\beta}$ eine Limeszahl ist, durch eine Limesreihe, aber dabei werden alle Zahlen $\beta < \bar{\beta}$ benutzt. Es ist aber, um zu $f(\alpha, \bar{\beta})$ zu gelangen, nur nötig, irgend eine Reihe zu benutzen, deren Limes die Zahl $\bar{\beta}$ ist. Es gilt nämlich:

Satz IV. *Sei eine Folge von Zahlen δ mit $\bar{\beta}$ als Limes gegeben, dann besteht die Gleichung $f(\alpha, \bar{\beta}) = f(\alpha, \lim \delta) = \lim\limits_{\delta} f(\alpha, \delta)$.*

Beweis. Da $\bar{\beta} > \delta$ ist, so ist nach III auch $f(\alpha, \bar{\beta}) > f(\alpha, \delta)$; also ist $f(\alpha, \bar{\beta}) \geqq \sigma$, wenn σ die Zahl $\lim\limits_{\delta} f(\alpha, \delta)$ bezeichnet. Die Behauptung besagt: $f(\alpha, \bar{\beta}) = \sigma$, also ist nur aus $f(\alpha, \bar{\beta}) > \sigma$ ein Widerspruch zu folgern. Sei also $f(\alpha, \bar{\beta}) = \lim\limits_{\beta < \bar{\beta}} f(\alpha, \beta) > \sigma$, so folgt aus dem Begriff des Limes die Existenz einer Zahl $\beta' < \bar{\beta}$, so daß $f(\alpha, \beta') > \sigma$ ist, d. h. es ist $f(\alpha, \beta') > \sigma = \lim\limits_{\delta} f(\alpha, \delta) > f(\alpha, \delta)$ für jedes der gegebenen δ. Also ergibt sich nach III: $\beta' > \delta$ und daher $\beta' \geqq \lim \delta = \bar{\beta}$, während doch $\beta' < \bar{\beta}$ ist.

Der Wert von $f(\alpha, \beta)$ läßt nun nach unten hin zwei Abschätzungen zu, je nach der Bevorzugung der Variabeln α oder β:

Satz V. *Es ist $f(\alpha, \beta) \geqq \alpha$, wobei aber das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn zugleich $\alpha = w(\alpha)$ und $\beta = 1$ ist. — Ist $\alpha > 0$, dann ist $f(\alpha, \beta) \geqq \beta$. Für $\lambda = 0$ ist aber auch $f(0, \beta) \geqq \beta$ für jedes überendliche β.*

Beweis. Wir beweisen den ersten Teil: Es ist $f(\alpha, 1) = w(\alpha) \geqq \alpha$; für $\beta > 1$ folgt somit aus III: $f(\alpha, \beta) > f(\alpha, 1) \geqq \alpha$. Ist $w(\alpha) > \alpha$, dann ist aber auch noch $f(\alpha, 1) > \alpha$. Also ist $f(\alpha, \beta) = \alpha$ dann und nur dann, wenn $\beta = 1$ und $w(\alpha) = \alpha$ ist. — Der zweite Teil des Satzes folgt aus III in Verbindung mit I. Es ist nämlich $f(\alpha, \beta)$ bei konstantem α eine wachsende Funktion von β. Gibt es nun eine Zahl β, für die $f(\alpha, \beta) < \beta$ ist, dann folgt aus dem Beweise von I, daß auch $w(\alpha) = f(\alpha, 1) < 1$ ist; und da für $\alpha \geqq \lambda$ auch $w(\alpha) \geqq \alpha$ ist, so folgt: $\alpha < 1$, d. h. $\alpha = 0$. Also ist für $\alpha > 0$ stets $f(\alpha, \beta) \geqq \beta$. Daß aber für $\lambda = 0$ auch $f(0, \beta) \geqq \beta$ ist, falls $\beta \geqq \omega$ ist, folgt aus I; denn $f(0, \beta)$ ist eine wachsende Funktion von β und nach dem Beweise von I ergibt sich unsere Behauptung, wenn wir nur wissen, daß $f(0, \omega) \geqq \omega$ ist. Diese Gleichung ist aber richtig, da ja nach Definition $f(0, \omega)$ eine Limeszahl, ω aber die erste Limeszahl ist.

Ist β und α gegeben, so wird es im allgemeinen nicht möglich sein, zu entscheiden, ob die Gleichung $\beta = f(\alpha, \xi)$ eine Wurzel ξ hat oder nicht. Gibt es eine solche Zahl ξ, so gibt es nur eine einzige, wie aus III folgt; ξ ist dann eine durch α und β eindeutig bestimmte Zahl, eine Funktion von α und β, und es gibt dann eine zu f inverse Operation, die eindeutig ist. Es läßt sich aber im allgemeinen nicht entscheiden, für welche Wertepaare α, β diese inverse Operation definiert ist. Ein Satz

läßt sich aber doch in dieser Richtung aussagen, der für die Addition die völlige Entscheidung über die Auflösbarkeit der Gleichung $\beta = f(\alpha, \xi)$ geben wird; für die Multiplikation liefert uns dieser Satz später den Euklidischen Algorithmus, und für die Potenzlehre werden wir aus ihm die Entwicklung einer Zahl β nach Potenzen von α folgern. Unser Satz lautet:

Satz VI. *Sei β gegeben und α eine der Beziehung $w(\alpha) \leqq \beta$ genügende Zahl ($\geqq \lambda$), dann existiert eine einzige wohlbestimmte Zahl ξ ($\geqq 1$), so daß die Beziehung $f(\alpha, s(\xi)) > \beta \geqq f(\alpha, \xi)$ erfüllt ist. Im allgemeinen ist $\xi \leqq \beta$. Nur für $\alpha = 0$ und endliches ξ kann $\xi > \beta$ sein, also nur dann, wenn $\alpha = 0$, $\beta < \omega$, $\xi < \omega$ ist. Ist $\alpha > 0$, dann folgt aus $\xi = \beta \geqq f(\alpha, \beta) \geqq \beta$, daß $\beta = f(\alpha, \beta)$ ist.*

Beweis. Sei $\alpha \geqq \lambda$ eine Zahl, für die $\beta \geqq w(\alpha) = f(\alpha, 1)$ ist. Also gibt es Zahlen ξ', für die $\beta \geqq f(\alpha, \xi')$ ist, und unsere Behauptung lautet einfach dahin: Unter diesen Zahlen ξ' gibt es eine größte. Gäbe es kein größtes ξ', so sei $\bar{\xi}$ der Limes dieser Zahlen ξ', und aus $\beta \geqq f(\alpha, \xi')$ folgt: $\beta \geqq \lim\limits_{\xi'} f(\alpha, \xi') = f(\alpha, \bar{\xi})$, d. h. $\bar{\xi}$ wäre eine der Zahlen ξ', deren Limes $\bar{\xi}$ ist. Also kann $\bar{\xi}$ nicht existieren. Die Größen ξ' besitzen somit ein Maximum ξ, d. h. es ist $f(\alpha, s(\xi)) > \beta \geqq f(\alpha, \xi)$. Daß nur eine Zahl ξ diesen Bedingungen genügt, folgt leicht aus III. Nach V ist für $\alpha > 0$ stets $f(\alpha, \xi) \geqq \xi$, also ist $\xi \leqq \beta$, wenn $\alpha > 0$ ist. Und da auch $f(0, \xi) \geqq \xi$ für $\xi \geqq \omega$ ist, so kann $\xi > \beta$ nur für $\alpha = 0$ und $\xi < \omega$ stattfinden. Daß für $\alpha > 0$ und $\xi = \beta$ die Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ folgt, ergibt sich ebenfalls aus V.

Ob es Wertepaare gibt, für die die Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ erfüllt ist, wissen wir bis jetzt noch nicht; aber gerade diese Frage hängt mit wichtigen Eigenschaften von f zusammen, die wir noch kennen lernen werden. Gerade weil für die Funktion $f(\alpha, \beta)$ die Variabeln α und β verschiedene Rollen spielen (bereits bei der Definition von f), treten diese Eigenschaften auf. Diese Verschiedenartigkeit zeigt sich ja auch in Satz V: im allgemeinen ist $f(\alpha, \beta) > \alpha$, dagegen $f(\alpha, \beta) \geqq \beta$; wir werden gerade sehen, daß es stets Zahlen β gibt, für die $f(\alpha, \beta) = \beta$ ist. Aber auch in III zeigt sich der Unterschied der Variabeln: $f(\alpha, \beta)$ wächst bei konstantem α mit β zugleich; aber trotzdem $f(\alpha, \beta)$ für $\beta = 1$ mit wachsendem α wächst, gilt das keineswegs für beliebiges konstantes β, und es kann auch nie gelten, wie wir später sehen werden. Wohl aber läßt sich erreichen, daß bei konstantem β die Funktion $f(\alpha, \beta)$ mit wachsendem α nie abnimmt, falls wir noch eine Voraussetzung über die Funktion $g(\xi, \eta)$ machen. Wir unterwerfen $g(\xi, \eta)$ der weiteren Bedingung:

(c) *aus $\xi \geqq \xi' \geqq \xi_0$, $\eta \geqq \eta' \geqq \eta_0$ folge $g(\xi, \eta) \geqq g(\xi', \eta')$, d. h. wenn beide Variabeln ξ, η nicht abnehmen, soll auch $g(\xi, \eta)$ nicht abnehmen.*

Die schärfere Bedingung:

(c') *aus* $\xi \geqq \xi' \geqq \xi_0$, $\eta > \eta' \geqq \eta_0$ *folge*

$$g(\xi, \eta) > g(\xi', \eta') \quad \textit{und} \quad g(\xi, \eta') \geqq g(\xi', \eta'),$$

werden wir nicht immer voraussetzen; wir werden aber stets, falls wir aus (c') Folgerungen ziehen, ausdrücklich hinzusetzen, daß wir statt (c) die schärfere Bedingung (c') vorausgesetzt haben.

Satz VII. *Ist* $\alpha \geqq \alpha' \geqq \lambda$, *dann ist* $f(\alpha, \beta) \geqq f(\alpha', \beta)$; *also folgt aus* $f(\alpha, \beta) > f(\alpha', \beta)$, *daß* $\alpha > \alpha'$ *ist. Setzt man statt* (c) *die Bedingung* (c') *voraus, dann wächst die Funktion* $f(\alpha, \beta)$ *mit* α, *wenn* β *eine konstante Zahl ohne unmittelbar vorhergehendes Element ist, d. h. ist* $\alpha > \alpha' \geqq \lambda$, *dann ist* $f(\alpha, s(\beta')) > f(\alpha', s(\beta'))$ *für* $\beta' \geqq 0$; *also folgt aus* $f(\alpha, s(\beta')) = f(\alpha', s(\beta'))$, *daß* $\alpha = \alpha'$ *ist, und wenn* $f(\alpha, \beta) = f(\alpha', \beta)$ *für* $\alpha > \alpha'$ *ist, dann ist* β *eine Limeszahl.*

Beweis. Wir beweisen zunächst nur den ersten Teil des Satzes, der sich auf (c) stützt. Da für $\beta = 1$ der Satz richtig ist, so ist nur noch unter der Annahme, daß er für $\beta < \beta'$ gilt, zu zeigen, daß er auch für $\beta = \beta'$ gilt. Der Satz gelte also als bewiesen für $\beta < \beta'$, dann ist $\beta' \geqq 2$. Sei erstens β' keine Limeszahl, $\beta' = s(\beta'')$, $\beta'' \geqq 1$; daher ist für $\alpha \geqq \alpha'$ auch $f(\alpha, \beta'') \geqq f(\alpha', \beta'')$. Weiter ist

$$f(\alpha, \beta') = g(f(\alpha, \beta''), \alpha) \geqq g(f(\alpha', \beta''), \alpha') = f(\alpha', \beta').$$

Sei zweitens β' eine Limeszahl, also für $\alpha \geqq \alpha'$ und $\beta < \beta'$ nach Voraussetzung $f(\alpha, \beta) \geqq f(\alpha', \beta)$; läßt man hier β gegen β' konvergieren, so folgt $f(\alpha, \beta') \geqq f(\alpha', \beta')$. Damit ist der erste Teil bewiesen.

Wir setzen nun (c') voraus. Es ist für $\alpha > \alpha'$ nach (I):

$$f(\alpha, 1) > f(\alpha', 1).$$

Sei $s(\beta') > 1$, d. h. $\beta' \geqq 1$. Da (c') die Bedingung (c) enthält, so ist für $\alpha > \alpha'$ nach dem soeben Bewiesenen $f(\alpha, \beta') \geqq f(\alpha', \beta')$. Also folgt:

$$f(\alpha, s(\beta')) = g(f(\alpha, \beta'), \alpha) > g(f(\alpha', \beta'), \alpha') = f(\alpha', s(\beta')).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

In den Vorbemerkungen zu Satz VI besprachen wir die Gleichung $\beta = f(\alpha, \xi)$. Wenn β und α gegeben ist, dann gibt es höchstens eine Lösung ξ dieser Gleichung. Wir denkeu uns nun aber nur β fest und fragen: zu welchen α gibt es eine Lösung ξ? Doch können wir hier im allgemeinen darüber auch noch nichts aussagen, obgleich sich diese Frage für spezielle Fälle entscheiden läßt. Dagegen ist es möglich zu zeigen, daß man überhaupt nur endlich viele Wurzeln ξ erhält, wenn auch α beliebig variiert wird. Wir sprechen nämlich folgenden Satz aus:

Satz VIII. *Sei* β *gegeben, dann gibt es nur endlich viele Zahlen* ξ, *zu denen Lösungen* α *der Gleichung* $\beta = f(\alpha, \xi)$ *gehören.**) *Hat jede dieser*

*) Es ist damit nicht gesagt, daß zu jedem β überhaupt solche Zahlen ξ existieren.

durch β bestimmten Zahlen ξ eine unmittelbar vorhergehende Zahl, was z. B. der Fall ist, wenn β eine unmittelbar vorhergehende Zahl besitzt, so gibt es unter der Voraussetzung (c′) *zu jedem dieser endlich vielen ξ genau eine Wurzel α der Gleichung $\beta = f(\alpha, \xi)$.*

Beweis. Sei ξ eine Zahl, zu der es eine oder mehrere Lösungen α gibt, dann bedeute α die Minimallösung; ξ_1 sei eine andere Zahl, zu der es eine Lösung gibt; α_1 sei die Minimallösung. Es werde $\xi < \xi_1$ angenommen, dann folgt: $\beta = f(\alpha_1, \xi_1) = f(\alpha, \xi) < f(\alpha, \xi_1)$. Nach VII ist daher $\alpha > \alpha_1$. Ordne ich also die Zahlen ξ nach steigender Größe, so bildet die Reihe der zugehörigen Minimallösungen eine fallende Reihe, bricht also nach endlich vielen Gliedern ab, d. h. es gibt nur endlich viele ξ, zu denen Lösungen α der Gleichung $\beta = f(\alpha, \xi)$ gehören. — Setzen wir nun (c′) voraus. Gibt es zu einem ξ zwei verschiedene Wurzeln α und α', ist also $\beta = f(\alpha, \xi) = f(\alpha', \xi)$, so ist nach dem letzten Teil von VII die Zahl ξ und somit auch $\beta = f(\alpha, \xi)$ eine Limeszahl. Wenn also ξ keine Limeszahl ist, dann gibt es nur *eine* zu ξ gehörige Zahl α, für die $\beta = f(\alpha, \xi)$ ist. Das tritt z. B. ein, wenn β keine Limeszahl ist. Es bestimmen sich dann die Zahlen α und ξ gegenseitig eindeutig.

Erklärung. *Hat eine Zahl γ die Eigenschaft, daß $\gamma > \lambda$ und $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ für jedes der Bedingung $\lambda \leqq \alpha < \gamma$ genügende α, dann nennen wir γ eine Hauptzahl der Funktion $f(\alpha, \beta)$.**)

Diese Hauptzahlen sind irreduzibel in Bezug auf die Funktion $f(\alpha, \beta)$, d. h. es kann γ nicht aus kleineren Zahlen mit Hilfe der Funktion f erzeugt werden; beschränke ich nämlich die Variabilität von α und β durch $\lambda \leqq \alpha < \gamma$, $1 \leqq \beta < \gamma$, so ist $f(\alpha, \beta) < f(\alpha, \gamma) = \gamma$, d. h. ich gelange mit Hilfe der Operation f nicht aus dem Bereich der Zahlen unterhalb γ heraus. Also findet die Funktion f in der Zahl γ eine unübersteigbare Schranke, die f hindert, aus einem vorgeschriebenen Wertevorrat ($< \gamma$) neue Zahlen ($\geqq \gamma$) zu erzeugen.

Es handelt sich nun für uns darum, die Hauptzahlen von f zu charakterisieren und aus unserer Erklärung Kriterien dafür abzuleiten, wann eine Zahl Hauptzahl der Funktion ist.

Satz IX. *Jede oberhalb 2 gelegene Hauptzahl ist eine Limeszahl.*

Beweis: Es sei $\beta \geqq \max(\lambda, 1)$, dann ist nach III: $f(\beta, s(\beta)) > f(\beta, \beta)$ und nach V ist $f(\beta, \beta) > \beta$, falls $\beta > 1$ oder auch noch für $\beta = 1 \geqq \max(\lambda, 1)$, falls $w(1) > 1$ ist. Somit ist $f(\beta, s(\beta)) > s(\beta)$ für $\beta > 1$ und auch noch für $\beta = 1$, falls $\lambda \leqq 1 < w(1)$ ist. Also ist $s(\beta)$ für $\beta > 1$ keine Hauptzahl, d. h. jede Hauptzahl $\gamma > 2$ ist eine Limeszahl. — Es ist sogar

*) Diese Bezeichnung wähle ich im Einverständnis mit G. Hessenberg, der den Namen Hauptzahl bereits für den Fall eingeführt hat, daß die Operation f die Addition ist.

$s(1) = 2$ keine Hauptzahl, falls $\lambda \leqq 1 < w(1)$ ist. Es kann nicht zugleich 1 und 2 eine Hauptzahl sein, denn wenn 1 eine Hauptzahl ist, so ist $\lambda = 0$ und $f(0, 1) = 1 = w(0) < w(1) = f(1, 1)$, d. h. $f(1, 1) \geqq 2$. Wäre nun noch 2 eine Hauptzahl, so müßte $f(1, 1) < 2$ sein.

Wir nennen alle Hauptzahlen $\gamma > 2$ *eigentliche Hauptzahlen;* jede eigentliche Hauptzahl ist also eine Limeszahl. Unser Satz IX leistet das Maximum dessen, was man verlangen kann, denn es gibt in der Tat Operationen, die die Zahl 1 zur Hauptzahl besitzen, und auch solche Funktionen, für die 2 eine Hauptzahl ist; für die Addition ist es die 1, die 2 für die Multiplikation.

Ebenso wie die Limeseigenschaft (3) der Funktion f durch Satz IV auf allgemeinere Limesreihen übertragen wurde, so ist die Eigenschaft einer Zahl γ, Hauptzahl zu sein, bereits in der Tatsache enthalten, daß die Gleichung $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ für irgend eine Folge von Zahlen α gilt, deren Limes γ ist. Es wird das ausgedrückt durch

Satz X. *Es gebe zu einer Zahl γ eine Folge von Zahlen α, für die* 1) $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ *und* 2) $\gamma = \lim \alpha$ *ist, dann ist γ eine Hauptzahl der Funktion f.*

Beweis. Da stets $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ ist, so ist jedes $\alpha \geqq \lambda$; also $\gamma > \alpha \geqq \lambda$. Sei β eine Zahl, für die $\gamma > \beta \geqq \lambda$ ist, dann ist nur die Gleichung $\gamma = f(\beta, \gamma)$ zu zeigen. Da nun $\gamma > \beta$ ist, so existiert ein α derart, daß $\gamma > \alpha > \beta$ und $\gamma = f(\alpha, \gamma) \geqq f(\beta, \gamma) \geqq \gamma$ ist. Also ist $\gamma = f(\beta, \gamma)$ für jedes der Bedingung $\gamma > \beta \geqq \lambda$ genügende β, d. h. γ ist eine Hauptzahl.

Es ist nun wichtig ein Kriterium zu besitzen, das die Entscheidung über die Frage gestattet, wann eine Folge von Zahlen eine Hauptzahl zum Limes hat. Es wird dann nämlich möglich sein, derartige Zahlreihen zu konstruieren, deren Limes eine Hauptzahl ist; damit wird der Nachweis der Existenz der Hauptzahlen erbracht sein. — Dazu betrachten wir nun $h(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$; diese Funktion ist definiert für $\alpha \geqq \max(\lambda, 1)$. Aus III und VII folgt, daß für $\alpha > \alpha' \geqq \max(\lambda, 1)$ auch $h(\alpha) > h(\alpha')$ ist, und aus V folgt $h(\alpha) > \alpha$ für $\alpha \geqq \max(\lambda, 2)$; ist aber $\lambda = 0, 1$ und $w(1) > 1$, dann ist auch $h(1) = w(1) > 1$. — Ist nun γ eine Hauptzahl und $\gamma > \alpha \geqq \lambda$, dann ist $h(\alpha) = f(\alpha, \alpha) < \gamma$. Also hat die Gesamtheit der Zahlen $\alpha < \gamma$ die Eigenschaft, daß mit α zugleich auch $h(\alpha)$ der Gesamtheit angehört. Diese Eigenschaft charakterisiert aber auch γ als Hauptzahl; es gilt der

Satz XI. *Hat eine Folge von Zahlen α* ($\geqq \max(\lambda, 1)$) *die Eigenschaft, daß mit α zugleich $h(\alpha)$ der Folge angehört, dann hat die Folge einen Limes γ und γ ist eine Hauptzahl der Funktion f.*

Beweis. Da eine Folge mindestens zwei Zahlen enthält und hier jede $\geqq 1$ ist, so ist von der zweiten Zahl α ab $h(\alpha) > \alpha$; da mit α auch

$h(\alpha)$ der Folge angehören soll, so kann die Folge kein letztes Element ϑ besitzen, da ja auf ϑ noch das Element $h(\vartheta) > \vartheta$ folgte. Also hat die Folge einen Limes γ. Es sei nun α irgend eine der gegebenen Zahlen, dann betrachte man nur noch die Zahlen α' der Folge, die oberhalb α liegen, d. h. für die $\alpha < \alpha' < \gamma$ ist. Da auch $h(\alpha')$ der Folge angehört, so ist $h(\alpha') < \gamma$, also $\gamma > h(\alpha') = f(\alpha', \alpha') \geqq f(\alpha, \alpha')$. Läßt man nun α' gegen γ wachsen, so folgt $\gamma \geqq f(\alpha, \gamma) \geqq \gamma$, d. h. $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ für jedes α der Folge, deren Limes γ ist. Nach X ist also γ eine Hauptzahl der Funktion f.

Satz XII. *Der Limes einer Folge von Hauptzahlen der Funktion f ist eine Hauptzahl derselben Funktion.*

Beweis. Eine Folge von Hauptzahlen γ besitze einen Limes $\bar{\gamma}$; es ist $\bar{\gamma} > \gamma > \lambda$. Es sei $\bar{\gamma} > \alpha \geqq \lambda$, dann betrachte ich nur noch die Hauptzahlen der Folge, die oberhalb α liegen; für sie ist $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ und wenn hierin γ gegen $\bar{\gamma}$ konvergiert, so folgt: $\bar{\gamma} = f(\alpha, \bar{\gamma})$ für jedes α, das der Bedingung $\bar{\gamma} > \alpha \geqq \lambda$ genügt. Also ist $\bar{\gamma}$ eine Hauptzahl der Funktion f. — Man kann auch so schließen: sei $\bar{\gamma} > \alpha$ und $\gamma > \alpha$ eine Zahl der Folge, dann ist $\bar{\gamma} > \gamma = f(\alpha, \gamma) > f(\alpha, \alpha) = h(\alpha)$. Also gehört mit α zugleich $h(\alpha)$ dem Bereich der Zahlen unterhalb $\bar{\gamma}$ an; daher ist $\bar{\gamma}$ nach XI eine Hauptzahl der Funktion. — Aus diesem Satz folgt: *ist β gegeben, dann gibt es unter den Hauptzahlen γ, für die $\gamma \leqq \beta$ ist, eine größte.*

Wie bereits angedeutet wurde, stützt sich der Nachweis für die Existenz der Hauptzahlen auf XI. Es sei nun im voraus bemerkt, daß für die Funktion $f(\alpha, \beta)$ auf Grund von XI die Zahl ω eine Hauptzahl ist, falls $f(\alpha, \beta)$ für endliches α und β selbst endlich ist. Allgemein aber beweisen wir die Existenz der Hauptzahlen durch folgenden

Satz XIII. *Ist α eine Zahl, für die $h(\alpha) > \alpha$ ist*), und setzt man $\alpha' = h(\alpha)$, $\alpha'' = h(\alpha')$, $\alpha''' = h(\alpha'')$, $\cdots$, dann ist die erste Hauptzahl über α der Limes der Folge $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$.*

Beweis. Da mit $\alpha^{(n)}$ zugleich auch $h(\alpha^{(n)})$ der Folge angehört, so hat nach XI diese Folge einen Limes, der eine Hauptzahl γ ist. Es ist nur noch zu zeigen, daß für jede Hauptzahl $\gamma' > \alpha$ auch $\gamma' \geqq \gamma$ ist. Das ergibt sich so: es ist $\gamma' > \alpha$ und daher

$$\gamma' = f(\alpha, \gamma') > f(\alpha, \alpha) = h(\alpha) = \alpha';$$

also $$\gamma' = f(\alpha', \gamma') > f(\alpha', \alpha') = h(\alpha') = \alpha''.$$

Ganz allgemein folgt ebenso $\gamma' > \alpha^{(n)}$, also $\gamma' \geqq \lim\limits_{n} \alpha^{(n)} = \gamma$.

---

*) Es ist $h(\alpha) > \alpha$ für $\alpha \geqq \lambda \geqq 2$. Ist aber $\lambda = 0, 1$, so ist $h(\alpha) > \alpha$ für $\alpha \geqq 2$ und auch noch für $\alpha = 1$, wenn $w(1) > 1$ ist. (Man vgl. die Vorbemerkungen zu Satz XI.)

Damit ist nicht nur die Existenz der Hauptzahlen bewiesen, sondern auch ein Verfahren angegeben, um von einer beliebigen Zahl α zu der nächsten Hauptzahl vermittels einer Limesreihe aufzusteigen; es gibt also insbesondere noch oberhalb jeder Zahl α Hauptzahlen der Funktion. Besonders bemerkenswert erscheint es, daß man aus α die nächste über α gelegene Hauptzahl stets durch eine Reihe $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$ vom Typus ω gewinnt. Aus der Existenz der Hauptzahlen folgt nun, daß *das kommutative Gesetz für f nicht gilt.* Denn es ist für jede eigentliche Hauptzahl $\gamma = f(\alpha, \gamma)$, falls $\lambda \leqq \alpha < \gamma$ ist, aber für $\alpha > 1$ ist $f(\gamma, \alpha) > \gamma$. Somit ist für $\max(\lambda, 2) \leqq \alpha < \gamma$ stets $f(\gamma, \alpha) > f(\alpha, \gamma)$. — Die Reihe

$$\alpha, \alpha' = f(\alpha, \alpha), \quad \alpha'' = f(\alpha', \alpha') = f(f(\alpha, \alpha), f(\alpha, \alpha)), \cdots$$

ist unter symmetrischer Behandlung der beiden Variabeln konstruiert; in den speziellen Fällen der Addition etc. benutzt man eine andere Reihe, die wegen gewisser Voraussetzungen, die in diesen Fällen zutreffen, auch zum Ziele führt; man konstruiere folgende Reihe: es sei

$$h(\alpha) = f(\alpha, \alpha) = \alpha' > \alpha,$$

dann setze man $\alpha' = \alpha_1, \quad \alpha_2 = f(\alpha, \alpha_1), \quad \alpha_3 = f(\alpha, \alpha_2), \cdots,$

dann ist $$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \cdots,$$

wie leicht nachzuweisen ist. Der Limes der so konstruierten Reihe sei $\bar{\alpha}$; es ist $\bar{\alpha} = \lim\limits_n \alpha_{n+1} = \lim\limits_n f(\alpha, \alpha_n) = f(\alpha, \lim \alpha_n) = f(\alpha, \bar{\alpha})$. Also ist $\bar{\alpha}$ eine Wurzel β der Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ und zwar die kleinste; denn ist β irgend eine dieser Wurzeln, so ist $\beta > \alpha$, also $\beta = f(\alpha, \beta) > f(\alpha, \alpha) = \alpha_1$ und daher auch ferner $\beta = f(\alpha, \beta) > f(\alpha, \alpha_1) = \alpha_2$; also ganz allgemein: $\beta > \alpha_n$, d. h. $\beta \geqq \bar{\alpha}$. Ob nun aber diese kleinste Wurzel $\bar{\alpha}$ der betrachteten Gleichung eine Hauptzahl ist, wird wohl im allgemeinen kaum entschieden werden können; dagegen läßt es sich sehr wohl beweisen für den Fall, daß die Funktion f das assoziative Gesetz $f(f(\alpha, \beta), \delta) = f(\alpha, f(\beta, \delta))$ erfüllt.

Da es nach XIII oberhalb jeder Zahl Hauptzahlen gibt, so gibt es also zu jedem $\alpha \geqq \lambda$ Wurzeln β unserer Gleichung, die oberhalb einer beliebig vorgeschriebenen Zahl δ liegen. Betrachtet man aber in der Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ die Zahl β als gegeben und fragt nach den Wurzeln α, so liegen die Verhältnisse anders. Es braucht keine Wurzel α vorhanden zu sein. Gibt es aber Wurzeln, dann gilt:

Satz XIV. *Es besitze bei gegebenem festem $\beta > 1$ die Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ eine Wurzel α; dann existiert eine Zahl β', die folgenden Bedingungen genügt: es ist $\lambda < \beta' \leqq \beta$; für jedes der Bedingung $\lambda \leqq \xi < \beta'$ genügende ξ ist $\beta = f(\xi, \beta)$*), dagegen ist für $\xi \geqq \beta'$ stets $f(\xi, \beta) > \beta$.*

*) Für $\lambda = 0$ braucht bei *endlichem* β die Behauptung $\beta = f(\xi, \beta)$ für die Zahl $\xi = 0$ nicht richtig zu sein; es kann in diesem Fall $f(0, \beta) < \beta$ sein.

Beweis. Da $\beta > 1$ ist, so folgt für die nach Voraussetzung vorhandene Wurzel α, daß $\beta = f(\alpha, \beta) > \alpha$ ist, also ist auch $\beta > \lambda$. Nun ist $f(\beta, \beta) > \beta$; betrachte ich daher $f(\xi, \beta)$, wenn ξ von α bis β wächst, so ist zu Anfang die Funktion gleich β, am Ende des Intervalls aber größer als β. Also gibt es im Intervall eine kleinste Zahl $\xi = \beta'$, für die $f(\xi, \beta) = f(\beta', \beta) > \beta$ ist. Dann ist natürlich nach VII auch $f(\xi, \beta) > \beta$ für jedes $\xi \geqq \beta'$. Es liegt nun β' im Intervall zwischen α und β und es ist genauer $\alpha < \beta' \leqq \beta$. Es sei nun ξ eine Zahl, für die $\lambda \leqq \xi < \beta'$ ist, dann ist wegen der Minimaleigenschaft von β' stets $f(\xi, \beta) \leqq \beta$, während nach V zugleich $f(\xi, \beta) \geqq \beta$ ist. (Man vergl. die Anm. der vorigen Seite.) Also folgt $\beta = f(\xi, \beta)$.

Zusatz. 1) Unter der Voraussetzung (c′) kann es, falls β keine Limeszahl ist, höchstens eine Wurzel α geben. Es ist das, falls $\lambda > 0$ ist, die Zahl λ selbst.

2) Für die speziellen Funktionen, die wir als Anwendungen bringen werden, tritt es ein, daß mit α zugleich auch $h(\alpha)$ eine Wurzel ξ der Gleichung $\beta = f(\xi, \beta)$ ist; also ist in diesem Fall β' eine Hauptzahl. (XI)*).

Daß aus dem Bestehen der Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ die andere Gleichung $\beta = f(h(\alpha), \beta)$ folgt, tritt z. B. ein, wenn das assoziative Gesetz erfüllt ist. Dann ist nämlich: $f(h(\alpha), \beta) = f(f(\alpha, \alpha), \beta) = f(\alpha, f(\alpha, \beta)) = f(\alpha, \beta) = \beta$. *Wenn also das assoziative Gesetz gilt, dann ist β' eine Hauptzahl γ.* Aus dem assoziativen Gesetz läßt sich noch eine andere Folgerung ziehen: gibt es eine Hauptzahl γ', so daß $\beta = f(\gamma', \eta)$ eine Lösung η hat, dann ist $\gamma' \leqq \beta' = \gamma$. Denn es sei $\beta = f(\gamma', \eta)$ und $\gamma' > \beta' = \gamma$, dann ist $\gamma' = f(\beta', \gamma')$, also $\beta = f(f(\beta', \gamma'), \eta) = f(\beta', f(\gamma', \eta)) = f(\beta', \beta)$, während doch $f(\beta', \beta) > \beta$ ist.

Satz XV. *Besitzt bei gegebenen β und η die Gleichung $\beta = f(\xi, \eta)$ unendlich viele Wurzeln ξ**), die einen Limes ξ_1 besitzen, und hat die Gleichung $\beta = f(\xi_1, \eta_1)$ eine Lösung η_1, dann ist $\eta > \eta_1$, und es gibt keine Zahl η_2 zwischen η und η_1, für die die Gleichung $\beta = f(\xi_2, \eta_2)$ eine Lösung ξ_2 hat.*

Beweis. Da $\xi_1 = \lim \xi > \xi$ ist, so folgt aus $f(\xi, \eta) = f(\xi_1, \eta_1) \geqq f(\xi, \eta_1)$, daß $\eta \geqq \eta_1$ ist. Wäre $\eta = \eta_1$, also $\beta = f(\xi_1, \eta)$, so wäre ξ_1 eine der Größen ξ, deren Limes ξ_1 ist; also ist $\eta > \eta_1$. Sei nun $\beta = f(\xi_2, \eta_2)$, dann ist zu zeigen, daß $\eta_2 \geqq \eta$ oder $\eta_2 \leqq \eta_1$ ist.

Sei erstens $\xi_2 < \xi_1$, dann gibt es ein ξ zwischen ξ_2 und ξ_1, so daß $\beta = f(\xi, \eta) = f(\xi_2, \eta_2) \leqq f(\xi, \eta_2)$ ist, d. h. es ist $\eta_2 \geqq \eta$.

---

*) Es muß dazu eine Wurzel α vorhanden sein, für die $h(\alpha) > \alpha$ ist.

**) Unter der Voraussetzung (c′) kann das nur eintreten, wenn η, also auch β, eine Limeszahl ist.

Zweitens sei $\xi_2 \geqq \xi_1$. Aus $f(\xi_1, \eta_1) = f(\xi_2, \eta_2) \geqq f(\xi_1, \eta_2)$ folgt: $\eta_2 \leqq \eta_1$.

Wir wenden uns nun in § 2 zur Betrachtung einer speziellen Funktion und werden in § 3 die allgemeinen Fragen von neuem aufnehmen.

§ 2.

Die Addition.

1) Unter $w(\alpha)$ verstehen wir die Zahl $s(\alpha)$. Es ist (a) erfüllt und $w(\alpha) = s(\alpha) > \alpha$ für $\alpha \geqq 0$. Also ist $\lambda_0 = \beta_0 = 0$. Wir setzen ferner

$$g(\xi, \eta) = s(\xi) > \xi \quad \text{für} \quad \xi \geqq \xi_0 = 0, \ \eta \geqq \eta_0 = 0.$$

Es ist (b) erfüllt, aber auch (c), da aus $\xi \geqq \xi'$ auch $s(\xi) \geqq s(\xi')$ folgt. Dagegen ist bei unserer Wahl von $g(\xi, \eta)$ die Bedingung (c′) nicht erfüllt. Die Zahl λ ist die kleinste Zahl, die die beiden Bedingungen

$$\lambda \geqq \max(\eta_0, \lambda_0) = \max(0, 0) = 0, \qquad w(\lambda) = s(\lambda) \geqq \xi_0 = 0$$

erfüllt. Mithin ist $\lambda = 0$.

Die durch diese Festsetzungen definierte Funktion oder Operation bezeichnen wir mit $f(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$. Wir nennen $\alpha + \beta$ die *Summe von α und β*; α heißt der *Abschnitt*, β der *Rest der Summe*. Wir nennen diese Operation die *Addition*.

2) Es ist nach § 1, II:

(1) $$\alpha + 1 = s(\alpha),$$

(2) $$\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$$

oder wegen (1):

(2) $$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1,$$

(3) $$\alpha + \bar{\beta} = \lim_{\beta} (\alpha + \beta),$$

wenn auf der rechten Seite dieser Gleichung β alle Zahlen unterhalb der Limeszahl $\bar{\beta}$ durchläuft. — Es ist durch (1)—(3) die Operation $\alpha + \beta$ für $\alpha \geqq \lambda = 0$, $\beta \geqq 1$ erklärt. Aus (2) erhellt die Zweckmäßigkeit der Festsetzung:

(4) $$\alpha + 0 = \alpha \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0.$$

Damit ist nun $\alpha + \beta$ für $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ erklärt.

3) Nach III folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (4) der vorigen Nr.: ist $\beta > \beta'$, so ist $\alpha + \beta > \alpha + \beta'$, und wenn $\alpha + \beta > \alpha + \beta'$ ist, dann ist $\beta > \beta'$. Aus $\alpha + \beta = \alpha + \beta'$ ergibt sich $\beta = \beta'$.

Insbesondere ist für $\beta > \beta' = 0$ stets $\alpha + \beta > \alpha + 0 = \alpha$, d. h. *die Summe ist größer als der Abschnitt, falls der Rest nicht gleich Null ist.*

4) Es sei eine Folge von Zahlen δ mit $\bar{\beta}$ als Limes gegeben, dann ist nach IV: $\lim_{\delta} (\alpha + \delta) = \alpha + \bar{\beta} = \alpha + \lim \delta$.

5) Nach V ist $\alpha+\beta>\alpha$ für $\beta>0$ ($w(\alpha)>\alpha$); ein uns nach Nr. 3 bereits bekanntes Resultat. Der zweite Teil von V ergibt: $\alpha+\beta\geqq\beta$ (für $\alpha=0$ liefert V diese Beziehung erst von $\beta=\omega$ an: es ist indessen durch transfinite Induktion leicht zu zeigen, daß für jedes β die Beziehung $0+\beta=\beta$**) gilt, so daß wirklich die Ungleichung $\alpha+\beta\geqq\beta$ immer gilt).

Die Beziehung $\alpha+\beta\geqq\beta$ besagt: *die Summe ist nie kleiner als der Rest.*

6) Aus VI folgt (es ist auch Gleichung (4) der Nr. 2 zu berücksichtigen): sei $\beta\geqq\alpha=\alpha+0$, dann existiert eine durch α und β eindeutig bestimmte Zahl ξ, so daß $\alpha+(\xi+1)=(\alpha+\xi)+1>\beta\geqq\alpha+\xi$ ist. Da nun $(\alpha+\xi)+1$ auf $(\alpha+\xi)$ unmittelbar folgt, so ist daher $\beta=\alpha+\xi$. *Ist also $\beta\geqq\alpha$, dann hat die Gleichung $\beta=\alpha+\xi$ stets eine einzige Lösung $\xi\leqq\beta$; wenn $\beta\geqq\alpha$ ist, dann ist somit α ein Abschnitt von β.*

7) Ist $\alpha\geqq\alpha'$, dann ist nach VII: $\alpha+\beta\geqq\alpha'+\beta$. Umgekehrt folgt aus $\alpha+\beta>\alpha'+\beta$, daß $\alpha>\alpha'$ ist.

8) *Es gilt das assoziative Gesetz:* $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$. Man bezeichnet daher beide Seiten unserer Gleichung zweckmäßig mit $\alpha+\beta+\gamma$.*)

Beweis. Nach Gleichung (2) und (4) ist unsere Gleichung richtig für $\gamma=0, 1$. Es sei die Gleichung richtig für jedes $\gamma<\gamma'$. Dann ist nur noch für den Beweis der Allgemeingültigkeit zu zeigen, daß die Behauptung auch für $\gamma=\gamma'$ gilt.

Ist γ' eine Limeszahl, dann folgt der Beweis leicht aus Nr. 4. Ist aber $\gamma'=\gamma''+1$, so ist nach Voraussetzung für γ'' der Satz richtig, also $(\alpha+\beta)+\gamma''=\alpha+(\beta+\gamma'')$. Nun ist

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma'=(\alpha+\beta)+(\gamma''+1)&=((\alpha+\beta)+\gamma'')+1 &&[\text{Nr. 2, Gl. (2)}]\\ &=(\alpha+(\beta+\gamma''))+1 &&[\text{Voraussetzung}]\\ &=\alpha+((\beta+\gamma'')+1) &&[\text{Nr. 2, Gl. (2)}]\\ &=\alpha+(\beta+(\gamma''+1)) &&[\text{desgl.}]\\ &=\alpha+(\beta+\gamma').\end{aligned}$$

Damit ist das assoziative Gesetz als richtig dargetan.**)

Ist n eine feste endliche Zahl, d. h. $n<\omega$, und x eine variable endliche ganze Zahl, dann wächst die endliche Zahl $n+x$ mit x zugleich gegen ω und es ist $n+\omega=\omega$. Ist $\beta\geqq\omega$, dann ist nach Nr. 6: $\beta=\omega+\xi$. Daher folgt nach Nr. 8: $n+\beta=(n+\omega)+\xi=\omega+\xi=\beta<\beta+n$, falls $\omega>n\geqq1$ ist. Das kommutative Gesetz $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ gilt also

*) Das Gesetz gilt natürlich auch für mehr Zahlen, so daß der Begriff der Summe $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varkappa$ für endliche viele Summanden als erklärt gelten darf.

**) Aus dem assoziativen Gesetz folgt für $\beta=0$:

$$(\alpha+0)+\gamma=\alpha+\gamma=\alpha+(0+\gamma),\quad\text{also}\quad\gamma=0+\gamma.$$

im allgemeinen nicht, eine Erscheinung, die bei allen in § 1 betrachteten Operationen eintritt, wie wir früher sahen. Es läßt sich aber leicht aus den Gleichungen (1), (2), (4) der Nr. 2 zeigen, daß stets $n+m=m+n$ ist, falls $n, m<\omega$ ist.

10) Satz VIII sagt aus: es gibt nur endlich viele Zahlen η, für die bei gegebenem festem β die Gleichung $\beta=\xi+\eta$ Lösungen ξ besitzt. Da im Falle einer Lösung η ein Rest von β heißt, so sagen wir kurz: *Jede Zahl β hat nur endlich viele Reste.* Ein zweiter Beweis dieses Satzes beruht auf dem

Satz. *Der Rest ν' einer Summe $\mu+\nu$ ist entweder Rest von ν oder Rest von μ vermehrt um ν.*

Beweis. Da ν' Rest von $\mu+\nu$ ist, so ist $\mu+\nu=\mu'+\nu'$. Sei erstens $\mu'\geqq\mu$, also $\mu'=\mu+\varrho$; es ist dann $\mu+\varrho+\nu'=\mu+\nu$ und somit $\nu=\varrho+\nu'$. Es ist also ν' ein Rest von ν, und ν gleich einem Reste ϱ von μ' vermehrt um ν'.

Ist also zweitens $\mu>\mu'$, so muß ganz entsprechend ν' gleich einem Reste von μ vermehrt um ν sein.

Daß nun jede Zahl β nur endlich viele Reste hat, folgt hieraus leicht durch transfinite Induktion. Die Zahl $\beta=1$ hat nur die Reste 0 und 1. $(1=1+0=0+1.)$ Sei die Behauptung richtig für jedes $\beta<\beta'$, dann ist zu zeigen, daß β' auch nur endlich viele Reste besitzt. Die Zerlegungen $\beta'=0+\beta'=\beta'+0$ lehren, daß β' die Reste 0 und β' hat. Hat β' keinen von 0 und β' verschiedenen Rest, dann ist der Satz richtig; β' habe einen weiteren Rest β; sei also $\beta'=\alpha+\beta$, und hierin sei α minimal gewählt. Es ist hier nach Voraussetzung $0<\beta<\beta'$ und daher $0<\alpha<\beta'$. Also haben α und β einzeln nur endlich viele Reste; nach dem obigen Satz ist jeder Rest von $\beta'=\alpha+\beta$ entweder einer der endlich vielen Reste von β oder einer der um β vermehrten endlich vielen Reste von α. Somit hat β' nur endlich viele Reste. Jede Zahl $\beta>0$ hat nun mindestens zwei Reste 0 und β. Es entsteht die Frage: gibt es Zahlen mit genau zwei Resten? Ja. Es sind das die Hauptzahlen der Addition.

11) Nach XIII existieren Hauptzahlen der Addition. Es sind das Zahlen $\gamma>\lambda=0$, für die stets $\gamma=\alpha+\gamma$ ist, wenn $0\leqq\alpha<\gamma$ ist. Diese additiven Hauptzahlen nennt Hessenberg*) „Hauptzahlen". Da wir andere als additive Hauptzahlen in diesem Paragraphen nicht betrachten, so lassen wir in ihm das Beiwort „additiv" fort; wir bezeichnen eine Hauptzahl mit π. Es ist also $\pi>0$ und für jedes $\alpha<\pi$ ist $\pi=\alpha+\pi$,

*) G. Hessenberg: Grundbegriffe der Mengenlehre, Abhandl. der Friesschen Schule, I. Bd., 4. Heft (als Sonderdruck erschienen), § 64. Wir zitieren diese Arbeit in Zukunft mit: G. d. M. — Man vgl. die in § 1 zur Erklärung der allgemeinen Hauptzahlen gegebene Anmerkung.

so daß die Hauptzahl π genau zwei Reste 0 und π besitzt. Hat umgekehrt eine Zahl β genau zwei Reste, dann ist β eine Hauptzahl. Denn wenn β zwei Reste hat, so ist $\beta > 0$; ist dann $\beta > \alpha \geqq 0$, so ist nach Nr. 6 die Zahl $\beta = \alpha + \xi$; hier muß der Rest ξ von β einer der beiden Reste 0 und β sein. Da nun $\beta > \alpha$ ist, so ist $\xi > 0$, also $\xi = \beta$, d. h. es ist $\beta = \alpha + \beta$ für jedes α unterhalb β. Somit ist β eine Hauptzahl.

12) Da $1 = 0 + 1$ ist, so ist 1 eine Hauptzahl. Nach den sich an den Beweis von IX anschließenden Bemerkungen kann 2 für die Addition keine Hauptzahl sein, was ja auch die Zerlegung $2 = 1 + 1$ lehrt. Denn es besitzt nach diesen Bemerkungen eine Operation höchstens eine Hauptzahl, die keine Limeszahl ist. Die 2 kann aber auch deshalb keine Hauptzahl sein, weil in unserem Fall $w(1) > 1$ ist. Die erste Limeszahl ω ist die erste überendliche Hauptzahl, da nach Nr. 9 stets $\omega = n + \omega$ für $n < \omega$ ist.

Die Sätze X ff. lauten in unserem Fall:

(a) *Ist eine Zahl π der Limes einer Folge von Zahlen α und besteht für jedes dieser α die Gleichung $\pi = \alpha + \pi$, dann ist π eine Hauptzahl.*

(b) *Hat eine Folge von Zahlen α die Eigenschaft, daß mit α zugleich auch $\alpha + \alpha$ der Folge angehört, dann hat die Folge einen Limes π und π ist eine Hauptzahl.*

(c) *Der Limes einer Menge von Hauptzahlen ist eine Hauptzahl.*

(d) *Ist $\alpha > 0$, dann ist die erste Hauptzahl über α der Limes der Folge $\alpha, \alpha + \alpha, \alpha + \alpha + \alpha, \cdots$**). — Für $\alpha = 1$ ist also die erste überendliche Hauptzahl der Limes der Folge $1, 2, 3, 4, \cdots$, d. h. die Zahl ω, ein uns bekanntes Resultat.

Daß wir, um die erste Hauptzahl über α zu erhalten, die Reihe α, $\alpha + \alpha$, $\alpha + \alpha + \alpha, \cdots$, anstatt der Partialreihe α, $\alpha + \alpha$, $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha, \cdots$ benutzen können, das liegt nach den sich an XIII anschließenden Bemerkungen darin begründet, daß das assoziative Gesetz gilt. Zugleich ergibt sich nach den dortigen Erörterungen, daß die kleinste Lösung ξ der Gleichung $\xi = \alpha + \xi$ die erste Hauptzahl $\pi > \alpha$ ist.

Nach Nr. 9 ist für jedes überendliche β stets $1 + \beta = \beta$, also hat für jedes $\beta \geqq \omega$ die Gleichung $\beta = \alpha + \beta$ eine Wurzel $\alpha > 0$. Somit ist für jedes $\beta \geqq \omega$ Satz XIV anwendbar. Nach XIV existiert aber zu jeder Zahl $\beta \geqq \omega$ eine oberhalb 0 und nicht oberhalb β gelegene Zahl β', so daß $\beta = \xi + \beta$ ist für jedes $\xi < \beta'$, aber $\beta < \xi + \beta$ ist für $\xi \geqq \beta'$. Da das assoziative Gesetz erfüllt ist, so ist nach Satz XIV, Zusatz 2 die Zahl β' eine Hauptzahl π und da $\beta \geqq \pi$ ist, so ist nach Nr. 6: $\beta = \pi + \beta_1 < \xi + \beta$ für jedes $\xi \geqq \pi$. Also folgt speziell $\pi + \beta_1 < \pi + \beta$, d. h. $\beta_1 < \beta$.

*) Nach XIII selbst ist eine Partialfolge zu nehmen:
$\alpha, \; \alpha + \alpha, \; \alpha + \alpha + \alpha + \alpha, \; \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha, \cdots$

Da für jede Hauptzahl $\pi' \leqq \beta$ nach Nr. 6: $\beta = \pi' + \eta$ ist, so folgt weiter nach Satz XIV, Zusatz 2, daß $\pi' \leqq \pi$ ist, d. h. es ist π die größte nicht oberhalb β gelegene Hauptzahl. Nach XV folgt außerdem noch, daß β_1 der größte unterhalb β gelegene Rest von β ist, da ja $\beta = \pi + \beta_1$ ist und π der Limes der Wurzeln ξ der Gleichung $\beta = \xi + \beta$ ist. Wir fassen alles dies zusammen:

(e) *Zu jeder Zahl $\beta \geqq \omega$ gibt es eine größte nicht oberhalb β gelegene Hauptzahl π; es ist $\beta = \xi + \beta$ für jede Zahl $\xi < \pi$, aber $\beta = \pi + \beta_1$, wo β_1 der größte unterhalb β gelegene Rest von β ist.*

Für eine endliche Zahl $\beta = b$ gilt derselbe Satz; er wird ausgedrückt durch die Gleichung $b = 1 + (b-1)$.

13) Die Hauptzahlen jeder Operation sind, wie wir sahen, irreduzibel in bezug auf die Operation. Da nun in unserem Fall jede Zahl mit nur zwei Resten eine Hauptzahl ist, so folgt umgekehrt, daß jede additiv irreduzibele Zahl $\beta > 0$ eine Hauptzahl ist, d. h. es ist jede Zahl $\beta > 0$, die sich nicht als Summe zweier kleineren Zahlen darstellen läßt, eine Hauptzahl. *Es sind also die Begriffe „additive Hauptzahl" und „additive irreduzibele Zahl" gleichwertig.* Wir werden bei der Multiplikation sehen, daß sich die Sache dort anders verhält. Es gibt multiplikativ irreduzibele Zahlen, die keine multiplikativen Hauptzahlen sind. Die additiven Hauptzahlen sind also ausgezeichnet durch diese Eigenschaft; es kommt ihnen aber noch eine Eigentümlichkeit zu, die uns diese Zahlen als noch bemerkenswerter erscheinen läßt: *die Hauptzahlen π sind additive Primzahlen.* Denn es gilt der

Satz: *Ist eine Hauptzahl π Rest einer Summe $\alpha + \beta$*), so ist π Rest von β; und ist π ein Abschnitt von $\alpha + \beta$, so ist die Zahl π ein Abschnitt von α, falls $\alpha + \beta > \beta$ ist.*

Diese Eigenschaft der Zahlen π ist das additive Analogon der Eigenschaft der endlichen multiplikativen Primzahlen p: wenn p ein Teiler von ab ist, dann ist p ein Teiler von a oder von b. Daher dürfen wir π als additive Primzahlen bezeichnen. Wir wenden uns zum Beweise des Satzes.

Beweis. Sei π ein Rest von $\alpha + \beta$, dann ist nach Nr. 10 entweder π ein Rest von β, was wir ja behaupten, oder es ist $\pi = \varrho + \beta$; da π Hauptzahl ist und wir $\beta > 0$ annehmen, so muß $\beta = \pi = 0 + \pi$ sein; also ist auch hier π ein Rest von β. — Sei nun zweitens π ein Abschnitt von $\alpha + \beta$ und $\alpha + \beta > \beta$, d. h. $\alpha + \beta = \pi + \gamma$. Wäre $\alpha < \pi$, $\pi = \alpha + \pi$; so folgte $\alpha + (\alpha + \beta) = (\alpha + \pi) + \gamma = \pi + \gamma = \alpha + \beta$, d. h. $\alpha + \beta = \beta$, was gegen die Annahme $\alpha + \beta > \beta$ verstößt; daher ist $\alpha \geqq \pi$, d. h. $\alpha = \pi + \xi$, und es ist π ein Abschnitt von α.

*) Wo $\beta > 0$ ist.

Die Eigenschaft von π, additive Primzahl zu sein, zerfällt in zwei Behauptungen, wie ja die Form unseres Satzes zeigt; das hat seinen Grund darin, daß das kommutative Gesetz nicht gilt. Unser Satz behauptet also von π in Wahrheit zwei Eigenschaften. Es zeigt sich nun, *daß auch der Begriff „Hauptzahl“ mit dem Begriff „Primzahl“ zusammenfällt;* dabei ergibt sich aber, daß jede der beiden Eigenschaften, die wir oben für π behaupteten, umgekehrt einzeln π als Hauptzahl charakterisiert. Es gilt der

Satz. *Folgt für eine Zahl $\gamma > 0$ aus der Tatsache, daß γ Rest von $\alpha + \beta > \alpha$ ist, stets, daß γ auch Rest von β ist, so ist γ eine Hauptzahl.*

Folgt für eine Zahl $\gamma > 0$ aus der Tatsache, daß γ Abschnitt der Zahl $\alpha + \beta > \beta$ ist, stets, daß γ auch Abschnitt von α ist, dann ist γ eine Hauptzahl.

Beweis. Wir beweisen den ersten Teil so: es ist $\gamma > 0$; sei α eine beliebige unterhalb γ gelegene Zahl, dann ist nach Nr. 6: $\gamma = \alpha + \beta$, wo $\beta > 0$ ist. Also ist, da γ Rest von $\gamma = \alpha + \beta$ ist, nach Voraussetzung γ auch Rest von β, d. h. $\beta \geqq \gamma \geqq \beta$. Daher ist $\gamma = \beta$, d. h. $\gamma = \alpha + \gamma$ für $\gamma > \alpha \geqq 0$. Somit ist γ eine Hauptzahl.

Der zweite Teil wird auf folgende Weise erledigt: es sei $\gamma > 0$ keine Hauptzahl, dann gibt es also eine Zerlegung $\gamma = \alpha + \beta$, bei der $\gamma > \beta > 0$ ist, d. h. es ist $\alpha + \beta > \beta$. Es wäre demnach γ ein Abschnitt von $\gamma = \alpha + \beta$, also nach Voraussetzung auch von α, d. h. es wäre $\alpha \geqq \gamma > \alpha$. Der Widerspruch $\alpha > \alpha$ zeigt also, daß γ eine Hauptzahl sein muß.

Wir fassen nunmehr zusammen: *Die Addition hat die Eigenschaft, daß für sie die drei Begriffe „Hauptzahl“, irreduzibele Zahl“, „Primzahl“ äquivalent sind, d. h. die drei durch diese Begriffe definierten Zahlbereiche fallen in unserem Fall in einen Bereich zusammen.**)

14) Wie man nun in der endlichen multiplikativen Zahlentheorie jede Zahl in eindeutiger Weise multiplikativ aus endlichen Primzahlen zusammensetzt, so zeigt sich, daß für unseren erweiterten Bereich der transfiniten Zahlen ein analoger additiver Satz gilt:

Satz. *Jede von Null verschiedene Zahl läßt sich in eindeutiger Weise als Summe endlich vieler, nicht zunehmender Hauptzahlen darstellen.*

Diese von Cantor**) herrührende Darstellung heißt die Normalform einer transfiniten Zahl. Bei Cantor ist jedoch diese Darstellung nicht rein additiver Natur, sondern wird aus dem Potenzbegriff mit Hilfe eines Satzes abgeleitet, der unserem Satz VI entspricht. Auf die obige rein

*) Allerdings ist die Zahl 0 von der Betrachtung auszuschließen.

**) l. c. pag. 237.

additive Form gebracht und mit lediglich additiven Mitteln bewiesen hat zuerst Hessenberg*) den Satz.

Wir zeigen die Eindeutigkeit zu allerletzt und legen zuerst dar, daß jede Zahl β als endliche Summe nicht zunehmender Hauptzahlen darstellbar ist. Es genügt aber zu zeigen, daß β sich als endliche Summe von Hauptzahlen darstellen läßt; denn ist etwa $\beta = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$ und ist $\pi_2 < \pi_3$, d. h. $\pi_2 + \pi_3 = \pi_3$, so folgt: $\pi = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \pi_1 + \pi_3$; ist außerdem noch $\pi_1 < \pi_3$, so folgt: $\beta = \pi_3$, d. h. ich kann in einer solchen Darstellung jede Hauptzahl unterdrücken, auf die noch eine größere Hauptzahl folgt. Es bleibt dann in der Tat eine Reihe endlich vieler, nicht zunehmender Hauptzahlen übrig. Wir wenden uns jetzt zum Beweise.

Beweis 1.**) Nach Nr. 12, (c) ist $\beta = \pi + \beta_1$, wo π die größte nicht oberhalb β gelegene Hauptzahl und β_1 der größte *unterhalb* β gelegene Rest von β ist, d. h. $\beta > \beta_1$. Für β_1 gilt eine entsprechende Gleichung: $\beta_1 = \pi_1 + \beta_2$, $\beta_1 > \beta_2$ etc. Die Reihe der Zahlen $\beta, \beta_1, \beta_2, \cdots$ nimmt beständig ab und bricht daher ab; also erhalten wir folgende Kette von Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} \beta & = \pi + \beta_1, & \beta & > \beta_1, \\ \beta_1 & = \pi_1 + \beta_2, & \beta_1 & > \beta_2, \\ \vdots & & \vdots & \\ \beta_{r-1} & = \pi_{r-1} + \beta_r, & \beta_{r-1} & > \beta_r, \\ \beta_r & = \pi_r. & & \end{array}$$

Daraus folgt sofort:

$$\beta = \pi + \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r.\text{***)}$$

Beweis 2. Wir benutzen die Kenntnis der Existenz der Hauptzahlen nicht.

Unter allen Resten von β gibt es einen kleinsten Rest oberhalb Null; er heiße π_1'. Unter den zum Rest π_1' gehörigen Abschnitten sei der kleinste Abschnitt β', dann ist $\beta = \beta' + \pi_1' > \beta'$. Da nun jeder Rest von π_1' nicht größer als π_1' ist und dabei nach dem assoziativen Gesetz auch Rest von β ist, so folgt, da π_1' der kleinste von Null verschiedene Rest von β ist,

*) G. d. M., Kap. XIX.

**) Das ist im wesentlichen der Hessenbergsche Beweis (l. c.). Nur definiert Hessenberg die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots$ nicht rekurrierend.

***) Es ist hier auch $\pi \geqq \pi_1 \geqq \pi_2 \geqq \cdots \geqq \pi_r$. Wäre nämlich $\pi_s > \pi_{s-1}$, so wäre π_s die größte Hauptzahl, die oberhalb β_{s-1} liegt, während doch $\pi_{s-1} < \pi_s$ diese Hauptzahl ist. In unserem Fall braucht also keine Hauptzahl unterdrückt zu werden. Dasselbe gilt übrigens auch bei dem folgenden Beweise.

daß π_1' nur die beiden Reste 0 und π_1' hat, d. h. π_1' ist eine Hauptzahl, womit die Existenz der Hauptzahlen von neuem bewiesen ist. — Nun ist $\beta > \beta'$ und für β' existiert eine entsprechende Gleichung: $\beta' = \beta'' + \pi_2'$, $\beta' > \beta''$. Hier ist β'' wieder der zu π_2' gehörige Minimalabschnitt von β' etc. Der Beweis geht genau so weiter wie der vorige. Daß hier $\pi_1' \leqq \pi_2' \leqq \pi_3' \leqq \cdots$ ist, folgert man leicht daraus, daß die Zahlen $\beta', \beta'', \cdots$ minimal gewählt waren.

Beweis 3. Nach den allgemeinen Vorbemerkungen zum Beweise unseres Satzes genügt es zu zeigen: β ist eine endliche Summe von Hauptzahlen. Für $\beta = 1$ ist das richtig, da ja 1 selbst eine Hauptzahl ist. Sei bereits bewiesen, daß alle Zahlen $\beta' < \beta$ solche Summen sind, dann müssen wir nach dem Prinzip von der transfiniten Induktion es auch für β beweisen. Ist nun β eine Hauptzahl, dann ist der Satz sicher auch für β richtig. Sei also β keine Hauptzahl. Dann hat β einen Rest β', für den $0 < \beta' < \beta$ ist. Es ist also $\beta = \alpha' + \beta'$, wo etwa wieder α' minimal gewählt sein mag; da nun $0 < \beta' < \beta$ und $0 < \alpha' < \beta$ ist, so sind α' und β' darstellbar als Summen endlich vieler Hauptzahlen. Also ist auch die Zahl $\beta = \alpha' + \beta'$ so darstellbar.

Wir haben also bisher bewiesen, daß für jede Zahl $\beta \geqq 1$ eine Darstellung besteht: $\beta = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r$, wo $\pi_1 \geqq \pi_2 \geqq \cdots \geqq \pi_r$ ist. Die Eindeutigkeit dieser Darstellung erhellt aus folgendem

Satz. *Sei $\alpha = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r$, wo die Hauptzahlen $\pi_1, \pi_2, \cdots$ mit wachsendem Index nicht zunehmen, und sei ebenso $\beta = \pi_1' + \pi_2' + \cdots + \pi_s'$, wo ebenfalls $\pi_1' \geqq \pi_2' \geqq \cdots \geqq \pi_s'$ sein möge; es sei ferner*

$$\pi_1 = \pi_1',\ \pi_2 = \pi_2', \cdots, \pi_t = \pi_t',$$

aber $\pi_{t+1} > \pi'_{t+1}$, dann ist $\alpha > \beta$.

Beweis. Da

$$\pi_{t+1} > \pi'_{t+1} \geqq \pi'_{t+2} \geqq \cdots \geqq \pi'_s$$

ist, so ist

$$\pi'_s + \pi_{t+1} = \pi_{t+1},\ \pi'_{s-1} + \pi'_s + \pi_{t+1} = \pi_{t+1}, \cdots, \pi'_{t+1} + \pi'_{t+2} + \cdots + \pi'_s + \pi_{t+1} = \pi_{t+1};$$

also ist

$$\pi_{t+1} + \pi_{t+2} + \cdots + \pi_r \geqq \pi_{t+1} > \pi'_{t+1} + \pi'_{t+2} + \cdots + \pi'_s.$$

Man addiere auf beiden Seiten dieser Ungleichung linksseitig die gleiche Zahl

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_t = \pi_1' + \pi_2' + \cdots + \pi_t',$$

dann folgt $\alpha > \beta$.

Wenn also bei zwei Summen endlich vieler nicht zunehmender Hauptzahlen auch nur ein Glied nicht übereinstimmt, dann sind die Summen verschieden, und zwar bestimmt das erste (von links aus gezählt) abweichende Glied die Größenordnung der ganzen Summe.

Somit ist die Normaldarstellung einer Zahl β eindeutig.*) Es läßt sich also β in eindeutiger Weise aus additiven Primzahlen zusammensetzen. Es ist diese Eindeutigkeit der Darstellung deshalb bemerkenswert, weil doch das kommutative Gesetz nicht gilt. Unsere Zerlegung von β läßt vermuten, daß die Arithmetik der transfiniten Zahlen wesentlich additiver Natur zu sein scheint; eine Vermutung, die später gerechtfertigt wird, wenn wir erkennen, daß die multiplikativen Gesetze eine ähnliche Einfachheit und Vollkommenheit nicht besitzen.

15) Anhang: *Die Subtraktion.***)

Da die Addition nicht kommutativ***) ist, läßt sie sich auf zwei Arten umkehren. Sei $\gamma = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_t + \pi_{t+1} + \cdots + \pi_r$ gegeben und β ein Rest von γ. Ist $\beta > 0$, dann ist $\beta = \pi_{t+1} + \cdots + \pi_r$. Der kleinste zu β gehörige Abschnitt von γ ist dann $\alpha = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_t$. Diesen kleinsten so definierten Abschnitt bezeichnen wir mit $(\gamma - \beta)$. Offenbar ist $(\gamma - 0) = \gamma$ und $(\gamma - \gamma) = 0$. Ist $\beta > 0$, also $\beta = \pi_{t+1} + \cdots$, dann ist jeder zu β gehörige Abschnitt von γ gleich $(\gamma - \beta) + \vartheta$, wo ϑ eine beliebige Zahl unterhalb π_{t+1} ist.

1) Es ist nach Definition $(\gamma - \beta) + \beta = \gamma$; $(\gamma - 0) = \gamma$; $(\gamma - \gamma) = 0$.

2) Ohne Beweis sei bemerkt, daß $((\delta + \gamma) - \beta) = \delta + (\gamma - \beta)$ ist, falls β ein *unterhalb* γ gelegener Rest von γ ist.

Ist $\gamma \geqq \alpha$, dann definiert $\gamma = \alpha + \beta$ eindeutig β. Wir setzen

$$\beta = (-\alpha + \gamma).$$

3) Es ist nach Definition $\alpha + (-\alpha + \gamma) = \gamma = (\alpha - \alpha) + \gamma$; ferner ist $(-\alpha + \alpha) = 0$ und $(-0 + \alpha) = \alpha$.

Ferner ist für $\gamma \geqq \alpha$ stets $(-\alpha + (\gamma + \delta)) = (-\alpha + \gamma) + \delta$.

Es bestehen noch folgende Relationen, die ebenfalls ohne Beweis mitgeteilt seien.

4) $(\delta - \beta) + \alpha = \delta + (-\beta + \alpha)$, falls $\alpha \geqq \beta$ und β ein Rest von δ ist.

5) $(-(\alpha + \beta) + \delta) = (-\beta + (-\alpha + \delta))$, falls $\delta \geqq \alpha + \beta$ ist.

Setzt man hier $\alpha + \beta = \mu$, $\beta = (-\alpha + \mu)$, dann lautet die Formel:

(6) $(-\mu + \delta) = (-(-\alpha + \mu) + (-\alpha + \delta))$, falls $\delta \geqq \mu \geqq \alpha$ ist.

$$\left.\begin{array}{ll} (7) & ((\delta - \varrho_1) - (\varrho - \varrho_1)) = (\delta - \varrho) \\ (8) & (-(\delta - \varrho) + (\delta - \varrho_1)) = (\varrho - \varrho_1) \end{array}\right\} \text{ falls } \varrho \text{ und } \varrho_1 \text{ Reste von } \delta \text{ sind und } \varrho \geqq \varrho_1 \text{ ist.}$$

*) Man kann auch Summen von unendlich vielen Summanden erklären. Mit Zulassung solcher Summen wird die Darstellung mehrdeutig.

**) Einige der in Nr. 15 zusammengestellten Formeln erweisen sich bei unseren Untersuchungen als nützlich, daher bemerken wir hier diese Formeln.

***) Man vgl. E. Jacobsthal: Vertauschbarkeit transfiniter Ordnungszahlen, Math. Ann. Bd. 64.

§ 3.

Funktionen transfiniter Variabeln. (Fortsetzung.)

Wir beginnen damit, die im Beweise zu Satz I gelassene Lücke auszufüllen.

Es ist uns eine beständig wachsende Funktion $w(\alpha)$ gegeben, die für $\alpha \geqq \beta_0$ definiert ist.

Es war behauptet: es gibt Zahlen α, für die $w(\alpha) \geqq \alpha$ ist; bedeutet dann $\lambda_0 \geqq \beta_0$ die kleinste dieser Zahlen α, dann ist für *jede* Zahl $\alpha \geqq \lambda_0$ stets $w(\alpha) \geqq \alpha$.

Es war in § 1 nur bewiesen worden: *wenn* für eine Zahl ξ die Beziehung $w(\xi) \geqq \xi$ besteht, dann ist auch $w(\alpha) \geqq \alpha$ für jedes $\alpha \geqq \xi$. Es fehlt also nur noch der Nachweis, *daß* es eine Zahl ξ gibt, die der verlangten Bedingung genügt.

Wir setzen nun gar nichts von dem bereits Bewiesenen voraus, sondern folgern Satz I aus

Satz XVI. *Ist β eine beliebige nicht unterhalb β_0 gelegene Zahl, dann besteht für jede Zahl δ die Beziehung $w(\beta + \delta) \geqq w(\beta) + \delta$.*

Beweis. Sei $\beta \geqq \beta_0$, dann ist $w(\beta)$ definiert und für $\delta = 0$ gilt unsere Beziehung. Es gelte der Satz für jedes $\delta < \delta'$, d. h. für $\delta < \delta'$ sei $w(\beta + \delta) \geqq w(\beta) + \delta$, dann ist zu beweisen, daß auch $w(\beta+\delta') \geqq w(\beta) + \delta'$ gilt. Erstens sei $\delta' = \delta'' + 1$, dann ist $w(\beta + \delta'') \geqq w(\beta) + \delta''$ und da w eine wachsende Funktion ist, so ist $w(\beta + \delta') > w(\beta + \delta'') \geqq w(\beta) + \delta''$, d. h. $w(\beta + \delta') \geqq w(\beta) + \delta'' + 1 = w(\beta) + \delta'$. Sei zweitens δ' eine Limeszahl, dann ist $w(\beta + \delta') > w(\beta + \delta)$ für jedes $\delta < \delta'$, also auch

$$w(\beta + \delta') \geqq \lim_{\delta} w(\beta + \delta) \geqq \lim_{\delta} \{w(\beta) + \delta\} = w(\beta) + \lim \delta = w(\beta) + \delta'.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir folgern nun Satz I so: es werde $\beta = \beta_0$ gesetzt; ferner werde $\delta = \pi$ gewählt, wenn π die erste oberhalb $\max(\beta_0, w(\beta_0))$ gelegene additive Hauptzahl ist. Dann wird:

$$\beta + \delta = \beta_0 + \pi = \pi$$

und ebenso

$$w(\beta) + \delta = w(\beta_0) + \pi = \pi,$$

also lautet unsere Gleichung: $w(\pi) \geqq \pi$. Damit ist gezeigt, daß es eine Lösung α der Beziehung $w(\alpha) \geqq \alpha$ gibt. Es sei λ_0 die kleinste Lösung, dann ist natürlich $\lambda_0 \geqq \beta_0$. Es bedeute nun α eine beliebige Zahl $\geqq \lambda_0$, dann setze man $\delta = (-\lambda_0 + \alpha)$, d. h. $\alpha = \lambda_0 + \delta$. Es folgt nach unserem Satze, da $w(\lambda_0) \geqq \lambda_0$ ist, die Beziehung:

$$w(\alpha) = w(\lambda_0 + \delta) \geqq w(\lambda_0) + \delta \geqq \lambda_0 + \delta = \alpha.$$

Damit ist I bewiesen.

Wir betrachten nun wieder unsere Funktion $f(\alpha, \beta)$; wir haben in V die Funktion $f(\alpha, \beta)$ nach unten hin abgeschätzt. Die untere Schranke enthielt aber nur α oder nur β. Jetzt gestattet uns XVI eine genauere Abschätzung. Es gilt nämlich

Satz XVII. *Es ist stets* $f(\alpha, 1+\beta) \geqq w(\alpha) + \beta \geqq \alpha + \beta$. *Also ist für* $\beta \geqq \omega$ *immer* $f(\alpha, \beta) \geqq \alpha + \beta$.

Beweis. Die Funktion $f(\alpha, \beta)$ ist bei konstantem α eine für $\beta \geqq 1$ erklärte Funktion von β, die mit β beständig wächst, also ist nach XVI: $f(\alpha, 1+\beta) \geqq f(\alpha, 1) + \beta = w(\alpha) + \beta$ für $\alpha \geqq \lambda$, $\beta \geqq 0$. Da nun $w(\alpha) \geqq \alpha$ für $\alpha \geqq \lambda$ ist, so folgt: $f(\alpha, 1+\beta) \geqq w(\alpha) + \beta \geqq \alpha + \beta$. Für $\beta \geqq \omega$ ist $1 + \beta = \beta$ und daher $f(\alpha, \beta) \geqq w(\alpha) + \beta \geqq \alpha + \beta$.

Also dient die additive Funktion $\alpha + \beta$ selbst als untere Schranke für die beliebige Funktion f; eine bessere Abschätzung dürfen wir nicht verlangen, da für $f \equiv \alpha + \beta$ die Schranke erreicht wird. — Für die Hauptzahlen von f liefert XVII folgenden

Satz XVIII. *Jede eigentliche Hauptzahl von f ist eine additive Hauptzahl.*

Beweis. Sei γ eine eigentliche Hauptzahl von f, also $\gamma \geqq \omega$. Dann ist $\gamma = f(\alpha, \gamma) \geqq \alpha + \gamma \geqq \gamma$. Daher ist $\gamma = \alpha + \gamma$ für jedes α, das der Bedingung $\lambda \leqq \alpha < \gamma$ genügt. Das gilt natürlich auch für $\alpha < \lambda$. Also ist γ eine additive Hauptzahl.

Durch XVIII wird also IX erheblich verschärft. Satz IX sagte aus, daß jede eigentliche Hauptzahl eine Limeszahl ist; hier sehen wir, daß diese Zahlen γ sogar additive Hauptzahlen sind. Es werden also solche Zahlen, wie $\omega + \omega$, $\omega + \omega + \omega$, ausgeschlossen; der Abstand zwischen konsekutiven Hauptzahlen konnte nach IX noch konstant sein; aus XVIII folgt, daß er beständig wächst; die additiven Hauptzahlen haben den denkbar kleinsten Abstand; sie sind am dichtesten verteilt. Die Addition nimmt also eine besondere Stellung im Gebiete der von uns betrachteten Funktionen ein.

Man könnte nun vermuten, daß es außer $\alpha + \beta$ keine andere Funktion $f(\alpha, \beta)$ gibt, die die additiven Hauptzahlen zu Hauptzahlen besitzt. Oder allgemeiner könnte man denken, daß zwei verschiedene nach dem in § 1 entwickelten Induktionsschema definierte Funktionen nie in ihren Hauptzahlen übereinstimmen können. Dem ist aber nicht so, wie wir an folgendem Beispiel sehen.

Wir setzen: $w(\alpha) = \alpha + \alpha + 1$, $g(\xi, \eta) = \xi + 1$. Es ist dann $\lambda = 0$ und man erkennt, daß hier $f(\alpha, \beta) = \alpha + \alpha + \beta$ wird. Es sind offenbar sämtliche additiven Hauptzahlen auch Hauptzahlen dieser neuen Funktion. Es läßt sich dieses Beispiel verallgemeinern.

Wir zeigen nämlich: *zu jeder Funktion $f(\alpha, \beta)$ können wir eine Funktion $\bar{f}(\alpha, \beta)$ finden, so daß f und $\bar{f}$ dieselben Hauptzahlen besitzen.*

Es sei also f definiert mit Hilfe von $w(\alpha)$ und $g(\xi, \eta)$. Es sei d eine feste endliche Zahl. Man setze $\bar{w}(\alpha) = f(\alpha, \alpha + d)$ und $\bar{g}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta)$. Es wird dadurch $\bar{f}(\alpha, \beta)$ erklärt für $\alpha \geqq \bar{\lambda}$ und $\beta \geqq 1$ und ohne Mühe erkennt man, daß $\bar{\lambda} = \lambda$ ist, falls $\lambda + d > 0$ ist; ist aber $\lambda + d = 0$, dann ist $\bar{\lambda} = 1$; weiter ergibt sich durch Induktion, daß für $\beta = b < \omega$

$$\bar{f}(\alpha, b) = f(\alpha, \alpha + d + b - 1),$$

aber für $\beta \geqq \omega$ stets

$$\bar{f}(\alpha, \beta) = f(\alpha, \alpha + \beta)$$

ist. Beide Formeln zusammen lassen sich schreiben:

$$\bar{f}(\alpha, \beta) = f(\alpha, \alpha + d + (-1 + \beta))$$

für $\alpha \geqq \bar{\lambda}$, $\beta \geqq 1$. Da nun Satz XVIII gilt, so folgt hieraus, daß $\bar{f}$ und f dieselben eigentlichen Hauptzahlen besitzen. Besitzt f außerdem keine Hauptzahlen, d. h. ist weder 1 noch 2 eine Hauptzahl, dann fixieren wir d so, daß 1 und 2 auch keine Hauptzahlen von $\bar{f}$ sein können. Nach XVII folgt nämlich für $\alpha = a < \omega$ und $d = 4$, daß

$$\bar{f}(a, b) = f(a, a + 3 + b) \geqq a + a + 2 + b \geqq 2 + 1 = 3$$

ist. Somit hat auch $\bar{f}$ keine endlichen Hauptzahlen, d. h. f und $\bar{f}$ haben dieselben Hauptzahlen.

Es kann aber eintreten, daß f die Hauptzahl 1 hat (2 ist dann keine Hauptzahl von f). Dann ist $\lambda = 0$ und wir setzen $d = 1$, so daß $\bar{\lambda} = \lambda = 0$ wird. Dann wird $\bar{f}(\alpha, b) = f(\alpha, \alpha + b)$ und daher

$$\bar{f}(0, 1) = f(0, 0 + 1) = f(0, 1) = 1,$$

d. h. 1 ist auch Hauptzahl von $\bar{f}$, also haben f und $\bar{f}$ dieselben Hauptzahlen. Der letzte noch denkbare Fall ist der, daß 2 eine Hauptzahl von f ist; es muß dann $\lambda < 2$ sein. Wir setzen $d = 0$. Da $\lambda \leqq 1$ ist, so ist $\lambda = 0, 1$. Ist $\lambda = 0$, also $\lambda + d = 0 + 0 = 0$, dann ist $\bar{\lambda} = 1$. Ist aber $\lambda = 1$, d. h. $\lambda + d > 0$, dann ist $\bar{\lambda} = \lambda = 1$, also in jedem Fall $\bar{\lambda} = 1$. Es ist daher, damit 2 Hauptzahl von $\bar{f}$ sein soll, nur die eine Gleichung $\bar{f}(1, 2) = 2$ nötig. Nun ist hier $\bar{f}(\alpha, 2) = f(\alpha, \alpha + 1)$, also

$$\bar{f}(1, 2) = f(1, 1 + 1) = f(1, 2) = 2.$$

Somit haben f und $\bar{f}$ auch in diesem Fall dieselben Hauptzahlen.

Damit ist die Behauptung in vollem Umfange bewiesen. Nachdem es uns nun gelungen ist, zu den Hauptzahlen einer Funktion f nach unserm Schema eine neue Funktion $\bar{f}$ zu konstruieren, entsteht das allgemeine Problem: *wie muß ein System von Zahlen beschaffen sein, damit es eine nach dem in* § 1 *entwickelten Verfahren definierte Funktion gibt, die die gegebenen Zahlen zu Hauptzahlen besitzt?*

Nennt man ein System von Zahlen, das die Gesamtheit der Hauptzahlen einer solchen Funktion f repräsentiert, ein Hauptzahlensystem, dann können wir das Problem auch so formulieren: *es sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür abzuleiten, daß ein gegebenes Zahlensystem ein Hauptzahlensystem ist.* Es soll gleich im voraus bemerkt werden, daß eine Lösung dieses Problems nicht gegeben wird. Es wird uns nur möglich sein, gewisse notwendige Bedingungen aufzustellen, die in bereits bewiesenen Sätzen enthalten sind. Zunächst seien folgende Bemerkungen vorausgeschickt. Wenn uns $f(\alpha, \beta)$ gegeben ist, dann gibt uns das zu $f(\alpha, \beta)$ gehörende Hauptzahlensystem Anlaß zur Bildung einer beständig wachsenden Funktion $\varphi(\alpha)$. Man bezeichne nämlich eine Hauptzahl γ von f mit $\varphi(\alpha) = \gamma_\alpha$, wenn die Menge der γ vorausgehenden Hauptzahlen den Typus α hat. Die erste Hauptzahl ist also mit γ_0, die zweite mit γ_1 etc. zu bezeichnen. Daß so jeder Hauptzahl ein Index entspricht, läßt sich auch durch transfinite Induktion beweisen. Es hat nun $\varphi(\alpha) = \gamma_\alpha$ folgende Eigenschaften: 1) $\varphi(\alpha)$ wächst beständig; 2) nach XII ist $\lim\limits_{\alpha} \varphi(\alpha) = \varphi\,(\lim \alpha)$; 3) nach XVIII ist $\varphi(\alpha)$ stets eine additive Hauptzahl; es kann höchstens $\varphi(0) = 2$ sein; 4) nach XIII muß $\varphi(\alpha+1)$ für jedes $\alpha \geqq 0$ als Limes einer Reihe vom Typus ω darstellbar sein.

Dafür daß die Zahlen $\varphi(\alpha)$ ein Hauptzahlensystem bilden, sind diese vier Bedingungen notwendig, ob sie aber auch hinreichend sind, das vermag ich nicht zu entscheiden. Ich gehe nun auf die Bedeutung dieser Bedingungen ein wenig ein. Die Bedingung 3) sorgt dafür, daß die Hauptzahlen nicht zu eng gelagert sind.*) In ähnlicher Richtung liegt die Bedeutung von Bedingung 4). Um das einzusehen, setze man $\varphi(\alpha) = \Omega_\alpha$, wenn Ω_α die kleinste Ordnungszahl der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ bedeutet. Insbesondere ist $\Omega_0 = \omega$. Diese Zahlen Ω_α nennt Hessenberg Anfangszahlen.**) Es ist bekannt, daß die Zahlen Ω_α die Bedingungen 1), 2), 3) erfüllen. Aber 4) ist nicht erfüllt, da bereits Ω_1 nicht der Limes einer Reihe vom Typus ω sein kann.***) Nach diesem Sachverhalt hat man also ein gewisses Recht zu sagen: die Zahlen Ω_α stehen zu weit auseinander, um ein Hauptzahlensystem bilden zu können; durch Einschaltung der übrigen additiven Hauptzahlen erhält man z. B. erst ein Hauptzahlensystem. Und doch ist das nur zum Teil richtig; denn wenn auch die sämtlichen Zahlen Ω_α kein Hauptzahlensystem bilden können, so werden wir doch sehen, daß ein Teilsystem der Zahlen Ω_α wieder ein Hauptzahlensystem darstellen kann; also haben wir dann ein System, in dem die Zahlen weiter

*) Man vgl. die Bemerkungen zu Satz XVIII.

**) G. d. M. § 41.

***) Cantor, l. c. pag. 222, Satz C.

auseinander stehen als in dem System aller Ω_α. Man hat also hiernach ebenfalls ein Recht zu behaupten, daß die Zahlen Ω_α zu dicht verteilt sind, um ein Hauptzahlensystem bilden zu können, da ja erst nach Weglassung gewisser Zahlen ein Hauptzahlensystem entsteht.*) — Wir werden nun zeigen, daß es Funktionen gibt, die als Hauptzahlen nur *die* Zahlen Ω_α besitzen, für die $\Omega_\alpha = \alpha$. Es folgt das aus einem allgemeinen Satz. Um zu ihm zu gelangen, bemerken wir, daß eine Funktion $\varphi(\alpha)$, die 1) und 2) erfüllt, die Eigenschaft hat, daß es oberhalb jeder Zahl β Lösungen α der Gleichung $\varphi(\alpha) = \alpha$ gibt.**) Es tritt also als Ergänzung zu I hinzu, daß nicht beständig $w(\alpha) > \alpha$ erfüllt sein kann, falls $w(\alpha)$ die Eigenschaft 2) besitzt, d. h. falls $\lim w(\alpha) = w(\lim \alpha)$ ist. Daß nun die Gleichung $\varphi(\alpha) = \alpha$ beliebig große Lösungen besitzt, ist in einem allgemeinen Satze enthalten, der sich auf eine Funktion $\varphi(\alpha)$ bezieht, die 1) und 2) erfüllt. Es ist 3) und 4) nicht für die Funktion $\varphi(\alpha)$ vorausgesetzt, also werden auch die Werte der Funktion $\varphi(\alpha)$ kein Hauptzahlensystem darstellen können. Aber wir zeigen, daß es Funktionen $\bar{f}$ gibt, deren Hauptzahlen sämtlich der Folge der Zahlen $\varphi(\alpha)$ angehören. Der Satz lautet:

Satz XIX. *Es sei $f(\alpha, \beta)$ gegeben und außerdem eine beständig wachsende Funktion $\varphi(\alpha)$ von α, für die stets $\lim\limits_{\alpha} \varphi(\alpha) = \varphi(\lim \alpha)$ ist; sei außerdem $\varphi(0) > \max(\lambda, 1)$. Es existiert dann eine Funktion $\bar{f}(\alpha, \beta)$, die für $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ erklärt ist und die nur eigentliche Hauptzahlen besitzt, mit der Eigenschaft, daß das System der Hauptzahlen von $\bar{f}$ aus allen denjenigen Hauptzahlen γ von f besteht, die der Gleichung $\varphi(\gamma) = \gamma$ genügen; also sind alle Hauptzahlen von $\bar{f}$ in dem Bereich der Zahlen $\varphi(\alpha)$ enthalten und jeder solche Bereich von Zahlen $\varphi(\alpha)$ enthält Hauptzahlen einer beliebigen Funktion f; insbesondere hat also die Gleichung $\varphi(\alpha) = \alpha$ stets Wurzeln, die oberhalb einer gegebenen Zahl liegen.*

Beweis. Es sei $f(\alpha, \beta)$ durch $w(\alpha)$ und $g(\xi, \eta)$ definiert. Dann setzen wir $\bar{w}(\alpha) = w(\varphi(\alpha))$, so daß $\bar{\lambda}_0 = 0$ wird. Weiter werde

$$\bar{g}(\xi, \eta) \equiv g(\xi, \varphi(\eta))$$

---

*) Diese aus 4) folgenden eigenartigen Verhältnisse erscheinen wohl deshalb nur so auffallend, weil wir zur Zeit die durch eine Limesreihe vom Typus ω approximierbaren Limeszahlen arithmetisch nicht zu charakterisieren vermögen.

**) Hessenberg, G. d. M. § 81. Man vgl. damit die sich an den Beweis von XIII anschließenden Bemerkungen. Die Eigenschaft 2) erfüllt die Funktion $f(\alpha, \beta)$ bei konstantem α als Funktion von β und deshalb kann nicht beständig $f(\alpha, \beta) > \beta$ sein. Und weil $f(\alpha, \beta) > \alpha$ ist, $(\beta > 1)$, so kann nicht die Limeseigenschaft

$$f(\lim \alpha, \beta) = \lim_{\alpha} f(\alpha, \beta)$$

gelten. Diesen Sachverhalt hat zuerst Hessenberg erkannt.

gesetzt; es ist hiernach $\bar{g}(\xi, \eta) = g(\xi, \varphi(\eta)) > \xi$ für $\xi \geqq \bar{\xi}_0 = \xi_0$ und $\eta \geqq \bar{\eta}_0 = 0$, denn es ist $\varphi(0) \geqq \lambda \geqq \eta_0$, also für $\eta \geqq 0$ stets $\varphi(\eta) \geqq \eta_0$, und daher für $\xi \geqq \xi_0$, $\eta \geqq 0$ auch $g(\xi, \varphi(\eta)) > \xi$. Es folgt sofort, daß $\bar{\lambda} = 0$ ist. Also ist durch diese Festsetzungen eine für $\alpha \geqq 0, \beta \geqq 1$ erklärte Funktion $\bar{f}(\alpha, \beta)$ definiert. Nun ist $\bar{f}(\alpha, 1) = \bar{w}(\alpha) = w(\varphi(\alpha)) = f(\varphi(\alpha), 1)$ und durch transfinite Induktion folgt, daß allgemein $\bar{f}(\alpha, \beta) = f(\varphi(\alpha), \beta)$ ist.

Erstens hat nun $\bar{f}(\alpha, \beta)$ nur eigentliche Hauptzahlen. Denn für $1 \leqq b < \omega$ folgt, daß die Beziehung $\bar{f}(0, b) = f(\varphi(0), b) \geqq \varphi(0) \geqq 2$ besteht und für $b > 1$ ist sogar $\bar{f}(0, b) > \varphi(0) \geqq 2$, d. h. 1 oder 2 können keine Hauptzahlen sein.

Zweitens sei nun γ eine Hauptzahl von $\bar{f}$, also ist γ eine Limeszahl und es ist $\gamma = \bar{f}(\alpha, \gamma) = f(\varphi(\alpha), \gamma)$ für jedes $\alpha < \gamma$, also $\gamma > \varphi(\alpha) \geqq \alpha$ für jedes $\alpha < \gamma$. Hieraus folgt weiter, daß $\varphi(\gamma) \geqq \gamma \geqq \lim\limits_{\alpha < \gamma} \varphi(\alpha) = \varphi(\lim \alpha) = \varphi(\gamma)$ d. h. es ist $\varphi(\gamma) = \gamma$.

Drittens zeigen wir, daß γ auch eine Hauptzahl von f ist. Es ist nämlich $\gamma = \bar{f}(\alpha, \gamma) = f(\varphi(\alpha), \gamma) = f(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma)) = \varphi(\gamma)$ für jedes $\alpha < \gamma$, d. h. es ist $\gamma = \varphi(\gamma) = f(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma))$ für eine Folge von Zahlen $\varphi(\alpha)$, deren Limes gleich $\varphi(\lim \alpha) = \varphi(\gamma)$ ist. Nach X ist also $\varphi(\gamma) = \gamma$ eine Hauptzahl von f. — Viertens zeigen wir: wenn eine Hauptzahl γ von f der Gleichung $\gamma = \varphi(\gamma)$ genügt, dann ist γ auch Hauptzahl von $\bar{f}$. Zunächst kann nicht $\gamma = 1$ oder $\gamma = 2$ sein, da $\varphi(0) \geqq 2$, $\varphi(1) \geqq 3$, $\varphi(2) \geqq 4$ ist. Somit ist $\gamma = \varphi(\gamma)$ eine eigentliche Hauptzahl von f. Es ist

$$f(\varphi(\alpha), \gamma) = \bar{f}(\alpha, \gamma) = \gamma \quad \text{für} \quad \varphi(\alpha) < \gamma = \varphi(\gamma),$$

d. h. für $\alpha < \gamma$, also ist γ eine Hauptzahl von $\bar{f}$, womit unser Theorem bewiesen ist.

Als Beispiel sei bemerkt, daß die Funktion $\Omega_\alpha + \beta$ diejenigen Anfangszahlen zu Hauptzahlen besitzt, die ihrem eigenen Index gleich sind.

Folgerungen: Aus unserem Satze ergibt sich nicht nur, daß die Gleichung $\varphi(\alpha) = \alpha$ stets beliebig große Wurzeln hat, sondern auch, daß unter diesen Wurzeln immer wieder, soweit man auch in der Zahlenreihe aufsteigen mag, Hauptzahlen einer beliebigen Funktion auftreten. Hieraus ergibt sich weiter: sei $\psi(\alpha)$ eine zweite Funktion, die dieselben Eigenschaften 1) und 2) erfüllt, dann gibt es oberhalb jeder Zahl β eine Lösung γ der Gleichung $\psi(\gamma) = \gamma$, wenn γ eine beliebige Hauptzahl von $\bar{f}$ ist, d. h. wenn $\gamma = \varphi(\gamma)$ ist. Also hat die Gleichung $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = \alpha$ stets Wurzeln $\alpha > \beta$, wenn β irgend eine Zahl ist; und unter diesen Wurzeln kommen immer wieder Hauptzahlen einer beliebigen Funktion f vor.*) Insbesondere ergibt sich hieraus leicht, daß zwei beliebige Funktionen

*) Daß die Gleichung $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = \alpha$ beliebig große Wurzeln besitzt, erhält man auch direkt aus der Betrachtung der Funktion $\varphi(\psi(\alpha))$.

f und f' stets beliebig große Hauptzahlen gemeinsam haben, d. h. oberhalb jeder Zahl β gibt es immer eine Zahl γ, die die Gleichung $\gamma = f(\alpha, \gamma) = f'(\alpha, \gamma)$ für jedes $\alpha < \gamma$ erfüllt. —

Wir wenden uns jetzt anderen Fragen zu.

Zur Definition der Funktion f gebrauchten wir eine Funktion zweier Variabeln $g(\xi, \eta)$. Wenn nun g selbst zur Klasse der von uns betrachteten Funktionen gehört, dann besitzt g Hauptzahlen. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Hauptzahlen von f und denen von g? Präzisieren wir unsere Voraussetzungen. Wir gehen aus von einer Funktion $w_1(\alpha)$, die der Voraussetzung (a) genügt; außerdem sei den Bedingungen (b) und (c) gemäß eine Funktion $g_1(\xi, \eta)$ gegeben; nach II ist hierdurch $f_1(\alpha, \beta)$ für $\alpha \geqq \lambda_1$, $\beta \geqq 1$ definiert und nun wollen wir $f(\alpha, \beta)$ definieren, indem uns wie früher $w(\alpha)$ gegeben ist, während wir jetzt $g(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta)$ wählen. Es ist $g(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) > \xi$ für $\xi \geqq \lambda_1$ und $\eta \geqq 2$.*) Es ist also (b) erfüllt und $\xi_0 = \lambda_1$, $\eta_0 = 2$*); somit ist λ die kleinste Zahl, für die simultan $w(\lambda) \geqq \lambda_1$, $\lambda \geqq \max(\lambda_0, \eta_0)$ ist ($\eta_0 = 2$ oder 1). Es werde besonders betont, daß wegen III und VII die Funktion $g = f_1$ die Bedingung (c') erfüllt, die (c) enthält. Also gelten für f die Sätze VII, VIII, XIV, Zus. in vollem Umfange. Mit f_1 ist das System der zugehörigen Hauptzahlen gegeben. Aus f_1 haben wir f abgeleitet. Man wird irgend welche Beziehungen zwischen den Hauptzahlen von f und denen von f_1 erwarten dürfen. Es gilt nun zunächst:

Satz XX. *Jede eigentliche Hauptzahl von f ist auch eine von f_1.***)

Beweis. Es ist $f(\alpha, \beta + 1) = f_1(f(\alpha, \beta), \alpha)$. Ist nun γ eine eigentliche Hauptzahl von f und ist $\lambda \leqq \alpha < \gamma$, dann ist auch $\alpha + 1 < \gamma$, also $f(\alpha, \alpha + 1) < \gamma$, d. h. es ist $\gamma > f_1(f(\alpha, \alpha), \alpha) \geqq f_1(\alpha, \alpha)$, da $f(\alpha, \alpha) \geqq \alpha$ ist. Aus $\alpha < \gamma$ folgt somit $f_1(\alpha, \alpha) < \gamma$, d. h. γ ist eine Hauptzahl von f_1.

Es sei bemerkt, daß in dem speziellen Fall, daß $f_1(\xi, \eta) = \xi + \eta$ ist, XX in den Satz XVIII übergeht. — Satz XX ist im allgemeinen nicht umkehrbar. Dagegen läßt sich im Anschluß an VI über die Hauptzahlen von f_1 ein Satz aussagen, der diese Zahlen unter Zuhilfenahme von f in einer Weise charakterisiert, die eine Umkehrung zuläßt. Es geht nämlich für unsern Fall die Ungleichung des Satzes VI in eine Gleichung über.

Satz XXI. *Ist γ eine Hauptzahl von f_1, dann hat die Gleichung $\gamma = f(\alpha, \xi)$ für jedes der Bedingung $\gamma \geqq w(\alpha)$ genügende α genau eine Wurzel ξ.****)

---

*) Falls für jedes $\xi \geqq \lambda_1$ stets $w_1(\xi) > \xi$ ist, gilt das bereits für $\eta \geqq 1$ (V). Dann ist also $\eta_0 = 1$, während i. a. $\eta_0 = 2$ ist.

**) Eine uneigentliche Hauptzahl von f, d. h. $\gamma = 1, 2$, braucht keine von f_1 zu sein.

***) Natürlich muß $\alpha \geqq \lambda$ sein; unter der Voraussetzung (d) (s. weiter unten) folgt aus XXIII, daß ξ eine Hauptzahl von f_2 ist, falls $\gamma > w(\alpha)$, d. h. $\xi > 1$ ist.

Beweis. Es sei also γ eine Hauptzahl von f_1 und es gebe eine Zahl $\alpha \geqq \lambda$, für die $\gamma \geqq w(\alpha) = f(\alpha, 1)$ ist. Nach VI existiert dann eine Zahl ξ, sodaß $f(\alpha, \xi+1) > \gamma \geqq f(\alpha, \xi)$ ist. Wäre nun $\gamma > f(\alpha, \xi) \geqq \alpha$, dann folgte, da γ Hauptzahl von f_1 ist, die Beziehung

$$f(\alpha, \xi+1) = f_1(f(\alpha, \xi), \alpha) < \gamma,$$

während doch $f(\alpha, \xi+1) > \gamma$ ist. Somit muß $\gamma = f(\alpha, \xi)$ sein. Die Umkehrung lautet nun:

Satz XXII. *Giebt es zu einer Zahl γ unendlich viele der Ungleichung $\lambda \leqq \alpha < \gamma$ genügende Zahlen α und besitzt für jedes dieser α die Gleichung $\gamma = f(\alpha, \xi)$ eine Lösung ξ, dann ist γ eine eigentliche Hauptzahl von f_1.*

Beweis. Da γ sich nach Voraussetzung auf unendlich viele Arten in der Form $f(\alpha, \xi)$ darstellen läßt, so ist nach VIII die Zahl γ eine Limeszahl. Sei $\lambda \leqq \alpha < \gamma$ und $\gamma = f(\alpha, \xi)$, dann ist $\xi > 1$. Wäre nämlich $\xi = 1$, also $\gamma = f(\alpha, 1) = w(\alpha)$, dann sei $\alpha < \alpha' < \gamma$ und $\gamma = f(\alpha', \xi')$ nach Voraussetzung. Da nun $w(\alpha') > w(\alpha) = f(\alpha, 1) = f(\alpha', \xi')$ ist, so wäre $w(\alpha') = f(\alpha', 1) > f(\alpha', \xi')$, d. h. $1 > \xi' \geqq 1$, was nicht geht. Somit ist $\xi \geqq 2$. Also folgt:

$$\gamma = f(\alpha, \xi) \geqq f(\alpha, 2) = f_1(f(\alpha, 1), \alpha) \geqq f_1(\alpha, \alpha);$$

es ist daher für $\alpha < \gamma$ stets $f_1(\alpha, \alpha) \leqq \gamma$, und da $f_1(\alpha, \alpha)$ mit α wächst, so ist $f_1(\alpha, \alpha) < \gamma$, mithin ist γ eine Hauptzahl von f_1.

Es ist uns folgendes bekannt: es stellt $f(\alpha, \beta)$ für $f(\alpha, \beta) > \alpha$ dann und nur dann eine Hauptzahl γ von f dar, wenn $\beta = \gamma > \alpha$ ist; $f_1(\alpha, \beta)$ stellt für $f_1(\alpha, \beta) > \alpha$ dann und nur dann eine Hauptzahl γ_1 von f_1 dar, wenn $\beta = \gamma_1 > \alpha$ ist; aus XX folgt, daß $f_1(\alpha, \beta)$ für $f_1(\alpha, \beta) > \alpha$ dann und nur dann eine eigentliche Hauptzahl γ von f darstellt, wenn $\beta = \gamma > \alpha$ ist. Wann ist nun $f(\alpha, \beta)$ eine Hauptzahl von f_1? Kann man vielleicht durch Charakterisierung von β die Bedingung dafür angeben? Im allgemeinen wohl kaum. Wir wollen indessen eine Eigenschaft der Funktion f voraussetzen, die in unseren späteren Anwendungen erfüllt ist. Es besitze nämlich f ein distributives Gesetz. Die Multiplikation besitzt ja ein solches; auch für transfinite Zahlen gilt das, wie wir sehen werden. Es erscheint aber als bemerkenswert, daß auch die Potenzfunktion ein solches Gesetz besitzt, falls man nämlich den Begriff des distributiven Gesetzes gehörig weit faßt. Dann kann man die bekannten Formeln $ab + ac = a(b+c)$, $a^b a^c = a^{b+c}$ von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus ansehen. Wir setzen nämlich als verallgemeinertes distributives Gesetz voraus: *es existiere zu f eine Funktion f_2 derart, daß*

(d) $$f_1(f(\alpha, \beta), f(\alpha, \delta)) = f(\alpha, f_2(\beta, \delta))\text{*)} \quad \textit{ist.}$$

*) Ist für ein einziges α die Gleichung $w(\alpha) = \alpha$ erfüllt, so ist unter der Voraussetzung (d) *stets* $w(\alpha) = \alpha$. Das tritt dann und nur dann ein, wenn $f_2(1, 1) = 2$ ist, eine Gleichung aus der die allgemeinere Relation $f_2(\beta, 1) = \beta + 1$ folgt.

Wir werden sehen, daß in der Tat ein solches Gesetz allgemein gilt, wenn f die multiplikative oder die Potenzfunktion ist; im ersteren Falle ist speziell $f_2 = f_1$. Wenn (d) identisch besteht, dann läßt sich über f_2 folgendes aussagen. Es muß $f_2(\beta, \delta)$ für $\beta, \delta \geqq 1$ definiert sein; dabei braucht f_2 aber keine nach unserem Induktionsschema definierte Funktion zu sein. Da die linke Seite von (d) wächst, wenn δ wächst und α, β konstant sind, so folgt das gleiche für die rechte Seite; also muß bei konstantem β die Funktion $f_2(\beta, \delta)$ mit δ wachsen, d. h. f_2 erfüllt III. Ebenso gilt IV für die Funktion f_2; es ist also $\lim\limits_{\delta} f_2(\beta, \delta) = f_2(\beta, \lim \delta)$. Um zu zeigen, daß auch V gilt, wählen wir $\alpha \geqq \omega$ und wenden XVII an: es folgt dann unter Benutzung von (d): $f(\alpha, f_2(\beta, \delta)) \geqq f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \delta) > f(\alpha, \beta)$. Also $f_2(\beta, \delta) > \beta$ und ebenso, da $f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \delta) \geqq f(\alpha, \delta)$ ist, $f_2(\beta, \delta) \geqq \delta$.

Aus (d) folgt weiter, daß bei konstantem δ die Funktion f_2 mit wachsendem β nicht abnimmt, also gilt VII. *Aus diesen Sätzen folgt dann, daß f_2 auch Hauptzahlen besitzt. Da beständig $f_2(\beta, \delta) > \beta$ ist, so besitzt f_2 nur eigentliche Hauptzahlen.* (Man vergl. den Beweis zu IX.)*) Es gilt nun unter der Voraussetzung (d)

Satz XXIII. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(\alpha, \beta)$ für $\beta > 1$ eine Hauptzahl von f_1 darstellt, besteht darin, daß β eine Hauptzahl von f_2 ist.*

Beweis. Erstens sei $f(\alpha, \beta)$ eine Hauptzahl γ_1 von f_1 und $\beta > 1$, dann ist zu zeigen, daß β eine Hauptzahl von f_2 ist. Es sei $1 \leqq \xi < \beta$, dann ist $\gamma_1 = f(\alpha, \beta) > f(\alpha, \xi)$, also folgt:

$$\gamma_1 = f_1(f(\alpha, \xi), \gamma_1) = f_1(f(\alpha, \xi), f(\alpha, \beta)) = f(\alpha, f_2(\xi, \beta)) = f(\alpha, \beta),$$

d. h. es ist $\beta = f_2(\xi, \beta)$ für jedes der Beziehung $1 \leqq \xi < \beta$ genügende ξ; mithin ist β eine Hauptzahl von f_2. Sei zweitens β eine Hauptzahl von f_2, dann ist $\beta > 1$ und $\beta = f_2(\xi, \beta)$ für $1 \leqq \xi < \beta$. Sei nun $\alpha \geqq \lambda$, dann setze man $f(\alpha, \beta) = \gamma_1$; es ergibt sich dann:

$$\gamma_1 = f(\alpha, \beta) = f(\alpha, f_2(\xi, \beta)) = f_1(f(\alpha, \xi), f(\alpha, \beta)) = f_1(f(\alpha, \xi), \gamma_1)$$

für jedes ξ, für das $1 \leqq \xi < \beta$ ist. Konvergiert nun ξ gegen β, so konvergiert $f(\alpha, \xi)$ gegen $f(\alpha, \beta) = \gamma_1$. Also ist $\gamma_1 = f_1(f(\alpha, \xi), \gamma_1)$ für eine Folge von Zahlen $f(\alpha, \xi)$, deren Limes γ_1 ist. Somit ist nach X die Zahl γ_1 eine Hauptzahl von f_1. — In der Anm. zu XXI ist bereits eine Anwendung von XXIII gemacht worden. Es gehören XXI bis XXIII eng zusammen. Die Hauptzahlen γ_1 von f_1 werden durch XXI, XXII auf eine Art und durch XXIII auf eine zweite Art charakterisiert.

*) Man muß dann allerdings als Definitionsbereich für f_2 nur das Gebiet $\beta \geqq 1$, $\delta \geqq 1$ ansehen, selbst wenn f_2 auch für $\beta = 0$ oder $\delta = 0$ mit definiert sein sollte.

Genau wie man das distributive Gesetz so erweitern konnte, daß auch die Potenzfunktion ihm genügt, kann man das assoziative so verallgemeinern, daß die Potenz es auch erfüllt.

Wir setzen voraus, daß zu f eine Funktion f_3 existiert, die identisch der Funktionalgleichung

(e) $$f(f(\alpha,\beta),\delta) = f(\alpha, f_3(\beta,\delta))\ ^{*)}$$

genügt.

Unter dieser Voraussetzung läßt sich ein in der Richtung von Satz XV liegendes Resultat aussprechen:

Satz XXIV. *Es sei $\beta = f(\xi,\eta)$ und $f_3(2,\eta) = \eta$, dann hat bei festem η und β die Gleichung $\beta = f(\vartheta,\eta)$ unendlich viele Wurzeln ϑ, die einen Limes γ_1 besitzen, und γ_1 ist eine Hauptzahl von f_1.*

Beweis. Da $f_3(2,\eta) = \eta$ ist, so folgt

$$\beta = f(\xi,\eta) = f(\xi, f_3(2,\eta)) = f(f(\xi,2),\eta).$$

Nun ist $f(\xi,2) = f_1(f(\xi,1),\xi) \geq f_1(\xi,\xi) \geq \xi$. Also ergibt sich die Beziehung $\beta = f(f(\xi,2),\eta) \geq f(f_1(\xi,\xi),\eta) \geq f(\xi,\eta) = \beta$, d. h. $\beta = f(f_1(\xi,\xi),\eta)$. Somit ist mit ξ zugleich die Zahl $f_1(\xi,\xi)$ eine Wurzel ϑ der Gleichung $\beta = f(\vartheta,\eta)$. (Sollte etwa $f_1(\xi,\xi) = \xi$ sein, so ist jedenfalls für die größere Wurzel $\xi' = f(\xi,2)$ sicher $f_1(\xi',\xi') > \xi'$.) Daraus folgt nach XI, daß diese Wurzeln ϑ eine Hauptzahl γ_1 zum Limes haben. — *Ob* freilich die Gleichung $\beta = f(\gamma_1,\eta_1)$ eine Wurzel η_1 hat, das muß im allgemeinen unentschieden bleiben, wenngleich es in den folgenden Anwendungen stets eintreten wird.**)

§ 4.

Die Multiplikation.

1) Wir setzen jetzt $w(\alpha) = \alpha$ und wählen außerdem $g(\xi,\eta) = f_1(\xi,\eta) = \xi + \eta$. Da nun $f_1(\xi,\eta) = \xi + \eta > \xi$ für $\xi \geq 0$, $\eta \geq 1$ ist, so ist $\lambda = 1$. Es ist also (b) und auch (c′) erfüllt. Die durch diese Festsetzungen definierte

---

*) Aus (e) folgt ohne Schwierigkeit, daß f_3 selbst das gewöhnliche assoziative Gesetz $f_3(f_3(\alpha,\beta),\delta) = f_3(\alpha, f_3(\beta,\delta))$ erfüllt. — Ist auch nur für ein einziges α die Gleichung $w(\alpha) = \alpha$ erfüllt, so ist unter der Voraussetzung (e) *stets* $w(\alpha) = \alpha$. Das tritt dann und nur dann ein, wenn $f_3(1,1) = 1$ ist, eine Beziehung, aus der die allgemeinere Gleichung $f_3(\beta,1) = f_3(1,\beta) = \beta$ folgt. — Wenn (d) und (e) simultan erfüllt sind, so ist f_3 eine nach dem in § 1 entwickelten Induktionsschema definierte Funktion. Denn aus (e) folgt, da f Bedingung (c′) erfüllt, daß $f_3(\beta,1)$ mit β wächst; aus (d) und (e) aber folgt: $f_3(\beta,\delta+1) = f_2(f_3(\beta,\delta),\beta)$ und außerdem erfüllt f_3 Satz IV. *Es erscheint bemerkenswert, daß für den Fall $w(\alpha) \equiv \alpha$ aus dem distributiven Gesetz (d) das assoziative Gesetz (e) folgt.*

**) In einer demnächst in den Math. Ann. erscheinenden Arbeit wird auch diese Frage durch eingehende Untersuchung der Gesetze (*d*) und (*e*) in gewisser Weise zur Entscheidung gebracht werden.

Operation $f(\alpha, \beta)$ bezeichnen wir mit $\alpha \cdot \beta$ oder kurz mit $\alpha\beta$ und nennen $\alpha\beta$ das *Produkt* aus α und β; die Zahl α heißt *linksseitiger Divisor oder Teiler* von $\alpha\beta$, β *rechtsseitiger Divisor oder Teiler* von $\alpha\beta$. Man redet statt dessen auch wohl vom links- oder rechtsseitigen *Faktor*. Die Operation selbst nennt man die *Multiplikation*.

2) Unsere Operation ist also nach § 1 folgendermaßen definiert:

$$1)\quad \alpha \cdot 1 = \alpha,$$

$$2)\quad \alpha(\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 1,$$

$$3)\quad \alpha\bar{\beta} = \lim_{\beta} (\alpha\beta),$$

wo β alle Zahlen unterhalb der Limeszahl $\bar{\beta} = \lim \beta$ durchläuft.

Durch (1) bis (3) ist $\alpha\beta$ für $\alpha \geqq 1$, $\beta \geqq 1$ erklärt. Aus (1) und (2) folgt, daß man zweckmäßig die Definition erweitert durch

$$4)\quad 0\beta = 0 \quad \text{für} \quad \beta \geqq 0,$$

$$5)\quad \alpha 0 = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0.$$

Für endliches $\beta = b$ ist $\alpha b = \alpha + \alpha + \alpha + \cdots$ (b Summanden), wie leicht aus (1) und (2) folgt.

3) Nach III folgt für $\alpha \geqq 1$ aus $\beta > \beta'$ auch $\alpha\beta > \alpha\beta'$; und ist $\alpha\beta > \alpha\beta'$, dann ist $\alpha \geqq 1$ und $\beta > \beta'$; schließlich folgt aus $\alpha\beta = \alpha\beta'$, falls $\alpha \geqq 1$ ist, daß auch $\beta = \beta'$ ist. Aus $\beta > 1$ folgt für $\alpha \geqq 1$ hiernach $\alpha\beta > \alpha$. *Ein von Null verschiedenes Produkt, dessen rechtsseitiger Faktor größer als* 1 *ist, ist somit größer als der linksseitige Faktor.*

4) Ist eine Folge von Zahlen δ mit $\bar{\beta}$ als Limes gegeben, dann ist nach IV: $\alpha\bar{\beta} = \alpha \lim \delta = \lim\limits_{\delta} (\alpha\delta)$.

5) Wir benutzen statt V den schärferen Satz XVII; aus ihm folgt für $\alpha \geqq 1$, daß für $\beta \geqq \omega$ stets $\alpha\beta \geqq \alpha + \beta$ ist. Und für $b \geqq 1$, $\alpha \geqq 1$ folgt $\alpha b \geqq \alpha + b - 1$. Aus $\alpha b = \alpha + \alpha + \alpha + \cdots$ (b Summanden) folgt, daß genauer $\alpha b \geqq \alpha + b$ für $\alpha > 1$, $b > 1$ ist. Es folgt aus diesen Formeln, daß für $\alpha \geqq 1$ stets $\alpha\beta \geqq \beta$ ist. *Ein Produkt, dessen linksseitiger Teiler von Null verschieden ist, ist also nie kleiner als der rechtsseitige Teiler.*

6) *(Der Euklidische Algorithmus.)* Sei $\alpha \geqq 1$ und $\beta \geqq w(\alpha) = \alpha$, dann existiert nach VI eine einzige durch α und β bestimmte Zahl, sodaß $\alpha(\xi + 1) = \alpha\xi + \alpha > \beta \geqq \alpha\xi \geqq \xi$ ist.

Aus $\beta \geqq \alpha\xi$ folgt nach § 2 die Gleichung $\beta = \alpha\xi + \varrho$, wo ϱ durch α und β eindeutig bestimmt ist; also ist $\alpha\xi + \alpha > \beta = \alpha\xi + \varrho$, d. h. $\alpha > \varrho$. Ist $\xi = \beta$, dann folgt $\beta \geqq \alpha\beta \geqq \beta$, d. h. $\beta = \alpha\beta$ und $\varrho = 0$. Also gilt der

Satz. *Ist $\beta \geqq \alpha \geqq 1$, dann gibt es ein einziges Zahlenpaar ξ, ϱ, so daß $\beta = \alpha\xi + \varrho$, $\xi \leqq \beta$ und $\varrho < \alpha$ ist. Ist $\xi = \beta$, dann ist $\varrho = 0$.*

Hieraus folgt), daß jeder gemeinsame linksseitige Teiler von* α *und* β *auch ein solcher von* ϱ *ist, d. h. ist* $\alpha = \delta\alpha'$, $\beta = \delta\beta'$, *dann ist* $\varrho = \delta\varrho'$.

Da $\alpha > \varrho$ ist, so kann man, falls $\varrho \geqq 1$ ist, entsprechend $\alpha = \varrho\xi_1 + \varrho_1$ setzen, wo $\varrho > \varrho_1$ ist. Fährt man so fort, so bricht die Kette der Gleichungen ab, da $\alpha > \varrho > \varrho_1 > \cdots$ ist. Genau wie in der endlichen Zahlentheorie liefern die Gleichungen den Euklidischen Algorithmus zur Aufsuchung des größten gemeinsamen (linksseitigen) Teilers von α und β, worauf wir jedoch erst später eingehen.

7) Nach VII folgt aus $\alpha > \alpha'$ die Beziehung $\alpha\beta \geqq \alpha'\beta$ und, wenn $\alpha\beta > \alpha'\beta$ ist, dann ist $\alpha > \alpha'$. Es gilt aber nach VII wegen (c') das schärfere Resultat: aus $\alpha > \alpha'$ folgt $\alpha(\beta + 1) > \alpha'(\beta + 1)$, also ergibt sich aus $\alpha(\beta + 1) = \alpha'(\beta + 1)$, daß $\alpha = \alpha'$ ist. Ist also $\alpha\beta = \alpha'\beta$, $\alpha \neq \alpha'$ und $\beta > 0$, dann ist β eine Limeszahl. Aus $\alpha \geqq 1$ folgt $\alpha\beta \geqq 1 \cdot \beta$ und nach Nr. 5 ist $\alpha\beta \geqq \beta$. Diese beiden unteren Schranken für $\alpha\beta$ sind aber identisch, d. h. es ist $1\beta = \beta$ für jedes β, wie sich leicht durch transfinite Induktion aus der Definition des Produktes ergibt.

Aus dem soeben Bewiesenen ergibt sich daher: ist für $\beta \geqq 1$, $\alpha > 1$ die Gleichung $\beta = 1 \cdot \beta = \alpha\beta$ erfüllt, dann ist β eine Limeszahl. Und deshalb gilt weiter: *Ein Produkt, dessen linksseitiger Teiler größer als* 1 *und dessen rechtsseitiger Divisor keine Limeszahl ist, ist größer als dieser rechtsseitige Divisor, denn es ist ja für* $\alpha > 1$ *auch*

$$\alpha(\beta + 1) > 1(\beta + 1) = \beta + 1.$$

8) Es gilt das assoziative Gesetz: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. Man bezeichnet diese beiden Produkte daher mit $\alpha\beta\gamma$. Also ist Voraussetzung (e) aus § 3 erfüllt und zwar ist $f_3(\xi, \eta) \equiv f(\xi, \eta) = \xi\eta$.

Es gilt auch das distributive Gesetz: $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$. Somit ist (d) erfüllt; es ist in unserem Fall $f_2(\xi, \eta) \equiv f_1(\xi, \eta) = \xi + \eta$.

Beide Gesetze sind für $\gamma = 0, 1$ richtig und werden leicht durch vollständige Induktion bewiesen.**)

9) Aus XXI ff. folgt daher für unseren Fall, in dem $w(\alpha) = \alpha$ und die Hauptzahlen von f_1 und f_2 die additiven Hauptzahlen sind:

(a) *Ist* π *eine additive Hauptzahl und* $\pi \geqq \alpha \geqq 1$, *dann ist* α *ein linksseitiger Teiler von* π, *d. h. es ist* $\pi = \alpha\xi$, *wo die eindeutig bestimmte Zahl* ξ *eine Hauptzahl von* f_2, *also wiederum eine additive Hauptzahl ist.* (XXI.)

---

*) Der Beweis benutzt das distributive Gesetz (s. Nr. 8).

**) Das assoziative Gesetz gilt auch für mehr als drei Zahlen, so daß es außer Zweifel steht, was $\alpha\beta\gamma\delta \cdots \varkappa$ bedeutet. Es ist

$$\alpha(\beta + \gamma + \delta + \cdots + \varkappa) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \cdots + \alpha\varkappa.$$

(b) *Hat eine überendliche Zahl π die Eigenschaft, daß zu jedem der Beziehung $1 \leqq \alpha \leqq \pi$ genügenden α eine Zahl ξ existiert, für die $\pi = \alpha\xi$ ist, dann ist π eine additive Hauptzahl* (XXII.)

(c) *Ist $\alpha\beta$ eine additive Hauptzahl, dann ist β eine additive Hauptzahl; ist β eine von 1 verschiedene additive Hauptzahl, dann ist auch $\alpha\beta$ $(\alpha \geqq 1)$ eine additive Hauptzahl.* (XXIII.)

Es war die erste additive Hauptzahl über α der Limes der Folge: $\alpha, \alpha + \alpha = \alpha 2, \alpha + \alpha + \alpha = \alpha 3, \cdots, \alpha n, \cdots$, also gleich $\alpha\omega$. Daß für $\alpha > 0$ die erste additive Hauptzahl über α die Zahl $\alpha\omega$ ist, läßt sich auch direkt aus unseren soeben aufgestellten Sätzen zeigen.

Denn wenn $\alpha > 0$ ist, so ist nach Satz (c) wirklich $\alpha\omega$ eine oberhalb α gelegene additive Hauptzahl; sei π irgend eine solche $\pi > \alpha$, dann ist nur zu zeigen, daß $\pi \geqq \alpha\omega$ ist. Nun ist nach Satz (a) $\pi = \alpha\pi' > \alpha = \alpha 1$, also $\pi' > 1$, wo π' eine additive Hauptzahl ist; also ist $\pi' \geqq \omega$ und $\pi = \alpha\pi' \geqq \alpha\omega$. — Ist $\alpha > 0$ und π die größte nicht oberhalb α gelegene additive Hauptzahl, dann ist die erste additive Hauptzahl über α auch die erste additive Hauptzahl über π, d. h. $\alpha\omega = \pi\omega$. Allgemeiner besteht für jede additive Hauptzahl $\pi' \geqq \omega$ die Gleichung $\alpha\pi' = \pi\pi'$. Diese für $\pi' = \omega$ soeben bewiesene Gleichung beweist man unschwer durch transfinite Induktion. Benutzt werden beim Beweise die folgenden Tatsachen: 1) die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Multiplikation; 2) auf die additive Hauptzahl π'' folgt als nächste Zahl dieser Art $\pi''\omega$; 3) Der Limes einer Menge von Hauptzahlen der Addition ist eine additive Hauptzahl.

10) Sei nun eine Zahl β gegeben, die wir in der Normalform schreiben: $\beta = \pi_1 + \pi_2' + \cdots + \pi_s'$; $\pi_1 \geqq \pi_2' \geqq \cdots \geqq \pi_s'$. Hier können mehrere aufeinander folgende additive Hauptzahlen einander gleich sein. Faßt man sie zusammen, so erhalten wir in anderer Bezeichnung: $\beta = \pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 + \cdots + \pi_s b_s + b$, wo nun $\pi_1 > \pi_2 > \pi_3 > \cdots > \pi_s \geqq \omega$ ist und $b, b_1, b_2, \cdots, b_s$ endliche Zahlen sind. Sei weiter:
$\alpha = \pi_1'' a_1 + \pi_2'' a_2 + \cdots + \pi_r'' a_r + a$; $\pi_1'' > \pi_2'' > \cdots > \pi_r'' \geqq \omega$; $a, a_r, \cdots, a_1 < \omega$.

Es kann kurz geschrieben werden: $\alpha = \pi_1'' a_1 + \alpha'$, wo $\alpha' + \pi_1'' a_1 = \pi_1'' a_1$ ist. Ist nun $b > 0$, dann ist $\alpha b = \alpha + \alpha + \alpha + \cdots$ (b Summanden α) $= \pi_1'' a_1 + \alpha' + \pi_1'' a_1 + \alpha' + \cdots = \pi_1'' a_1 + \pi_1'' a_1 + \cdots$ (b Mal) $+ \alpha' = \pi_1'' a_1 b + \alpha' = \pi_1'' a_1 b + \pi_2'' a_2 + \cdots + \pi_r'' a_r + a$. Also ist αb in der Normalform dargestellt. Weiter ist $\alpha\beta = \alpha\pi_1 b_1 + \cdots + \alpha\pi_s b_s + \alpha b$. Also folgt wegen der letzten Gleichung aus Nr. 9: $\alpha\beta = \pi_1''\pi_1 b_1 + \cdots + \pi_1''\pi_s b_s + \alpha b$. Ist $b = 0$, also $\alpha b = 0$, dann ist die Normaldarstellung für $\alpha\beta$ gegeben durch: $\alpha\beta = \pi_1''\pi_1 b_1 + \cdots + \pi_1''\pi_s b_s$. Ist aber $b > 0$, dann folgt die Normaldarstellung für $\alpha\beta$, indem man für αb die oben gefundene Normalform einsetzt: $\alpha\beta = \pi_1''\pi_1 b_1 + \cdots + \pi_1''\pi_s b_s + \pi_1'' a_1 b + \pi_2'' a_2 + \cdots + \pi_r'' a_r + a$. Das ist in der Tat die Normalform, da

$$\pi_1''\pi_1 > \pi_1''\pi_2 > \cdots > \pi_1''\pi_s > \pi_1'' > \pi_2'' > \cdots > \pi_r'' \geqq \omega$$

ist.

11) Aus diesen Formeln folgt: *$\alpha\beta$ ist dann und nur dann eine Limeszahl, wenn α oder β eine solche ist.* Das ergibt sich direkt so: 1) Seien $\alpha = \alpha' + 1$, $\beta = \beta' + 1$, dann ist $\alpha\beta = \alpha\beta' + \alpha = (\alpha\beta' + \alpha') + 1$, d. h. wenn die von Null verschiedenen Zahlen α, β keine Limeszahlen sind, so ist auch $\alpha\beta$ keine Limeszahl. 2) Sei β eine Limeszahl, $\alpha > 0$, dann ist $\alpha\beta$ nach der Erklärung des Produktes eine Limeszahl. 3) Sei $\beta = \beta' + 1 \geqq 1$ und α eine Limeszahl, dann ist $\alpha\beta = \alpha\beta' + \alpha$ nach der Erklärung der Summe eine Limeszahl.

12) Sei γ eine Limeszahl; der kleinste von Null verschiedene Rest von γ ist eine additive Hauptzahl $\pi \geqq \omega$. Es ist $\gamma = \gamma' + \pi$. Nach Nr. 6 ist $\gamma' = \pi\gamma'' + \varrho$, wo $\varrho < \pi$, also $\varrho + \pi = \pi$ ist. Daher ist

$$\gamma = \pi\gamma'' + \varrho + \pi = \pi\gamma'' + \pi = \pi(\gamma'' + 1).$$

Sei eine zweite derartige Darstellung für γ gefunden, d. h. es sei

$$\gamma = \pi(\gamma'' + 1) = \pi_1(\gamma_1'' + 1) = \pi\gamma'' + \pi = \pi_1\gamma_1'' + \pi_1.$$

Nach § 2 folgt hieraus $\pi = \pi_1$, also nach Division mit $\pi = \pi_1$: $\gamma'' + 1 = \gamma_1'' + 1$, $\gamma'' = \gamma_1''$. Man kann auch so schließen: es sei $\pi_1 \geqq \pi$, $\pi_1 = \pi\pi'$, also $\gamma'' + 1 = \pi'(\gamma_1'' + 1)$. Nach Nr. 11 ist daher π' keine Limeszahl und da π' eine additive Hauptzahl ist (Nr. 9, Satz (a)), so ist $\pi' = 1$, d. h. $\pi_1 = \pi$, $\gamma'' = \gamma_1''$. Diese Darstellung von γ ist also eindeutig.

13) Satz. *Jede von Null verschiedene Zahl γ hat nur endlich viele rechtsseitige Teiler; die Anzahl ihrer linksseitigen Divisoren ist unendlich oder endlich, je nachdem die Zahl γ eine Limeszahl ist oder nicht.*

Beweis. Der Satz folgt beinahe seinem ganzen Inhalte nach aus VIII. Es ist hier nur noch zu zeigen: ist γ eine Limeszahl, dann hat γ unendlich viele linksseitige Teiler. Sei also γ eine Limeszahl. Nach der vorigen Nr. ist $\gamma = \pi(\gamma'' + 1)$, wo $\pi \geqq \omega$ ist. Nach Nr. 9, Satz (a) besitzt nun π unendlich viele linksseitige Divisoren, also nach dem assoziativen Gesetz auch γ selbst.

14) Da für jede von Null verschiedene Zahl γ die Zerlegungen $\gamma = 1\,\gamma = \gamma 1$ gelten, so hat jede Zahl $\gamma > 1$ mindestens zwei verschiedene rechtsseitige Divisoren. Unter den endlichen Zahlen gibt es Zahlen mit genau zwei rechtsseitigen Divisoren: die endlichen Primzahlen. Fragt man allgemein nach den Zahlen $\gamma > 1$, die nur die beiden rechtsseitigen Divisoren 1 und γ besitzen, so sind das die Zahlen, die sich nicht in der Form $\gamma = \alpha\beta$ darstellen lassen, wo α und β beide unterhalb γ liegen, d. h. es sind das Zahlen, die wir als multiplikativ irreduzibel bezeichnen, da wir sie mit

Hilfe der Multiplikation nicht auf kleinere Zahlen zurückführen können.*) Daß es derartige irreduzibele Zahlen gibt, ist uns bekannt, denn jede Hauptzahl der Multiplikation ist, wie aus den allgemeinen Untersuchungen hervorgeht, multiplikativ irreduzibel. Während nun aber die Addition die wesentliche Eigenschaft besaß, daß Hauptzahlen, irreduzibele Zahlen und Primzahlen zusammenfielen, liegen hier die Verhältnisse anders: die Hauptzahlen bilden nur einen Teil der irreduzibelen Zahlen, und unter den irreduzibelen Zahlen hat nur ein kleiner Teil vollkommenen Primzahlcharakter, nämlich die endlichen Primzahlen und die Zahl ω. Wir gehen hierauf näher ein.

15) Nach XIII gibt es multiplikative Hauptzahlen γ. Sie sind definiert durch folgende Bedingungen: 1) $\gamma > 1$. 2) $\gamma = \alpha\gamma$ für jedes der Bedingung $1 \leqq \alpha < \gamma$ genügende α. Hiernach ist $2 = 1 \cdot 2$ eine multiplikative Hauptzahl und jede größere Hauptzahl der Multiplikation ist eine Limeszahl. Diese eigentlichen multiplikativen Hauptzahlen nennen wir im Anschluß an Hessenberg**) δ-Zahlen. Eine δ-Zahl hat nur die beiden rechtsseitigen Divisoren 1 und δ. Es gelten die Sätze:

(a) *Jede δ-Zahl ist eine additive Hauptzahl.* (XVIII oder XX.)

(b) *Ist eine Zahl δ der Limes einer Folge von Zahlen α, deren jede die Gleichung $\delta = \alpha\delta$ erfüllt, dann ist δ eine δ-Zahl.* (X.)

(c) *Hat eine Folge von Zahlen $\alpha \geqq 1$ die Eigenschaft, daß mit α zugleich auch $\alpha\alpha$ der Folge angehört, dann hat diese Folge einen Limes, der eine δ-Zahl ist.* (XI.)

(d) *Der Limes einer Folge von δ-Zahlen ist eine δ-Zahl.* (XII.)

(e) *Ist $\alpha \geqq 2$, dann ist der Limes der Folge $\alpha, \alpha\alpha, \alpha\alpha\alpha, \cdots$ die erste auf α folgende δ-Zahl.****) (XIII.)

Die erste δ-Zahl ist ω.†) Das folgt einfach daraus, daß das Produkt zweier endlichen Zahlen wieder endlich ist; oder auch aus der Definition von $n\omega$, denn es ist $n\omega = \lim\limits_{m<\omega}(nm) = \omega$, wo $1 \leqq n < \omega$ ist. Schließlich ergibt es sich auch daraus, daß $n\omega$ die erste additive Hauptzahl über n ist und diese Zahl andererseits ω ist. Aus Nr. 6 folgt für jede Limeszahl β eine Gleichung $\beta = \omega\beta' + \varrho$, wo $\omega > \varrho \geqq 0$, d. h. ϱ endlich ist. Also ist $\varrho = 0$, d. h. $\beta = \omega\beta'$ und hieraus folgt

---

*) Dabei kann sehr wohl $\gamma = \alpha\gamma$ sein, wo $1 < \alpha < \gamma$ ist; es kann also γ zerlegbar sein, aber bei allen Produktdarstellungen von γ, bei denen $\alpha < \gamma$ ist, ist der rechtsseitige Faktor gleich γ.

**) G. d. M., § 82.

***) Man vergleiche die sich an XIII anschließenden Bemerkungen und die Anm. zu § 2, Nr. 12, Satz (d).

†) Bei Hessenberg, G. d. M., ist irrtümlicherweise 1 als erste δ-Zahl genannt.

$$n\beta = (n\omega)\beta' = \omega\beta' = \beta,$$

wo $1 \leqq n < \omega$ ist. *Insbesondere ist $2\beta = \beta$, eine Gleichung, die nach Nr. 7 die Limeszahlen charakterisiert.*

Wir sahen oben, daß die multiplikativ irreduzibelen Zahlen diejenigen sind, die nur zwei rechtsseitige Teiler besitzen. Weiter ergab sich, daß jede δ-Zahl eine irreduzibele Limeszahl ist. Wir zeigen jetzt die Umkehrung:

(f) *Jede irreduzibele Limeszahl, d. h. jede Limeszahl mit genau zwei rechtsseitigen Teilern ist eine δ-Zahl.*

16) Um (f) zu beweisen, müssen wir erst zwei andere Sätze aufstellen.

Satz. *Sei die Limeszahl β ein rechtsseitiger Teiler von γ, dann hat die Gleichung $\gamma = \alpha\beta$ unendlich viele Wurzeln α, die eine additive Hauptzahl π zum Limes haben; diese ist ein linksseitiger Teiler von γ, d. h. es ist $\gamma = \pi\beta'$, wo β' der größte rechtsseitige Teiler von γ unterhalb β ist.*

Beweis. Da $f_2(2, \beta) = 2 \cdot \beta = \beta$ ist (Nr. 8 und 15), so dürfen wir Satz XXIV anwenden. Also gibt es unendlich viele Wurzeln, die als Limes eine Hauptzahl von $f_1(\xi, \eta) = \xi + \eta$ haben, d. h. eine additive Hauptzahl π zum Limes besitzen. Da für jede Wurzel α der Gleichung $\gamma = \alpha\beta$ stets $\gamma > \alpha$ ist, so ist $\gamma \geqq \pi$, also nach Nr. 6 auch $\gamma = \pi\beta' + \varrho$, wo $0 \leqq \varrho < \pi$ ist. Also gibt es eine Wurzel α, für die $\varrho < \alpha < \pi$ ist. Daraus folgt $\pi = \alpha\pi'$ (Nr. 9). Daher ist α ein linksseitiger Teiler von γ und π, also nach Nr. 6 auch von ϱ, und da $\varrho < \alpha$ ist, muß $\varrho = 0$, $\gamma = \pi\beta'$ sein. Nach XV ist β' der größte unterhalb β gelegene rechtsseitige Teiler von γ. Wählt man nun den rechtsseitigen Limesteiler β von γ gleich γ selbst ($\gamma = 1 \cdot \gamma = 2 \cdot \gamma = \cdots$), zieht dann Satz XIV nebst Zus. 2 heran, so folgt, daß π in diesem Fall eine δ-Zahl wird. Wir sprechen daher folgendes Resultat aus:

(g) *Für jede Limeszahl β besitzt die Gleichung $\beta = \alpha\beta$ unendlich viele Wurzeln α, deren Limes δ eine δ-Zahl ist. Es ist für eine Zahl α dann und nur dann $\beta = \alpha\beta$, falls $1 \leqq \alpha < \delta$ ist; dagegen ist $\beta = \delta\beta'$, wo β' der zweitgrößte rechtsseitige Divisor von β ist. Oberhalb δ gibt es keine δ-Zahl, die linksseitiger Teiler von β ist.**)

Hieraus folgt nun (f). Denn wenn β nur die beiden rechtsseitigen Teiler 1 und β besitzt, so ist der zweitgrößte rechtsseitige Faktor $\beta' = 1$, d. h. $\beta = \delta\beta' = \delta$, also β eine δ-Zahl.

Damit sind uns nun die irreduzibeln Limeszahlen bekannt. Gibt es nun außer den endlichen multiplikativen Primzahlen andere irreduzibele Zahlen, die eine unmittelbar vorhergehende Zahl besitzen? Diese Frage ist zu bejahen.

---

*) Man vgl. § 2, Nr. 12, Satz (e).

17) Es sei β eine überendliche Zahl, die einen von 0 verschiedenen endlichen Rest besitzt, also $\beta = \beta' + b$; hier ist β' eine Limeszahl und $b > 0$. Da $b\beta' = \beta'$ ist, so ist $\beta = b(\beta' + 1)$. Nach Nr. 12 dürfen wir $\beta' = \pi(\beta'' + b'')$ setzen, wo π eine von 1 verschiedene additive Hauptzahl, $\beta'' = 0$ oder gleich einer Limeszahl und $1 \leqq b'' < \omega$ ist. Also wird

$$\beta = b(\pi(\beta'' + b'') + 1) = b(\pi + 1)(\beta'' + b'') \quad \text{[Nr. 10]}.$$

Hieraus folgt $\beta > \beta'' + b''$. Wenn nun β nur die beiden rechtsseitigen Teiler 1 und β besitzt, so muß $\beta'' + b'' = 1$, d. h. $\beta'' = 0$, $b'' = 1$ sein, also ist $\beta = b(\pi + 1)$. Dann ist also $\pi + 1 \geqq \omega$ ein rechtsseitiger Teiler von β, also gleich β, d. h. $b = 1$, also $\beta = \pi + 1$. Sei nun umgekehrt π eine beliebige von 1 verschiedene additive Hauptzahl, dann hat $\pi + 1$ nur zwei rechtsseitige Teiler. Denn es sei $\pi + 1 = \mu\nu$ und $\nu > 1$, $\pi + 1 = \mu\nu > \mu$, d. h. $\pi \geqq \mu$. Also ist $\pi = \mu\pi'$, d. h. es ist μ ein linksseitiger Teiler von $\pi + 1 = \mu\nu$ und von $\pi = \mu\pi'$, also nach Nr. 6 auch von 1; es muß also $\mu = 1$ und $\nu = \pi + 1$ sein. Also besitzt $\pi + 1$ nur die beiden rechtsseitigen Teiler 1 und $\pi + 1$. Also gilt der

Satz. *Die Nicht-Limeszahlen oberhalb ω sind dann und nur dann multiplikativ irreduzibel, wenn sie die Gestalt $\pi + 1$ haben. Die multiplikativ irreduzibelen Zahlen zerfallen in drei Klassen: die endlichen Primzahlen, die Hauptzahlen der Multiplikation und die Zahlen der Form $\pi + 1$. Die Zahl 2 gehört in jede der drei Klassen.*

Auf die multiplikativ irreduzibelen Zahlen wird man auch geführt, wenn man den kleinsten oberhalb 1 gelegenen rechtsseitigen Teiler einer gegebenen Zahl betrachtet. Diese Betrachtungen sind ganz analog denen, die wir in § 2, Nr. 14 beim zweiten Beweise für die Cantorsche Normalform anstellten.

18) Satz. *Jede von 1 verschiedene additive Hauptzahl läßt sich in eindeutiger Weise als Produkt endlich vieler, nicht zunehmender δ-Zahlen darstellen.*

Dieser Satz entspricht dem in § 2, Nr. 14 bewiesenen. Und man kann ihn auch auf drei völlig analoge Arten beweisen. Es soll nur bemerkt werden, daß der erste Beweis an Nr. 16, Satz (g) anzuknüpfen hat, aus dem für die gegebene additive Hauptzahl π die Gleichung $\pi = \delta\pi'$ folgt, wo π' der zweitgrößte rechtsseitige Divisor von π ist.

19) Nach Nr. 12 läßt sich jede Zahl β in eindeutiger Weise in die Form setzen $\beta = \pi\beta'$, wo β' keine Limeszahl und π eine additive Hauptzahl ist. Aus Nr. 17 folgt, daß $\beta' = b(\pi' + 1)\beta''$ ist, wo $\beta' > \beta''$ ist. Hier ist β'' ebenfalls keine Limeszahl; ist $\beta'' \geqq \omega$, dann ist analog

$$\beta'' = b'(\pi'' + 1)\beta''', \quad \beta' > \beta''', \text{ etc.}$$

Da die Reihe der Zahlen $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$ beständig abnimmt, wird schließlich

eine Gleichung $\beta^{(\sigma)} = b^{(\sigma-1)}(\pi^{(\sigma)}+1)\, b^{(\sigma)}$ vorkommen. Entwickelt man nun noch π nach Nr. 18, so erhält man in veränderter Bezeichnung:

$$\beta = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s b_r(\pi_r+1)\, b_{r-1}(\pi_{r-1}+1) \cdots b_1(\pi_1+1)\, b_0.$$

Zerlegt man noch die endlichen Zahlen b_t in ihre Primfaktoren, dann ist β als Produkt endlich vieler irreduzibeler Zahlen dargestellt. (Man würde diese Form auch erhalten, indem man in β' den kleinsten rechtsseitigen Faktor oberhalb 1 abspaltet etc.) Unsere Darstellung ist nun eindeutig, d. h. wenn wir

$$\begin{aligned}\beta &= \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s b_r(\pi_r+1) \cdots b_1(\pi_1+1)\, b_0 \\ &= \delta_1' \delta_2' \cdots \delta_{s'}' b_{r'}'(\pi_{r'}'+1) \cdots b_1'(\pi_1'+1)\, b_0'\end{aligned}$$

haben, wo

$$\delta_1 \geqq \delta_2 \geqq \cdots \geqq \delta_s; \quad \delta_1' \geqq \delta_2' \geqq \cdots \geqq \delta_{s'}'$$

ist, dann behaupten wir:

$$r = r'; \quad s = s'; \quad \delta_i = \delta_i'; \quad \pi_i = \pi_i'; \quad b_i = b_i'.$$

Beweis. Aus Nr. 12 und Nr. 18 folgt sofort: $s = s'$, $\delta_i = \delta_i'$. Wir haben also nur noch die Gleichung

$$b_r(\pi_r+1) \cdots b_1(\pi_1+1)\, b_0 = b_{r'}'(\pi_{r'}'+1) \cdots b_1'(\pi_1'+1)\, b_0'$$

zu behandeln. Hier ist π_i, $\pi_i' \geqq \omega$. Setzt man

$$\gamma = b_r(\pi_r+1) \cdots b_1, \quad \gamma' = b_{r'}'(\pi_{r'}'+1) \cdots b_1',$$

so lautet unsere Gleichung

$$\gamma(\pi_1+1)\, b_0 = \gamma(\pi_1 b_0+1) = \gamma'(\pi_1'+1)\, b_0' = \gamma'(\pi_1' b_0'+1).$$

Nun ist

$$\gamma\pi_1 = \bar\pi > \gamma, \quad \gamma'\pi_1' = \bar\pi' > \gamma',$$

also

$$\bar\pi b_0 + \gamma = \bar\pi' b_0' + \gamma'.$$

Nach § 2 folgt daher: $\gamma = \gamma'$, $b_0 = b_0'$, $\bar\pi = \bar\pi'$, d. h. wegen $\gamma = \gamma' : \pi_1 = \pi_1'$. Indem man nun in unserer Gleichung beiderseits rechts mit $(\pi_1+1)\, b_0$ dividiert und die übrig bleibende Gleichung $\gamma = \gamma'$ ebenso behandelt, folgt: $\pi_2 = \pi_2'$, $b_2 = b_2'$ etc. — Es gilt also der

Satz: *Jede Zahl β läßt sich in eindeutiger Weise in ein Produkt endlich vieler irreduzibeler Zahlen entwickeln:*

$$\beta = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s b_r(\pi_r+1)\, b_{r-1}(\pi_{r-1}+1) \cdots b_1(\pi_1+1)\, b_0,$$

wo

$$\delta_1 \geqq \delta_2 \geqq \cdots \geqq \delta_s$$

ist. (Die endlichen Zahlen b_t sind noch in ihre Primfaktoren zu zerlegen; die Faktoren δ_t treten nur dann auf, falls β eine Limeszahl ist.)

Auch diese Produktformel rührt von G. Cantor her. Man kann sie ganz leicht, wie bereits Cantor angibt, aus der additiven Zerlegung folgern. Kennt man die eine Darstellung und ihre Eindeutigkeit, dann gilt von der anderen dasselbe. Und doch haben beide Formeln nicht

den gleichen Wert. Denn bei der additiven Zerlegung sind die additiv irreduzibelen Bestandteile zugleich additive Primgrößen (§ 2). Dagegen sind, wie wir jetzt zeigen werden, die multiplikativ irreduzibelen Zahlen im allgemeinen keine vollkommenen multiplikativen Primzahlen und besitzen nur einen Teil der Eigenschaften, die wir für Primgrößen verlangen.*)

Man wird eine Zahl μ dann eine multiplikative Primzahl nennen, wenn sie folgende beiden Eigenschaften erfüllt: 1) aus jeder Gleichung $\alpha\beta = \mu\xi$ folgt, daß μ ein linksseitiger Teiler von α oder β ist; 2) aus jeder Gleichung $\alpha\beta = \eta\mu$ folgt, daß μ ein rechtsseitiger Teiler von α oder von β ist. *Die irreduzibelen Zahlen, die oberhalb ω liegen, also die δ-Zahlen und die Zahlen $\pi + 1$ $(\pi \geqq \omega)$ erfüllen die erste Bedingung nicht.* Denn es sei erstens $\pi \geqq \omega$ und $\mu = \pi + 1$, dann ist identisch $(\pi\pi + 1)\pi = (\pi + 1)\pi\pi$, also $\pi + 1$ ein linksseitiger Teiler von $(\pi\pi + 1)\pi$, aber kein solcher von π, da ja $\pi < \pi + 1$ ist, und auch kein solcher von $(\pi\pi + 1)$, da aus $(\pi\pi + 1) = (\pi + 1)\nu$ folgen würde, daß $\pi = \nu$, also $\pi\pi + 1 = \pi\pi$ wäre. Sei zweitens δ eine oberhalb ω gelegene δ-Zahl, dann ist identisch: $(\delta + 1)\omega = \delta\omega$, ohne daß δ ein linksseitiger Teiler von ω oder $\delta + 1$ ist. Dagegen erfüllen die übrigen irreduzibelen Zahlen, nämlich die endlichen Primzahlen p und die Zahl ω, die Bedingung 1). Denn sei erstens $\alpha\beta = \omega\xi$, dann ist $\alpha\beta$ eine Limeszahl, also entweder α oder β auch eine solche, d. h. ω ist ein linksseitiger Teiler von α oder β. Ist zweitens $\alpha\beta = p\xi$, so ist p ein linksseitiger Teiler von α oder β, wie man aus der Eindeutigkeit der Produktformel unschwer erkennt. Die zweite Bedingung dagegen wird von sämtlichen irreduzibelen Zahlen erfüllt, wie man ebenfalls aus der Produktformel ersehen kann; ist also $\alpha\beta = \eta\mu$, wo $\mu = p$, $\pi + 1$, δ ist, dann ist μ ein rechtsseitiger Teiler von α oder β und für $\mu \geqq \omega$ kann man sogar schließen, daß μ ein rechtseitiger Teiler von β ist. Ist $\mu = p$, so ist auch μ im allgemeinen ein rechtsseitiger Teiler von β, nämlich nur dann ein rechtsseitiger Faktor von α, wenn β eine endliche nicht durch p teilbare Zahl ist.

Erfüllt eine Zahl μ die zweite Bedingung, d. h. folgt aus jeder Gleichung $\alpha\beta = \eta\mu$, daß μ ein rechtsseitiger Faktor eines der Faktoren ist, dann ist μ irreduzibel. Denn es sei μ nicht irreduzibel, dann entwickele man μ in das Produkt irreduzibeler Faktoren; der letzte rechtsseitig auftretende Faktor werde mit β bezeichnet, dann ist also

$$\mu = 1 \cdot \mu = \alpha\beta,$$

*) Dieser Unterschied macht sich bei manchen Untersuchungen geltend: z. B. kann man mit Hilfe der additiven Formel die Bedingungen für die multiplikative Vertauschbarkeit zweier Zahlen α und β aufstellen, während man mit der Produktformel in gewissen Fällen auf Schwierigkeiten stößt, nämlich dann, wenn es sich um Limeszahlen α, β handelt. Man vgl. G. Cantor l. c. und E. Jacobsthal l. c.

wenn wir das Produkt der übrigen Faktoren mit α bezeichnen. Nun ist $\beta > 1$, also $\mu > \alpha$ und auch $\mu \geqq \beta$. Hier gilt aber $\mu > \beta$, da μ reduzibel, β irreduzibel ist. Somit kann μ weder in α noch in β als rechtsseitiger Faktor enthalten sein. Da das der zweiten Bedingung, die μ erfüllen sollte, widerspricht, so muß also μ irreduzibel sein. Wir sprechen hiernach den Satz aus:

Satz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Zahl μ multiplikativ irreduzibel ist, besteht darin, daß aus jeder Gleichung $\alpha\beta = \eta\mu$ mindestens eine der beiden Gleichungen $\alpha = \alpha'\mu$, $\beta = \beta'\mu$ folgt.*

Es gilt aber genauer:

Wenn μ irreduzibel und $\alpha\beta = \eta\mu$ ist, so ist im allgemeinen $\beta = \beta'\mu$, diese Gleichung braucht aber nicht zu gelten, falls $\mu = p$ und $\beta < \omega$ ist, wenn also β eine endliche nicht durch p teilbare Zahl ist; dann aber ist stets $\alpha = \alpha'\mu = \alpha' p$.

20) Ist eine Zahl β gegeben und α ein rechtsseitiger Teiler von β, so entwickele man α und β nach der Produktformel. Alle in der Entwicklung von α auftretenden Faktoren treten dann auch in der Produktentwicklung von β auf. Daraus folgt sofort der

Satz. *Sei β gegeben und α, α_1 seien zwei rechtsseitige Faktoren von β, $\alpha > \alpha_1$. Ist dann α eine Limeszahl, dann ist α_1 ein rechtsseitiger Teiler von α. Ist aber α keine Limeszahl, dann ist auch α_1 keine solche. Spaltet man in α und α_1 die größten endlichen linksseitigen Faktoren ab, $\alpha = a\alpha'$, $\alpha_1 = a_1\alpha_1'$, dann ist $\alpha' \geqq \alpha_1'$. Ist $\alpha' > \alpha_1'$, dann ist α_1 ein rechtsseitiger Teiler von α', also auch von α.*

21) Es ist leicht einzusehen, daß über die gemeinsamen Reste und Abschnitte zweier Zahlen α und β folgender Satz gilt:

Satz. *Sind α und β zwei gegebene Zahlen, dann haben sie einen größten gemeinsamen Abschnitt* (min (α, β)), *der jeden gemeinsamen Abschnitt von α und β zum Abschnitt hat. Ebenso existiert ein größter gemeinsamer Rest, der jeden gemeinsamen Rest von α und β zum Rest hat.*

In der Multiplikation gilt ein ganz entsprechender Satz, er ist aber erheblich schwerer zu beweisen:

Satz. *Sind α und β zwei gegebene Zahlen, dann besitzen sie einen größten gemeinsamen linksseitigen Teiler $\tau = (\alpha, \beta)$, der jeden gemeinsamen linksseitigen Teiler von α und β als linksseitigen Teiler enthält. Ebenso existiert ein größter gemeinsamer rechtsseitiger Divisor $\tau' = ((\alpha, \beta))$ von α und β, der jeden α und β gemeinsamen rechtsseitigen Teiler zum rechtsseitigen Teiler hat.*

Beweis. Die Existenz von $\tau = (\alpha, \beta)$ nebst den behaupteten Eigenschaften folgt wie in der endlichen Zahlentheorie aus dem Euklidischen Algorithmus (Nr. 6). Daß ein größter gemeinsamer rechtsseitiger Teiler τ'

existiert, folgt ohne weiteres, da jede Zahl nur endlich viele rechtsseitige Teiler hat. Daß aber τ' die charakteristische Eigenschaft des größten gemeinsamen Teilers hat, wird nach Nr. 20 bewiesen. Sei τ_1 ein beliebiger gemeinsamer rechtsseitiger Teiler von α und β, so ist zu zeigen, daß $\tau' = \mu\tau_1$ ist. Da nun $\tau' \geqq \tau_1$ ist, so dürfen wir $\tau' > \tau_1$ annehmen. Ist τ' eine Limeszahl, dann ist $\tau' = \mu\tau_1$ nach Nr. 20. Wir nehmen daher nach Nr. 20 τ' und τ_1 als Nicht-Limeszahlen an und spalten wieder linksseitig die größtmöglichen endlichen Teiler ab: $\tau' = t'\tau''$, $\tau_1 = t_1\tau_1''$. Es ist $\tau'' \geqq \tau_1''$, und für den Fall, daß $\tau'' > \tau_1''$ ist, ist nach Nr. 20 der Satz bewiesen. Sei also $\tau'' = \tau_1''$, d. h. $\tau' = t'\tau''$, $\tau_1 = t_1\tau''$, somit $t' > t_1$. Da nun τ' der größte gemeinsame rechtsseitige Teiler von α und β ist, so muß jede in t_1 enthaltene Primzahlpotenz auch in t' enthalten sein, d. h. $t' = tt_1$, also $\tau' = t\tau_1$. Damit ist der Satz bewiesen.

22) Leicht beweisbar ist weiter der

Satz. *Zu zwei Zahlen α und β existiert stets eine kleinste Zahl* (max. (α, β)), *die α und β zu Abschnitten hat. Diese Zahl ist Abschnitt jeder Zahl, die α und β zu Abschnitten hat. Dagegen existiert im allgemeinen keine Zahl, die α und β zu Resten hat.*

Auch hier gilt ein ganz analoger Satz in der Multiplikation, ist aber auch nicht von vornherein so klar wie der additive Satz.

Um diesen Satz aussprechen zu können, sei bemerkt, daß unter einem gemeinschaftlichen linksseitigen (rechtsseitigen) Vielfachen von α und β eine Zahl verstanden wird, die α und β zu linksseitigen (rechtsseitigen), Teilern besitzt.

Satz. *Zu zwei von Null verschiedenen Zahlen α und β existiert stets ein kleinstes von Null verschiedenes linksseitiges gemeinschaftliches Vielfaches $\mu = \{\alpha, \beta\}$, das ein linksseitiger Teiler jedes anderen gemeinschaftlichen linksseitigen Vielfachen ist. Dagegen ist im allgemeinen ein von Null verschiedenes rechtsseitiges gemeinschaftliches Vielfaches nicht vorhanden.*

Beweis. Sei $\alpha > 0$, $\beta > 0$ gegeben und π eine additive Hauptzahl, für die $\pi \geqq \alpha$, $\pi \geqq \beta$ ist, dann ist $\pi = \alpha\pi'$, $\pi = \beta\pi''$, d. h. es gibt linksseitige gemeinschaftliche Vielfache von α und β. Das kleinste derartige von Null verschiedene werde mit $\mu = \{\alpha, \beta\}$ bezeichnet. Jedes andere μ' ist dann mindestens $= \mu$, d. h. $\mu' \geqq \mu$. Also ist nach Nr. 6 auch $\mu' = \mu\xi + \varrho$, wo $\mu > \varrho$ ist. Da nun μ' und μ linksseitig durch α und β teilbar sind, so muß es nach Nr. 6 auch ϱ sein, d. h. unterhalb μ gäbe es ein gemeinschaftliches Vielfaches von ϱ von α und β, also ist $\varrho = 0$, d. h. $\mu' = \mu\xi$. Es gelten übrigens folgende Formeln: $(\gamma\alpha, \gamma\beta) = \gamma(\alpha, \beta)$; ist ferner $\alpha = (\alpha, \beta)\alpha'$, $\beta = (\alpha, \beta)\beta'$, dann ist: $(\alpha, \beta)\{\alpha', \beta'\} = \{\alpha, \beta\}$.

Daß im allgemeinen kein gemeinschaftliches rechtsseitiges Vielfaches

existiert, lehrt das Beispiel $\alpha = \omega$, $\beta = \omega + 1$. Denn gäbe es eine Zahl μ_1, für die $\mu_1 = \xi\omega$ und $\mu_1 = \eta(\omega + 1)$ wäre, so müßte $\mu_1 = \xi\omega$ eine additive Hauptzahl sein und daher wäre wegen $\mu_1 = \eta(\omega + 1)$ auch $\omega + 1$ eine additive Hauptzahl, was doch nicht der Fall ist.

§ 5.

Die Potenzierung.

1) Wie bei der Multiplikation setzen wir $w(\alpha) = \alpha$. Während wir aber in § 4 unter $g(\xi, \eta)$ die additive Funktion $\xi + \eta$ verstanden, wählen wir hier $g(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) = \xi\eta$. Es ist somit (b) erfüllt, denn $g(\xi, \eta) > \xi$ für $\xi \geqq \xi_0 = 1$, $\eta \geqq \eta_0 = 2$. Da $\lambda_0 = 0$ ist, so ist $\lambda = 2$, da 2 die kleinste Zahl λ ist, die zugleich den Bedingungen $\lambda \geqq \max(\eta_0, \lambda_0) = 2$, $\lambda \geqq \xi_0 - 1$ genügt. Es ist auch (c′) erfüllt.

Die durch diese Festsetzungen definierte Operation bezeichnen wir mit α^β und nennen α^β eine *Potenz*. Die Operation selbst heißt *Potenzierung*; α wird die *Grundzahl*, β der *Exponent* der Potenz α^β genannt.

2) Die Potenz ist also durch folgende Gleichungen erklärt:

$$(1)\quad \alpha^1 = \alpha,$$
$$(2)\quad \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta\alpha = \alpha^\beta\alpha^1,$$
$$(3)\quad \alpha^{\bar\beta} = \lim_\beta (\alpha^\beta),$$

wenn β alle Zahlen unterhalb der Limeszahl $\bar\beta$ durchläuft. Durch diese drei Gleichungen ist α^β für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 1$ erklärt. Aus (1) und (2) folgt, daß man passend die Definition erweitert durch

$$(4)\quad \alpha^0 = 1 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 1,$$
$$(5)\quad 1^\beta = 1 \quad \text{für} \quad \beta \geqq 0,$$
$$(6)\quad 0^\beta = 0 \quad \text{für} \quad \beta \geqq 1.$$

Damit ist α^β für jedes Wertepaar $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ erklärt, mit Ausnahme des Wertepaares $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Aus (2) folgt für endliches $\beta = b$, daß $\alpha^b = \alpha\alpha\alpha \cdots$ (b Faktoren) ist.

3) Nach III und Gleichung (4) der vorhergehenden Nummer folgt: ist $\beta > \beta' \geqq 0$ und $\alpha \geqq 2$, dann ist $\alpha^\beta > \alpha^{\beta'}$. Ist $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'}$ für eine Zahl $\alpha \geqq 2$, dann ist $\beta = \beta'$; und ist $\alpha^\beta > \alpha^{\beta'}$, dann ist $\alpha \geqq 2$ und $\beta > \beta'$. Ist $\beta > 1$, $\alpha \geqq 2$, dann ist $\alpha^\beta > \alpha^1 = \alpha$.

4) Nach IV ergibt sich als Verallgemeinerung der definierenden Gleichung (3), daß stets $\alpha^{\lim \gamma} = \lim\limits_\gamma \alpha^\gamma$ ist, ($\alpha \geqq 2$), was für eine Limesreihe die Zahlen γ auch bilden mögen.

5) Wie in § 4 benutzen wir statt V den schärferen Satz XVII Aus ihm folgt für $\alpha \geqq 2$ und $\beta \geqq \omega$, daß $\alpha^\beta \geqq \alpha + \beta$ ist und für $\beta = b < \omega$ folgt aus ihm $\alpha^{1+b} \geqq \alpha + b$ Es gilt aber für $\alpha \geqq 2$, $\omega > b \geqq 2$ auch $\alpha^b \geqq \alpha + b$, denn es ist $\alpha^b = \alpha \cdot \alpha \cdots$ (b Faktoren) $\geqq \alpha + \alpha + \alpha + \cdots$ (b Summanden) $\geqq \alpha + 2 + 2 + 2 + \cdots \geqq \alpha + b$. Also ist $\alpha^\beta \geqq \alpha + \beta$ für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 2$. Es gilt aber eine noch bessere Abschätzung: für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 1$ ist $\alpha^\beta \geqq \alpha\beta$. Für $\beta = 1$ ist das klar; für $\beta = 2$ ist $\alpha^\beta = \alpha^2 = \alpha\alpha \geqq \alpha 2$. Sei die Behauptung als richtig bekannt für jedes der Beziehung $2 \leqq \beta < \beta'$ genügende β, dann ist zu zeigen, daß auch $\alpha^{\beta'} \geqq \alpha\beta'$. Ist nun $\beta' = \beta'' + 1$, dann ist also $\alpha^{\beta''} \geqq \alpha\beta''$ und daher

$$\alpha^{\beta'} = \alpha^{\beta''+1} = \alpha^{\beta''}\alpha \geqq \alpha\beta''\alpha \geqq \alpha(\beta'' + \alpha) > \alpha(\beta'' + 1) = \alpha\beta',$$

d. h. es ist $\alpha^{\beta'} > \alpha\beta'$. Ist aber $\beta' = \lim \beta$, dann folgt aus $\alpha^\beta \geqq \alpha\beta$ auch $\alpha^{\lim \beta} \geqq \alpha \lim \beta$ oder $\alpha^{\beta'} \geqq \alpha\beta'$. — Aus diesem Beweise folgt insbesondere, daß stets $\alpha^\beta > \alpha\beta$ ist, falls β eine Nicht-Limeszahl ist. Weiter folgt $\alpha^\beta \geqq \alpha\beta \geqq \beta$, d. h. $\alpha^\beta \geqq \beta$; hier kann das Gleichheitszeichen nur gelten, wenn β eine Limeszahl ist. Es ist also $\alpha^\beta > \alpha$ für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 2$; und $\alpha^\beta \geqq \beta$ für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 1$, aber $\alpha^\beta > \beta$, falls β eine unmittelbar vorhergehende Zahl besitzt. *Die Potenz ist also größer als die Grundzahl und nicht kleiner als der Exponent; sie ist aber sicher größer als der Exponent, falls dieser eine Nicht-Limeszahl ist.*

6) Sei $\alpha \geqq 2$ und $\beta \geqq \alpha^0 = 1$*), dann existiert nach VI eine Zahl ξ, sodaß $\alpha^{\xi+1} > \beta \geqq \alpha^\xi$ ist. Nach § 4, Nr. 6 existiert daher ein α_0 und ein $\beta' < \alpha^\xi$ derart, daß $\beta = \alpha^\xi \alpha_0 + \beta'$ ist. Hieraus folgt $\alpha^{\xi+1} > \beta \geqq \alpha^\xi \alpha_0$ oder $\alpha^\xi \alpha > \alpha^\xi \alpha_0$, d. h. $\alpha > \alpha_0$. *Wenn also $\beta \geqq 1$, $\alpha \geqq 2$ ist, dann existiert ein eindeutig bestimmtes Zahlentripel ξ, $\alpha_0 < \alpha$, $\beta' < \alpha^\xi$, so daß $\beta = \alpha^\xi \alpha_0 + \beta'$ ist.* Hieraus folgt sofort, indem man für β' eine entsprechende Gleichung ansetzt etc., daß sich jede Zahl $\beta \geqq 1$ in eindeutiger Weise in die Form $\beta = \alpha^{\xi_0}\alpha_0 + \alpha^{\xi_1}\alpha_1 + \cdots + \alpha^{\xi_r}\alpha_r$ setzen läßt, wenn $\alpha \geqq 2$, $\xi_0 > \xi_1 > \cdots > \xi_r \geqq 0$ und $\alpha > \alpha_t$ $(t = 0, 1, \cdots, r)$ ist.

7) Nach VII gilt: ist $\alpha > \alpha' > 0$, dann ist $\alpha^\beta \geqq \alpha'^\beta$, und ist $\alpha^\beta > \alpha'^\beta$, dann ist $\alpha > \alpha'$. Es ist wegen (c') für $\alpha > \alpha'$ sogar $\alpha^{\beta+1} > \alpha'^{\beta+1}$, und aus $\alpha^{\beta+1} = \alpha'^{\beta+1}$ folgt daher $\alpha = \alpha'$. *Ist also $\alpha^\beta = \alpha'^\beta$ für $\alpha > \alpha'$ und $\beta > 0$, dann ist β eine Limeszahl.*

8) Es ist $\alpha^\beta \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$, d. h. es ist (d) erfüllt und $f_2(\xi, \eta) = \xi + \eta$. Ferner ist $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$, d. h. es ist (e) erfüllt und $f_3(\xi, \eta) = \xi\eta$.

Da 0^0 nicht definiert sind, so muß für $\alpha = 0$ sowohl β als auch $\gamma > 0$ sein. In diesem Fall sind die beiden Gesetze erfüllt, ebenso für $\alpha = 1$.

---

*) Nach § 1, VI müßte es eigentlich heißen: $\beta \geqq \alpha^1 = \alpha$. Doch auch für $\alpha > \beta \geqq 1$ ist der Satz richtig, denn dann ist

$$\beta = \alpha^0\beta + 0, \quad \text{d. h.} \quad \xi = 0, \ \alpha_0 = \beta < \alpha \quad \text{und} \quad \beta' = 0 < \alpha^0 = 1.$$

Sei $\alpha \geqq 2$, dann sind beide Gesetze für $\gamma = 0, 1$ nach den definierenden Gleichungen in Nr. 2 erfüllt und werden leicht durch vollständige Induktion für jedes γ erwiesen.

9) Es ist also (d) und (e) erfüllt und daher gilt nach XXI—XXIII der Satz: *Ist δ eine δ-Zahl, dann hat für jedes der Beziehung $1 < \alpha \leqq \delta$ genügende α die Gleichung $\delta = \alpha^\xi$ eine Wurzel ξ, die eine Hauptzahl von $f_2(\xi, \eta) = \xi + \eta$, also eine additive Hauptzahl ist. Hat umgekehrt eine überendliche Zahl δ die Eigenschaft, daß für jedes oberhalb 1 und nicht oberhalb δ gelegene α die Gleichung $\delta = \alpha^\xi$ eine Lösung ξ besitzt, dann ist δ eine δ-Zahl und diese Lösungen ξ sind additive Hauptzahlen. — Ist $\alpha \geqq 2$ und π eine von 1 verschiedene additive Hauptzahl, dann ist α^π eine δ-Zahl.*

Folgerung 1. *Ist $\alpha \geqq 2$ und β eine Limeszahl, dann ist α^β eine additive Hauptzahl.**)

Denn der kleinste von Null verschiedene Rest der Zahl β ist eine additive Hauptzahl $\pi > 1$, d. h. $\beta = \beta' + \pi$, also $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'}\alpha^\pi$. Da nun α^π eine δ-Zahl, also eine additive Hauptzahl ist, so ist auch $\alpha^{\beta'}\alpha^\pi = \alpha^\beta$ eine solche. — Man kann das auch direkt beweisen: es ist α^β der Limes aller der Zahlen α^ϑ, die man erhält, wenn ϑ gegen β konvergiert. Nach § 2, Nr. 12, (a) ist α^β eine additive Hauptzahl, wenn für jedes dieser ϑ die Gleichung $\alpha^\vartheta + \alpha^\beta = \alpha^\beta$ besteht. Nun ist $\beta = \vartheta + \eta$, wo η als Rest von β eine Limeszahl ist. Also ist $\alpha^\eta \geqq \eta \geqq \omega$; hieraus folgt $1 + \alpha^\eta = \alpha^\eta$ und weiter $\alpha^\vartheta + \alpha^{\vartheta+\eta} = \alpha^{\vartheta+\eta}$, d. h. $\alpha^\vartheta + \alpha^\beta = \alpha^\beta$.

Folgerung 2. *Ist $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq \omega$, dann ist α^β eine Limeszahl.*

Denn es ist $\beta = \omega + \eta$. Also $\alpha^\beta = \alpha^\omega\alpha^\eta$ eine Limeszahl, da α^ω eine solche ist.

Folgerung 3. *Ist $\alpha \geqq 2$, dann ist die erste δ-Zahl über α die Zahl α^ω.*

Nach § 4, Nr. 15, (e) ist die erste δ-Zahl über α der Limes der Folge $\alpha = \alpha^1, \alpha\alpha = \alpha^2, \cdots, \alpha^n = \alpha\alpha\alpha \cdots (n \text{ Mal}) \cdots$, d. h. die Zahl α^ω. — Wir folgern das auch unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Denn α^ω ist eine δ-Zahl, da $\alpha \geqq 2$ und ω eine additive Hauptzahl ist, und es ist $\alpha^\omega > \alpha$. Ist δ eine δ-Zahl oberhalb α, so ist zu zeigen: $\delta \geqq \alpha^\omega$. Nun ist nach unserem Satz in dieser Nummer $\delta = \alpha^{\pi'} > \alpha$, d. h. $\pi' > 1$, also $\pi' \geqq \omega$ und daher $\delta \geqq \alpha^\omega$.

10) Satz. *Jede additive Hauptzahl ist eine Potenz von ω, und umgekehrt ist jede derartige Potenz ω^μ eine additive Hauptzahl.*

---

*) Ist α^β eine additive Hauptzahl, aber $\beta = \beta'' + 1$, dann folgt daraus, daß $\alpha^\beta = \alpha^{\beta''}\alpha$ eine Hauptzahl der Addition ist, das gleiche für α selbst. Und ist α eine additive Hauptzahl, dann ist auch $\alpha^{\beta''+1}$ eine solche.

Beweis. Sei π eine additive Hauptzahl. Ist $\pi = 1$, dann ist $\pi = \omega^0$. Sei daher $\pi > 1$, d. h. $\pi \geqq \omega$, und $\pi \geqq \alpha \geqq 2$, dann folgt aus Nr. 6 eine Gleichung der Form $\pi = \alpha^\mu \pi'$, wo π' eine additive Hauptzahl unterhalb α ist. Also ist speziell für $\alpha \leqq \omega$ stets $\pi' = 1$ und $\pi = \alpha^\mu$. Wenn also π eine von 1 verschiedene additive Hauptzahl ist und α der Bedingung $\pi \geqq \omega \geqq \alpha \geqq 2$ genügt, so ist $\pi = \alpha^\mu$ eine Potenz von α, d. h. für $\alpha = \omega$ erhalten wir $\pi = \omega^\mu$. Ist umgekehrt μ irgend eine Zahl, dann ist ω^μ nach Nr. 9, Folgerung 1 (nebst Anm.) stets eine additive Hauptzahl.

Die Cantorsche Normalform für eine Zahl α gewinnt jetzt die Form:

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} a_0 + \omega^{\alpha_1} a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r} a_r,$$

wo die Zahlen a_ι endlich sind und $\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_r$ ist. —

Aus dem Satz von Nr. 9 folgt der

11) **Satz:** *Jede δ-Zahl hat die Gestalt $\omega^{(\omega^\mu)}$ und jede Zahl $\omega^{(\omega^\mu)}$ $(\mu \geqq 0)$ ist eine δ-Zahl.*

12) Es seien nun $\alpha > 1$ und $\beta \geqq 0$ in der Cantorschen Normalform gegeben. Es ist α^β in der Normalform darzustellen.

Ist $\alpha = a < \omega$ und $\beta = \omega\beta' + b$, $(b < \omega)$, dann ist

$$\alpha^\beta = a^\beta = a^{\omega\beta'} a^b = (a^\omega)^{\beta'} a^b = \omega^{\beta'} a^b.$$

Das ist die Normalform von α^β. Ist aber $\alpha \geqq \omega$, dann ist in $\alpha^\beta = \alpha^{\omega\beta'} \alpha^b$ der zweite Faktor α^b nach § 4, Nr. 10 in der Normalform bekannt, wenn die Normaldarstellung von α gegeben ist. Es ist also nur noch der erste Faktor $\alpha^{\omega\beta'}$, der nach Nr. 9, Folgerung 1 eine additive Hauptzahl ist, genauer zu bestimmen, d. h. wenn die Normalform von α gegeben ist, dann ist anzugeben, wie die additive Hauptzahl $\alpha^{\omega\beta'}$ aussieht. Setzen wir nun die Limeszahl $\omega\beta' = \bar{\beta}$ und bezeichnen wir die größte nicht oberhalb α gelegene Hauptzahl mit π, dann behaupten wir, daß $\alpha^{\bar{\beta}} = \pi^{\bar{\beta}}$ ist. Der Nachweis dieser Gleichung geht aus von der Ungleichung $\pi\omega > \alpha \geqq \pi \geqq \omega$. (Da $\alpha \geqq \omega$ ist, muß auch $\pi \geqq \omega$ sein.) Hieraus folgt $\pi\omega \leqq \pi^2$, also auch $\pi^{\bar{\beta}} \leqq \alpha^{\bar{\beta}} \leqq (\pi\omega)^{\bar{\beta}} \leqq (\pi^2)^{\bar{\beta}} = \pi^{2\bar{\beta}} = \pi^{\bar{\beta}}$. Somit ist $\pi^{\bar{\beta}} = \alpha^{\bar{\beta}}$. Da mit der Normalform von α auch π bekannt ist, so ist hiermit $\alpha^{\bar{\beta}}$ gefunden. Setzt man nach Nr. 10: $\alpha = \omega^{\alpha_0} a_0 + \cdots$ und $\beta = \bar{\beta} + b$, so ist $\pi = \omega^{\alpha_0}$, $\alpha^\beta = \alpha^{\bar{\beta}} \alpha^b = \omega^{\alpha_0 \bar{\beta}} \alpha^b$.*)

13) **Satz.** *Jede von Null verschiedene Zahl β läßt sich auf unendlich viele oder endlich viele Arten als Potenz darstellen, je nachdem β eine additive Hauptzahl ist oder nicht.*

---

*) Durch diesen Ausdruck definiert Hessenberg die Potenz (G. d. M. § 79). Man könnte analog das Produkt mit Hilfe der Normalform definieren, indem man eine Festsetzung über die Multiplikation der additiven Hauptzahlen trifft; es wäre noch vorher das distributive Gesetz zu fordern.

Beweis. Sei β keine additive Hauptzahl. Nach Satz VIII gibt es nur endlich viele Zahlen ξ, für die eine der Gleichung $\beta = \alpha^\xi$ genügende Zahl α existiert, und diese Zahlen ξ sind alle Nicht-Limeszahlen, da sonst β nach Nr. 9 eine additive Hauptzahl wäre. Also ist nach VIII (da hier (c′) gilt) β nur auf endlich viele Arten als Potenz darstellbar. — Sei nun β eine additive Hauptzahl π. Ist $\pi = 1$, dann ist $\pi = 1 = \alpha^0$ für $\alpha = 1, 2, 3, \cdots$. Sei $\pi \geqq \omega$, dann ist nach dem in Nr. 10 gegebenen Beweise $\pi = \alpha^\mu$ für $\alpha = 2, 3, \cdots; \omega$. Also läßt sich in der Tat jede additive Hauptzahl auf unendlich viele Arten als Potenz darstellen.

14) Satz. *Ist π eine von* 1 *verschiedene additive Hauptzahl und β eine Limeszahl, für die die Gleichung $\pi = \alpha^\beta$ eine Wurzel α hat*), dann hat diese Gleichung unendlich viele Wurzeln, die eine δ-Zahl δ zum Limes haben. Es ist $\pi = \delta^{\beta'}$ und β' ist der größte unterhalb β gelegene Exponent, der bei allen Potenzdarstellungen von π auftritt.***)

Beweis. Da nach Nr. 8 Voraussetzung (e) erfüllt ist, so sind nach XXIV unendlich viele Wurzeln α vorhanden, die eine Hauptzahl von $f_3(\xi, \eta) = \xi\eta$, d. h. eine δ-Zahl, zum Limes haben. Es ist $\pi \geqq \delta$, also nach Nr. 6: $\pi = \delta^{\beta'}\pi'$, wo π' eine additive Hauptzahl unterhalb δ ist. Sei nun α eine beliebige Wurzel der Gleichung $\pi = \alpha^\beta$, dann ist $\alpha < \delta$, also nach Nr. 9: $\delta = \alpha^{\pi''}$, wo π'' eine additive Hauptzahl ist. Es folgt:

$$\pi = \alpha^\beta = \delta^{\beta'}\pi' = \alpha^{\pi''\beta'}\pi' = \alpha^\beta.$$

Es sei nun $\pi' > 1$, dann ist $\alpha^\beta > \alpha^{\pi''\beta'}$, d. h. $\beta > \pi''\beta'$, also ist $\beta = \pi''\beta' + \eta$, wo $\eta \geqq 1$ ist. Hieraus folgt

$$\alpha^{\pi''\beta'}\pi' = \alpha^\beta = \alpha^{\pi''\beta' + \eta} = \alpha^{\pi''\beta'}\alpha^\eta \quad \text{oder} \quad \pi' = \alpha^\eta \geqq \alpha$$

für jede der Wurzeln α, also ist auch $\pi' \geqq \lim \alpha = \delta$, während doch $\pi' < \delta$ ist. Somit ist die Annahme $\pi' > 1$ unmöglich und es folgt $\pi' = 1$ oder $\pi = \delta^{\beta'}$. Daß β' der größtmögliche Exponent unterhalb β ist, folgt aus XV.

15) Die Hauptzahlen der Potenzfunktion sind die von Cantor eingeführten ε-Zahlen.***)

Eine ε-Zahl ist eine oberhalb 2 gelegene Zahl ε, für die die Gleichung $\varepsilon = \alpha^\varepsilon$ besteht, falls α irgend eine oberhalb 1 und unterhalb ε gelegene Zahl bedeutet. Es gilt nun:

(a) *Jede ε-Zahl ist eine δ-Zahl.* (XX.)

(b) *Ist eine Zahl ε der Limes einer Folge von Zahlen α, deren jede die Gleichung $\varepsilon = \alpha^\varepsilon$ erfüllt, dann ist ε eine ε-Zahl.* (X.)

*) Nach Nr. 13 sind stets derartige Limeszahlen β vorhanden.

**) Man vgl. den analogen Satz in § 4, Nr. 16.

***) G. Cantor, l. c. §. 20. — Cantor rechnet ω nicht zu den ε-Zahlen.

(c) *Hat eine Folge von Zahlen* $\alpha\,(>1)$ *die Eigenschaft, daß mit* α *zugleich auch* α^α *der Folge angehört, dann hat die Folge eine* ε*-Zahl zum Limes.* (XI.)

(d) *Der Limes einer Folge von* ε*-Zahlen ist eine* ε*-Zahl.*

(e) *Ist* $\alpha > 1$, *dann ist die erste* ε*-Zahl über* α *der Limes der Folge*
$\alpha, \alpha_1 = \alpha^\alpha,\ \alpha_2 = \alpha_1^{\alpha_1},\ \alpha_3 = \alpha_2^{\alpha_2}, \cdots, \alpha_{n+1} = \alpha_n^{\alpha_n} \cdots\cdots$ (XIII.)

Die erste ε-Zahl ist ω*); man kann das u. a. aus (e) folgern, da ω der Limes der Reihe $2, 4, 16, 256, \cdots$ ist.

Sei $\alpha \geqq \omega$, dann ist die erste ε-Zahl über α nach (e) der Limes der Folge $\alpha,\ \alpha_1 = \alpha^\alpha,\ \alpha_2, \alpha_3, \cdots$, wo stets $\alpha_{n+1} = \alpha_n^{\alpha_n}$ ist. Wir behaupten nun, daß $\alpha_{n+1} = \alpha_n^{\alpha_n} = \alpha^{\alpha_n}$ ist. Der Nachweis stützt sich auf Nr. 9. Es ist zunächst wegen $\alpha \geqq \omega$ nach Nr. 9, Folgerung 2 die Zahl $\alpha_1 = \alpha^\alpha$ eine Limeszahl, also nach Folgerung 1 derselben Nummer $\alpha_2 = \alpha_1^{\alpha_1}$ eine additive Hauptzahl und deshalb weiter $\alpha_3 = \alpha_2^{\alpha_2}$ eine δ-Zahl; also sind $\alpha_4, \alpha_5, \cdots$ alles δ-Zahlen, d. h. α_n ist für $n \geqq 3$ stets eine δ-Zahl. Nun ist

$$\alpha_2 = \alpha_1^{\alpha_1} = \alpha^{\alpha\alpha_1} = \alpha^{(\alpha^{1+\alpha})} = \alpha^{(\alpha^\alpha)} = \alpha^{\alpha_1},$$

d. h. für $n = 1$ ist die Behauptung richtig; für $n = 2$ zeigen wir es so:

$$\alpha_3 = \alpha_2^{\alpha_2} = \alpha^{\alpha_1\alpha_2} = \alpha^{(\alpha_1{}^{1+\alpha_1})} = \alpha^{(\alpha_1^{\alpha_1})} = \alpha^{\alpha_2}.$$

Sei für $n \geqq 2$ bewiesen, daß $\alpha_{n+1} = \alpha^{\alpha_n}$, dann ist

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = \alpha^{\alpha_n\alpha_{n+1}} = \alpha^{\alpha_{n+1}},$$

da $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ und α_{n+1} für $n = 2, 3, \cdots$ eine δ-Zahl ist. Es wird also ε der Limes der Folge $\alpha, \alpha_1 = \alpha^\alpha, \alpha_2 = \alpha^{\alpha_1}, \cdots$.**) Es erscheint mit Rücksicht auf Satz (a) bemerkenswert, daß die Limesreihe $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots$ nur δ-Zahlen enthält, wenn man von den ersten drei Gliedern absieht, so daß also jede ε-Zahl oberhalb ω als Limes einer Reihe von δ-Zahlen dargestellt ist.

16) Sei für eine Zahl β eine Zahl $\alpha \geqq 2$ vorhanden, sodaß $\beta = \alpha^\beta$ ist. Was läßt sich dann über β aussagen? Wir wissen, daß eine solche Gleichung nur für Limeszahlen β bestehen kann, da andernfalls $\alpha^\beta > \beta$ ist. Es genügt aber aus $\beta = \alpha^\beta$ $(\alpha \geqq 2)$ die Folgerung zu ziehen, daß $\beta \geqq \omega$ ist. Denn dann ist nach Nr. 9, Folgerung 2 die Zahl $\alpha^\beta = \beta$ eine Limeszahl, also nach Folgerung 1: $\alpha^\beta = \beta$ eine additive Hauptzahl und schließlich folgt nach dem Satz in Nr. 9: $\alpha^\beta = \beta$ ist eine δ-Zahl. Nun

---

*) Man vgl. G. Hessenberg, P. t. O. Hessenberg hat zuerst darauf hingewiesen, daß auch ω den Charakter einer ε-Zahl hat.

**) Das stimmt auch für $2 \leqq \alpha < \omega$. — Es wird direkt

$$\varepsilon = \lim_n \alpha_{n+1} = \lim_n \alpha^{\alpha_n} = \alpha^{\lim \alpha_n} = \alpha^\varepsilon.$$

Man vgl. die sich an den Beweis von XIII anschließenden Bemerkungen.

schließen wir weiter aus $\beta = \omega^\beta$, daß erstens $\beta = \lim\limits_{\vartheta < \beta} \alpha^\vartheta$, wo ϑ gegen β konvergiert; zweitens ist für jedes dieser ϑ stets $\vartheta\beta = \beta$, da β eine δ-Zahl ist, und somit ist $(\alpha^\vartheta)^\beta = \alpha^{\vartheta\beta} = \alpha^\beta = \beta$. Die Zahlen α^ϑ, die β approximieren, erfüllen also jede die Gleichung $(\alpha^\vartheta)^\beta = \beta$. Nach Nr. 15, Satz (b) ist also β eine ε-Zahl. — Weiß man erst, daß β eine δ-Zahl ist, dann kann man auch anders schließen: aus der Gleichung $\beta = \omega^\beta$ folgt durch Kombination des Satzes XIV, Zusatz 2 mit dem Satz in Nr. 14, daß $\beta = \varepsilon^\mu$ ist, wo ε eine ε-Zahl und μ eine additive Hauptzahl ist (da ja β eine δ-Zahl ist), und nach XIV ist $\varepsilon^\beta > \beta$ und $\beta = \alpha^\beta$ für jedes der Bedingung $1 < \alpha < \varepsilon$ genügende α. Es sei nun $\mu > 1$, dann ist $\beta = \varepsilon^\mu > \varepsilon$, also $\varepsilon\beta = \beta$ und daher $(2^\varepsilon)^\beta = 2^{\varepsilon\beta} = 2^\beta = \beta$, da ja $1 < 2 < \varepsilon$ ist. Da nun $2^\varepsilon = \varepsilon$ ist, so haben wir $\varepsilon^\beta = \beta$, eine Gleichung, deren Unrichtigkeit wir kennen. Somit ist $\mu = 1$, d. h. $\beta = \varepsilon$. Wir fassen zusammen:

(f) *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ε eine ε-Zahl ist, ist das Bestehen der Gleichung $\varepsilon = 2^\varepsilon$.*

Der Satz (b) in Nr. 15 ist dadurch wesentlich verschärft; es zeigt sich eben, daß die charakteristische Gleichung nur für die Grundzahl 2 zu bestehen braucht, um daraus für alle Grundzahlen $\alpha < \varepsilon$ zu folgern. Das Ergebnis von Nr. 5 verschärft sich dahin:

(g) *Es ist $\alpha^\beta > \beta$, falls β keine ε-Zahl und $\alpha > 1$ ist.*

Es erscheint bemerkenswert, daß die ε Zahlen sich wesentlich anders verhalten als die additiven Hauptzahlen und die δ-Zahlen. Denn $2 + \beta = \beta$ charakterisiert nur die Zahlen $\beta \geqq \omega$, aber nicht etwa nur die additiven Hauptzahlen; $2\beta = \beta$ sagt nicht aus, daß β eine δ-Zahl ist, sondern nur, daß β eine Limeszahl ist. Dagegen charakterisiert $2^\beta = \beta$ völlig die ε-Zahlen. Es ist eben die Potenzfunktion eine Funktion f mit der Eigenschaft, daß das Bestehen der Gleichung $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ für eine einzige Zahl α bereits γ als Hauptzahl von f charakterisiert, während im allgemeinen dazu unendlich viele Gleichungen gehören.

Über die Klasse der Flächen, welche ein Strahlenbündel unter festem Winkel schneiden.

Von

Georg Landsberg in Kiel.

Die logarithmische Spirale hat bekanntlich die charakteristische Eigenschaft, daß sie alle Strahlen eines ebenen Büschels unter festem Winkel schneidet. Es liegt hiernach nahe, das analoge Problem des Raumes zu behandeln und nach denjenigen Flächen zu fragen, welche ein Strahlenbündel unter festem Winkel schneiden. Da diese Flächen, wie es scheint, bisher keiner Untersuchung unterworfen sind, so gebe ich im folgenden eine Übersicht über die ihnen zukommenden Eigentümlichkeiten und die verschiedenen möglichen Arten ihrer Erzeugung. Das Hauptergebnis ist, daß jede solche Fläche durch Bewegung einer logarithmischen Spirale erzeugt werden kann, deren Ebene auf einem vom Scheitel der Spirale ausstrahlenden, sonst aber völlig beliebigen Kegel ohne Gleiten entlang rollt.

1. Um zunächst die partielle Differentialgleichung des Problems aufzustellen, führen wir Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein und nehmen die Gleichung der Fläche in der Form an:

$$r = \omega(\vartheta, \varphi). \tag{1}$$

Differenziiert man alsdann die Gleichungen:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta, \tag{2}$$

welche in Verbindung mit (1) eine Parameterdarstellung der Fläche in sphärischen Koordinaten ϑ, φ geben, so erhält man für die Richtungskosinus X, Y, Z der Normale die folgenden Gleichungen, in denen λ einen unbekannten Parameter bedeutet:

$$\tag{3} \left\{\begin{aligned} X\sin\vartheta\cos\varphi + Y\sin\vartheta\sin\varphi + Z\cos\vartheta &= -\lambda, \\ X\cos\vartheta\cos\varphi + Y\cos\vartheta\sin\varphi - Z\sin\vartheta &= \lambda\frac{\partial \lg r}{\partial\vartheta}, \\ -X\sin\varphi + Y\cos\varphi &= \lambda\frac{\partial\lg r}{\sin\vartheta\,\partial\varphi}, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1. \end{aligned}\right.$$

Quadriert und addiert man die ersten drei Gleichungen, deren Koeffizientensystem orthogonal ist, so erhält man zunächst für den Parameter λ:

$$\frac{1}{\lambda^2} = 1 + \left(\frac{\partial \lg r}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lg r}{\sin\vartheta\, \partial \varphi}\right)^2, \tag{4}$$

worauf alsdann X, Y, Z bestimmt werden können.

Soll nun die Tangentialebene der Fläche mit den Strahlen des Bündels den festen Winkel h bilden, so muß zufolge der ersten Gleichung (3) λ konstant und gleich $\pm \sin h$ sein. Somit genügen die hier behandelten Flächen der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\left(\frac{\partial \lg r}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lg r}{\sin\vartheta\, \partial \varphi}\right)^2 = \operatorname{ctg}^2 h. \tag{5}$$

2. Diese partielle Differentialgleichung besitzt eine sehr einfache geometrische Bedeutung, durch welche es möglich wird, die Gesamtheit der auftretenden Flächen zu übersehen und für sie eine der oben erwähnten Eigenschaft der logarithmischen Spirale analoge Erzeugung anzugeben. Die Differentialgleichung ist nämlich im wesentlichen von derselben Form wie die Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung, welche beim Problem der geodätischen Linien auftritt.

In der Tat, lautet für eine beliebige Fläche die erste Fundamentalform

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

so ist der geodätische Abstand eines Punktes (u, v) der Fläche von einer beliebig gegebenen Linie oder einem gegebenen festen Punkte eine Funktion $\theta(u, v)$ der Koordinaten, welche der partiellen Differentialgleichung genügt:

$$G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = EG - F^2.\text{*)}$$

Auf der Einheitskugel S, auf welcher

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

ist, genügt hiernach der geodätische Abstand eines Punktes (ϑ, φ) von einer beliebigen auf S gewählten Kurve $\mathfrak{C}$ der Gleichung

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)^2 = 1, \tag{5a}$$

welche nur durch den Faktor $\operatorname{ctg}^2 h$ von der Gleichung (5) unterschieden ist.

Hieraus entspringt nunmehr die folgende Erzeugung *aller* Flächen der Gattung. Man wähle auf der Einheitskugel S eine beliebige Kurve $\mathfrak{C}$ und konstruiert zu dieser die zugehörigen sphärischen Parallelkurven, indem man auf den geodätischen Normalen von $\mathfrak{C}$ eine feste Länge $\theta = \theta_0$

*) s. Bianchi, Differentialgeometrie S. 160, § 81 Ende und S. 67, Gleichung (14). Vgl. auch meine Arbeit über Krümmung in der Variationsrechnung, diese Ann. Bd. 65, S. 325 f.

aufträgt. Die Gesamtheit dieser Kurven $\theta = \text{const.}$ bildet eine Schar $\mathfrak{S}$, welche die Kugel in ähnlicher Weise überdeckt, wie es die Breitenkreise tun, und in diese Schar in dem speziellen Falle übergeht, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ der Äquator (oder der Pol) der Kugel S ist. Wenn man alsdann jede der Kurven $\theta = \theta_0$ in der Weise vom Mittelpunkt der Kugel aus einer Ähnlichkeitstransformation unterwirft, daß die Entfernung r der neuen Kurve der Bedingung

$$\lg r = \theta \operatorname{ctg} h + \text{const.} \tag{6}$$

genügt, so erfüllt die Schar der so erhaltenen Kurven eine Fläche der geforderten Eigenschaft, denn durch die Substitution (6) geht die für die Funktion θ geltende partielle Differentialgleichung (5a) in (5) über. Überdeckt man also die Einheitskugel in der angegebenen Weise mit einer Schar von Parallelkurven, so sagt die Gleichung (5) oder (6) einfach aus, daß der Logarithmus des Leitstrahles r auf der Fläche proportional dem Abstande einer festen und einer veränderlichen Parallelkurve auf der Kugel sein muß.

Geht insbesondere die Kurve $\mathfrak{C}$ in einen Punkt über, den man zum Pol der Einheitskugel wählen kann, so sind die Kurven $\theta = \text{const.}$, wie schon erwähnt, die Breitenkreise und die zugehörigen Kurven der Fläche sind daher ebenfalls Kreise, deren Ebenen parallel sind. Die Fläche ist alsdann einfach eine Rotationsfläche, welche durch Drehung einer logarithmischen Spirale um eine in ihrer Ebene gelegene und durch den Scheitel hindurchgehende Achse erzeugt wird. Denn ein Meridian $\mathfrak{M}$ der Einheitskugel geht durch die Transformation (6) in eine logarithmische Spirale $\mathfrak{S}$ über, und ebenso wie die Kugel durch Rotation des Meridians $\mathfrak{M}$ um die Achse entsteht, so geht die entsprechende Fläche unserer Klasse aus der zugehörigen Spirale $\mathfrak{S}$ durch Rotation um dieselbe Achse hervor.

Auch unter allgemeinen Bedingungen können wir der ersten Erzeugungsart unserer Flächen eine zweite zur Seite stellen, welche anschaulicher als jene ist, weil sie die Flächen, ebenso wie in dem eben erörterten speziellen Falle, durch Bewegung einer logarithmischen Spirale im Raume entstehen läßt.

In der Tat, betrachtet man statt der Kurven $\theta = \text{const.}$ der Einheitskugel ihre rechtwinkligen Trajektorien, so sind dies größte Kreise der Kugel, welche eine gewisse sphärische Kurve $\mathfrak{E}$, die Evolute der Parallelkurven $\theta = \text{const.}$ einhüllen. Diese größten Kreise gehen durch die Transformation (6) in kongruente logarithmische Spiralen über. Da die Ebenen der größten Kreise den durch die Evolute $\mathfrak{E}$ bestimmten Kegel K tangieren, so rollt auch die Ebene der logarithmischen Spirale auf diesem selben Kegel. Der Kegel K ist hierbei völlig willkürlich; hiernach ent-

steht die allgemeinste Fläche unserer Gattung *durch Bewegung einer logarithmischen Spirale, deren Ebene auf einem Kegel rollt, welcher denselben Scheitel wie die Spirale hat.* Sie gehört also zu der Klasse der Flächen, die zuerst von Monge untersucht worden sind und welche durch Bewegung einer ebenen Kurve entstehen, deren Ebene an einer abwickelbaren Fläche entlang rollt.*) Man nennt eine solche Monge'sche Fläche bekanntlich eine Gesimsfläche (surface moulure), wenn die Ebene auf einem Zylinder rollt; da die Bewegung hier an einem Kegel erfolgt, so kann man sie wohl als eine „konische Gesimsfläche" bezeichnen.

Längs einer der logarithmischen Spiralen $\mathfrak{S}$ unserer Fläche fällt offenbar die Flächennormale mit der Kurvennormale zusammen, weil ja jede dieser Spiralen durch eine Drehung um eine in der Kurvenebene liegende Achse in die nächstfolgende übergeht und die momentane Bewegung also senkrecht zur Ebene der Spirale erfolgt. Diese Tatsache setzt es in Evidenz, daß die Fläche die am Anfange gestellte Forderung erfüllt, und sie ergibt die weitere Folgerung, daß die Spiralen eine Schar von Krümmungslinien der Fläche bilden. Die zweite Schar der Krümmungslinien wird von den sphärischen Kurven $\theta = \text{const.}$ gebildet; da nämlich die Kugelnormalen längs einer solchen Kurve einen Kegel bilden und da aus diesen die Flächennormalen hervorgehen, indem man sie in ihren Normalebenen um den konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} - \gamma$ dreht, so müssen, nach einem allgemeinen Satze der Kurventheorie**), auch die letzteren einander schneiden, die Kurve muß also Krümmungslinie sein. Dasselbe Resultat kann auch für beide Arten von Krümmungslinien durch Anwendung des Satzes von Joachimsthal erhalten werden, nach welchem eine ebene oder sphärische Flächenkurve stets Krümmungslinie ist, wenn längs ihrer die Flächennormalen einen konstanten Winkel mit der Ebene, resp. mit der Kugel bilden.

3. Wir wollen jetzt noch die analytische Darstellung der allgemeinsten Flächen unserer Klasse herleiten und hierdurch die erhaltenen Resultate bestätigen. Da wir zu diesem Zwecke einige Eigenschaften der sphärischen Evolventen und Evoluten gebrauchen, so stelle ich im folgenden in Kürze die wichtigsten hierauf bezüglichen Sätze der Geometrie der Kugel zusammen.

Es sei eine Kurve auf der Einheitskugel gegeben durch die Gleichungen:

$$\alpha = \alpha(\sigma), \quad \beta = \beta(\sigma), \quad \gamma = \gamma(\sigma), \tag{7}$$

in welchen σ die Bogenlänge bedeuten soll, sodaß:

---

*) Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie, 5e édition, p. 322. Darboux, Leçons sur la Théorie générale des Surfaces, t. I, p. 103.

**) Vgl. Bianchi, Differentialgeometrie § 17.

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\quad \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,\quad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1$$

ist. Die Gleichung der geodätischen Normalen ist alsdann:

$$\xi\alpha'+\eta\beta'+\zeta\gamma'=0,$$

und wenn man also zwei konsekutive Normalen zum Schnitt bringt, so findet man für den sphärischen Krümmungsradius ω:

$$\text{(8)}\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \operatorname{ctg}\omega$$

und als Gleichungen der sphärischen Evolute:

$$\text{(9)}\qquad \begin{cases} \xi=\alpha\cos\omega+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\sin\omega, \\ \eta=\beta\cos\omega+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)\sin\omega. \\ \zeta=\gamma\cos\omega+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\sin\omega, \end{cases}$$

Das Bogenelement der sphärischen Evolute ist $d\omega$, bezeichnet man also die Bogenlänge derselben mit v, so ist wie bei ebenen Kurven

$$\text{(10)}\qquad v=\omega+a.$$

Geht man umgekehrt von der Evolute aus, deren Gleichungen, auf die Bogenlänge v bezogen, lauten mögen

$$\text{(11)}\qquad \xi=\xi(v),\quad \eta=\eta(v),\quad \zeta=\zeta(v),$$

so findet man leicht entweder direkt oder durch Umkehrung von (9) die Gleichungen der sphärischen Evolventen:

$$\text{(12)}\qquad \begin{cases} \alpha=\xi\cos(v-a)-\xi'\sin(v-a), \\ \beta=\eta\cos(v-a)-\eta'\sin(v-a), \\ \gamma=\zeta\cos(v-a)-\zeta'\sin(v-a), \end{cases}$$

in welchen den verschiedenen Werten von a die ganze Schar der Parallelkurven entspricht.

Bezeichnet man den sphärischen Krümmungsradius der Evolute (11) mit

$$\Omega=\Omega(v),$$

so ergibt die Differentiation der Gleichungen (12) nach v:

$$d\alpha=-\sin(v-a)(\xi+\xi'')\,dv=-\sin(v-a)\operatorname{ctg}\Omega\,(\eta\zeta'-\zeta\eta')\,dv$$

und zwei entsprechende Gleichungen; das Bogenelement der Kurve (12) ist somit

$$d\sigma=\sin(v-a)\operatorname{ctg}\Omega\,dv.$$

Zusatz. Diese Formeln genügen für unsere Entwicklungen vollständig, doch mögen, um den Zusammenhang mit den allgemeinen Begriffsbildungen der Infinitesimalgeometrie herzustellen, noch folgende Bemerkungen hinzugefügt werden, welche leicht zu bestätigen sind. Ist ω,

ebenso wie vorher, der sphärische Krümmungsradius der Kurve (7) und $d\sigma$ ihr Bogenelement, so ist $\varrho = \sin\omega$ der räumliche Krümmungsradius und $\tau = \frac{d\sigma}{d\omega}$ der räumliche Torsionsradius; diese beiden Größen sind also durch die für sphärische Kurven charakteristische Bedingung

$$\varrho^2 + \tau^2 \left(\frac{d\varrho}{d\sigma}\right)^2 = 1^{*)}$$

aneinander gebunden. Der räumliche Kontingenzwinkel, der auch der Winkel benachbarter geodätischer Normalen ist, ist hiernach $\frac{d\sigma}{\sin\omega}$; der Winkel benachbarter geodätischer Tangenten hingegen ist $d\sigma \operatorname{ctg}\omega$, also $\operatorname{ctg}\omega$ die geodätische Krümmung der Kurve, und der sphärische Exzeß des von zwei benachbarten geodätischen Normalen und dem Bogenelement $d\sigma$ gebildeten Dreiecks somit gleich $d\sigma \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$.

4. Es sei jetzt der in Nr. 2 erwähnte willkürliche Kegel K durch die Gleichungen (11) gegeben. Ersetzt man dann in (12) den Parameter a durch θ, so stellen die Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} x = r\cdot\alpha(\theta, v) = r(\xi\cos(\theta - v) + \xi'\sin(\theta - v)),\\ y = r\cdot\beta(\theta, v) = r(\eta\cos(\theta - v) + \eta'\sin(\theta - v)),\\ z = r\cdot\gamma(\theta, v) = r(\zeta\cos(\theta - v) + \zeta'\sin(\theta - v))\end{cases}$$

bei gegebenem θ und r und veränderlichem v die Bewegung eines festen Punktes einer Ebene dar, die auf dem Kegel K rollt, ohne zu gleiten.

Die Gleichungen (13) stellen bei konstantem r und veränderlichem θ und v eine Schar konzentrischer Kugeln, bei konstantem v und veränderlichem r und θ die Schar der Tangentialebenen des Kegels K, endlich bei konstantem θ und veränderlichem r und v die zu den sphärischen Parallelkurven (12) gehörigen Kegel dar, und diese drei Flächenscharen bilden ein orthogonales System. In der Tat ist, wenn man in den Funktionsbezeichnungen α, β, γ jetzt nur noch den Parameter θ zum Ausdruck bringt:

$$(14)\qquad \begin{cases} dx = dr\,\alpha(\theta) + r\,d\theta\cdot\alpha\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + r\sin(\theta - v)\operatorname{ctg}\Omega(\eta\zeta' - \zeta\eta')dv,\\ dy = dr\,\beta(\theta) + r\,d\theta\cdot\beta\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + r\sin(\theta - v)\operatorname{ctg}\Omega(\zeta\xi' - \xi\zeta')dv,\\ dz = dr\,\gamma(\theta) + r\,d\theta\cdot\gamma\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + r\sin(\theta - v)\operatorname{ctg}\Omega(\xi\eta' - \xi'\eta)dv,\end{cases}$$

also

$$(15)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta - v)\operatorname{ctg}^2\Omega\, dv^2.$$

Bestimmt man jetzt r irgendwie als Funktion von θ, so beschreibt die hierdurch gegebene Kurve der Tangentialebene des Kegels K bei der

---

*) Vgl. Bianchi, Differentialgeometrie, § 15 Ende.

Rollbewegung eine konische Gesimsfläche, für welche sie Krümmungskurve wird.

In dem besonderen Falle, den wir hier behandeln, ist r als Funktion von θ durch die Gleichung (6) bestimmt; es ist also

$$\frac{dr}{r} = d\theta \operatorname{ctg} h.$$

Hiernach ergeben sich die Richtungskosinus der Normale unserer Fläche aus den Gleichungen (14) in der Form:

$$X = \alpha\left(\theta + h + \frac{\pi}{2}\right), \quad Y = \beta\left(\theta + h + \frac{\pi}{2}\right), \quad Z = \gamma\left(\theta + h + \frac{\pi}{2}\right), \tag{16}$$

durch welche jetzt auch analytisch die geforderte Eigenschaft der Tangentialebenen der Fläche in Evidenz gesetzt wird, und die erste Fundamentalform lautet:

$$ds^2 = r^2\left(\frac{d\theta^2}{\sin^2 h} + \sin^2(\theta - v)\operatorname{ctg}^2\Omega\, dv^2\right). \tag{17}$$

Auch die zweite Fundamentalform läßt sich nunmehr mit Hilfe der Gleichungen (16) leicht berechnen und erhält, wenn ϱ den Krümmungsradius des Normalschnittes bedeutet, die Gestalt:

$$\frac{ds^2}{\varrho} = r\left(\frac{d\theta^2}{\sin h} - \operatorname{ctg}^2\Omega \sin(\theta - v)\cos(\theta + h - v)\, dv^2\right), \tag{18}$$

wobei, wie es sein muß, das mittlere Glied in Fortfall gekommen ist. Die Flächenkrümmung ist hiernach

$$k = \frac{\sin h \cos(v - \theta - h)}{r^2 \sin(v - \theta)}, \tag{19}$$

und die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 haben die Werte:

$$R_1 = \frac{r}{\sin h}, \quad R_2 = \frac{r \sin(v - \theta)}{\cos(v - \theta - h)}. \tag{20}$$

Berichtigung

zu dem Aufsatz von K. VonderMühll: Zum Andenken an Adolph Mayer. Math. Ann. Bd. 65, S. 431—432.

S. 431. Textzeile 10 v. o. lies 1857 statt 1859.

" " " 13 v. o. fehlt hinter 14. Dezember die Jahreszahl 1860.

Applicazioni della teoria dei gruppi continui alla geometria differenziale e alle equazioni di Lagrange.

Di

Guido Fubini a Genova.

È ben noto il problema, che Sophus Lie ha studiato nel terzo volume della sua «*Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen*», e a cui egli ha dato il nome di problema di Riemann-Helmholtz. Gli studii dedicati a questa questione si propongono di caratterizzare la metrica euclidea, e poche altre geometrie, partendo da alcune proprietà del corrispondente gruppo di movimenti; le quali si assumono come *postulati*, o, se si vuole, come *definizioni* per la geometria studiata.

A tale ordine di ricerche si riconnettono intimamente le questioni, di cui ci vogliamo qui occupare. Indicando con $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ funzioni di n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ finite e continue insieme a quelle loro derivate, che è necessario considerare, si assuma la forma differenziale quadratica

$$\sum_{i,k} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

come elemento lineare ds^2 *) di una geometria metrica. E si cerchino, tra le geometrie generali così definite, quelle geometrie, per cui esiste

---

*) Vale a dire, io, per definizione, assumo

$$ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

come uguale al quadrato della distanza dei punti

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \text{e} \quad (x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2, \cdots, x_n + dx_n).$$

La lunghezza di una linea qualunque sarà uguale poi all' integrale

$$\int \sqrt{\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k}$$

esteso alla linea stessa.

α) un gruppo continuo *di movimenti**), ossia un gruppo, le cui trasformazioni lasciano inalterate le lunghezze, e quindi anche gli angoli**), le geodetiche***), ecc.;

oppure

β) un gruppo continuo *conforme*, ossia un gruppo di trasformazioni *conformi* (che conservano gli angoli);

oppure

γ) un gruppo continuo *geodetico*, ossia un gruppo di trasformazioni *geodetiche* (che portano ogni geodetica in un' altra geodetica);

oppure

δ) un gruppo continuo, le cui trasformazioni portano ogni ipersfera†) in un' altra ipersfera.

Tra tutte le geometrie, per cui esiste un tal gruppo, ricorderò le ben note geometrie a curvatura costante (la geometria euclidea, e le cosidette geometrie non euclidee); per esse i gruppi corrispondenti hanno il massimo numero di parametri (cfr. più precisamente i §§ 2, 3, 4, 5).

Le precedenti ricerche, oltre che per le loro relazioni col problema di Riemann-Helmholtz, sono importanti sia da un punto di vista puramente geometrico, sia per le loro relazioni con altre parti dell' analisi.

---

*) Quale importanza abbia la natura del gruppo di movimenti nello studio di una particolare geometria, è ben noto fino dai primi rudimenti della comune geometria elementare (geometria euclidea). Così l'esistenza nel gruppo dei movimenti euclidei di un sottogruppo invariante di trasformazioni permutabili (traslazioni) è il fondamento della teoria delle rette *parallele* secondo Euclide. E così in modo analogo l'esistenza nel gruppo dei movimenti in una metrica ellittica a tre dimensioni di due sottogruppi invarianti e permutabili di scorrimenti è il fondamento della teoria delle rette parallele (secondo Clifford) in tale geometria: teoria, che ha tanti punti di contatto con la teoria delle parallele euclidee (cfr. la Memoria dell' Autore: Il parallelismo di Clifford (Annali della R. Scuola Norm. Superiore di Pisa, vol. 9, 1900)).

**) Si dice angolo delle due direzioni congiungenti il punti (x_i) rispettivamente al punto $(x_i + dx_i)$ e al punto $(x_i + \delta x_i)$ l'angolo Θ definito dalla:

$$\cos \Theta = \frac{\Sigma a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k}{\sqrt{\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k}\sqrt{\Sigma a_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k}}.$$

Quest' angolo non muta, se si moltiplicano tutte le a_{ik} per una stessa quantità.

***) Geodetica è, come è noto, ogni linea che annulla la prima variazione di

$$\int \sqrt{\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k}.$$

†) Ipersfera è ogni ipersuperficie, che taglia ortogonalmente le geodetiche uscenti da un punto O *(centro)*. I segmenti di geodetiche, compresi tra O e una ipersfera di centro O sono tutti uguali tra di loro. La loro lunghezza si suol chiamare il *raggio* dell' ipersfera.

Così, come la teoria della metrica di Bolyai è fondamentale per lo studio della funzioni fuchsiane, *molte altre classi di metriche, che ammettono un gruppo continuo di movimenti, sono importantissime per lo studio di altre classi di funzioni automorfe. La teoria dei gruppi continui proiettivi ha intimi legami con la teoria dei gruppi di movimenti;* e in particolare il celebre problema della determinazione di tutte le ipersuperficie di uno spazio lineare, che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni proiettive in sè stesse, *non è che un caso particolare* del problema della determinazione delle metriche, che ammettono un gruppo continuo di movimenti.*)

Le questioni precedenti hanno poi un intimo legame con lo studio, dal punto di vista di S. Lie, delle equazioni di Lagrange di un sistema olonomo con n gradi di libertà; tali legami appaiono evidenti appena si ricordi che la forza viva di un tale sistema è data dal rapporto di una forma del tipo (1) (quando con x_i si indichino le coordinate libere) al quadrato del differenziale del tempo.

Il presente lavoro vuol dare un rapido riassunto dei risultati finora ottenuti in questo ordine di ricerche. Dopo un paragrafo dedicato a formole preliminari, in altri quattro paragrafi si occupa delle questioni α), β), γ), δ) sopra citate; e nell' ultimo paragrafo si occupa delle applicazioni dei precedenti risultati alle equazioni di Lagrange.

§ 1.

Formole preliminari.

Sia (1) l' elemento lineare ds^2 di una metrica. Se questa è reale, la forma (1) sarà una forma definita positiva. Molte delle seguenti considerazioni valgono però indipendentemente da questa ipotesi, e richiedono soltanto che (1) non sia degenere. Sia A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel discriminante $|a_{ik}|$ della (1); seguendo le notazioni adottate dal Prof. Bianchi, con

$$(2)\qquad \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} A_{lr}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right) \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

e con

$$(3)\qquad \{ih, kl\} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix}}{\partial x_l} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,l \\ h \end{Bmatrix}}{\partial x_k} + \sum_r \left(\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,l \\ h \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,l \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,k \\ h \end{Bmatrix}\right)$$

$$(i, h, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

*) Per tutti questi rapporti cfr. la mia *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe* (Pisa, Spoerri, 1908) (§§ 7, 8, 9, 15, 16, 20, 21, 25).

indichiamo i noti simboli di Christoffel e di Riemann di seconda specie. Le equazioni delle geodetiche saranno

$$(4)\qquad \frac{d^2x_i}{ds^2}+\sum_{r,t}\begin{Bmatrix} r\,t \\ i \end{Bmatrix}\frac{dx_r\,dx_t}{ds^2}=0 \qquad (r,t,i=1,2,\ldots,n).$$

Indichiamo con

$$X=\sum_{r=1}^{n}\xi_r\frac{\partial}{\partial x_r}$$

una trasformazione infinitesima di Lie sulle variabili x. Le ξ_i siano funzioni finite e continue delle x, insieme a tutte quelle loro derivate che ci occorreranno. Sia ε un parametro infinitesimo, di cui trascureremo le seconde potenze. La X porterà x_i in $x_i+\varepsilon\xi_i$ e quindi porterà la forma (1) nella forma

$$\sum_{i,k}a_{ik}(x_1+\varepsilon\xi_1,\ldots,x_n+\varepsilon\xi_n)\,d(x_i+\varepsilon\xi_i)\,d(x_k+\varepsilon\xi_k)$$

$$=\sum_{i,k}\Big[a_{ik}(x)+\varepsilon\sum_r\xi_r\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\Big]\Big(dx_i+\varepsilon\sum_r\frac{\partial\xi_i}{\partial x_r}dx_r\Big)\Big(dx_k+\varepsilon\sum_r\frac{\partial\xi_k}{\partial x_r}dx_r\Big)$$

$$=\sum_{i,k}(a_{ik}+\varepsilon a'_{ik})\,dx_i\,dx_k,$$

dove si è posto.*)

$$(6)\qquad a'_{ik}=\sum_r\Big(\xi_r\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}+a_{ir}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_k}+a_{kr}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_i}\Big)\cdot$$

Indicheremo con $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}+\varepsilon\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}'$ e con $\{ih,kl\}+\varepsilon\{ih,kl\}'$ i simboli di Christoffel e di Riemann per l' elemento lineare trasformato

$$(7)\qquad \sum_{ik}(a_{ik}+\varepsilon a'_{ik})\,dx_i\,dx_k.$$

Si trova**)

$$(8)\qquad \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}'=\frac{\partial^2\xi_l}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_r\Big[\xi_r\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} i\,r \\ l \end{Bmatrix}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_k}+\begin{Bmatrix} k\,r \\ l \end{Bmatrix}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_i}-\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_r}\Big],$$

$$(9)\qquad \{ih,kl\}'=$$

$$=\sum_r\Big(\xi_r\frac{\partial}{\partial x_r}\{ih,kl\}-\{ir,kl\}\frac{\partial\xi_h}{\partial x_r}+\{rh,kl\}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_i}+\{ih,rl\}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_k}+\{ih,kr\}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_l}\Big)$$

$$(i,h,k,l,r=1,2,\ldots,n).$$

---

*) Questa formola è dovuta al Killing.

**) Le formole seguenti, insieme a molte altre formole analoghe, sono state date dall' Autore nella sua Memoria: Sui gruppi di trasformazioni geodetiche (Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, Serie 2, Tomo 53; 1903).

La condizione, affinchè il gruppo G_1 generato dalla X sia un gruppo di movimenti per la metrica definita da (1), è evidentemente quella che le forme (1), (7) coincidano, ossia che:

$$\text{(I)} \qquad a'_{ik} = \sum_r \left(\xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ir}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} + a_{kr}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n.)$$

Affinchè invece G_1 sia un gruppo di trasformazioni conformi, devono essere uguali angoli corrispondenti nelle metriche definite dalle (1), (7). Le forme (1), (7) devono essere, perciò proporzionali, ossia deve esistere una funzione H delle x, tale che

$$\text{(II)} \qquad a'_{ik} = H a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Affinchè G_1 conservi le geodetiche per la nostra metrica, essa deve mutare ogni linea che soddisfi alle (6) in un' altra linea che soddisfi ancora alle (6). Ciò che avviene allora e allora soltanto*) che:

$$\text{(III)} \qquad 2\begin{Bmatrix} i\,k \\ i \end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix} k\,k \\ k \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix}' = 0 \qquad (i \neq k,\ l \neq k;\ i, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Dalle (I) segue evidentemente:

$$\text{(I')} \qquad \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}' = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Le (I') dimostrano, confrontate con le (III), il fatto evidente che un gruppo di movimenti porta ogni geodetica in un' altra geodetica.

Scrivendo le condizioni di integrabilità delle (III), si trova

$$\text{(III')} \begin{cases} \{ih, kl\}' = 0 & (h \neq i,\ h \neq k,\ h \neq l;\ i, h, k, l = 1, 2, \ldots, n), \\ \{ii, kl\}' - \{hh, kl\}' = 0 & (i \neq k,\ i \neq l,\ h \neq k,\ h \neq l;\ i, h, k, l = 1, 2, \ldots, n), \\ \{ki, li\}' - \{kh, lh\}' = 0 & (k \neq i,\ l \neq i,\ k \neq h,\ l \neq h;\ i, h, k, l = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

§ 2.

I gruppi di movimenti.

Le (I) sono le equazioni fondamentali della teoria dei gruppi di movimenti; le (I'), che ne seguono, permettono, in virtù delle (8), di esprimere le derivate seconde delle ξ in funzione lineare delle ξ, e delle loro derivate prime. Questa osservazione, insieme alle (I), dimostra che il movimento infinitesimo più generale per l' elemento lineare (1) contiene *al massimo* $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri. E un facile calcolo dimostra che questo numero massimo è raggiunto *allora e allora soltanto che* (1) *è a curvatura costante.*

---

*) Cfr. la Memoria sui gruppi di trasformazioni geodetiche citata or ora.

Per trovare tutte le altre metriche, che posseggono un gruppo continuo di movimenti, il metodo che seguiremo è di ricercare dapprima i possibili gruppi di movimenti, e di studiare poi gli spazii corrispondenti. Il risultato, che è a base di tutto lo studio è il seguente*):

Teorema A. *Se un gruppo di movimenti su n variabili ammette delle varietà minime invarianti a $m < n$ dimensioni, allora, con un cambiamento di variabili, si può trasformare il nostro gruppo in un gruppo transitivo su sole m variabili.*

La ricerca resta così limitata ai soli gruppi transitivi. E si trova che:

Teorema B. *Sia G un gruppo transitivo su n variabili x, che per un momento considereremo come coordinate cartesiane in uno spazio euclideo rappresentativo S. Condizione necessaria e sufficiente, affinchè G possa essere gruppo di movimenti in una qualche metrica è che, se A è un punto generico di S, esista un sistema di elissoidi omotetici col centro in A, tali che ogni punto B infinitamente vicino ad A debba per ogni trasformazione di G essere portato in un punto appartenente ancora allo stesso elissoide, che passa per B.* (E si noti che, se questa condizione è soddisfatta in un punto A, essa è soddisfatta in ogni altro punto).

Questo teorema si può anche enunciare così, quando si assume il punto A come origine (come punto $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$):

Teorema B'. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo transitivo G su n lettere si possa considerare come gruppo di movimenti, è che le variabili indipendenti si possano scegliere in guisa che le trasformazioni infinitesime di G siano tutte del tipo:*

$$\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,k} \beta_{ik}\, x_i \frac{\partial}{\partial x_k} + \cdots,$$

$$(\alpha_i, \beta_{ik} = \text{cost};\ \beta_{ik} + \beta_{ki} = 0;\ i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

*dove i termini trascurati sono infinitesimi per $x_i = 0$ del secondo ordine almeno.***)

Dai Teoremi A, B e dai risultati dei Kap. 27 e 29 del citato libro di Lie ed Engel segue

Teorema C. *Tutti gli spazii, che ammettono un gruppo continuo di movimenti, e i corrispondenti gruppi si possono determinare con quadrature.*

---

*) I teoremi, qui sotto enunciati, furono dimostrati dall' Autore nella sua Memoria: Sugli spazii, che ammettono un gruppo continuo di movimenti (Annali di Matematica, 1902; Serie 3, Tomo 8, pag. 39 e seg.).

**) Di questo teorema fece applicazioni notevoli e importanti per la ricerca e la classificazione dei possibili gruppi di movimenti il Dott. Siro Medici nella sua Tesi: Sui gruppi di rotazioni (Ann. della R. Scuola Norm. Super. di Pisa; vol. 10; 1900).

. Applicazioni particolari di questo teorema, oltre che nel citato lavoro del Dott. Medici, si troveranno nella Memoria citata dell' Autore e in un altra, che le è complemento, relativa agli spazii a quattro dimensioni (nel Tomo 9, Serie 3, degli Ann. di Matem.).

Ricorderò ancora che dal Teorema B segue subito il teorema del Prof. Bianchi:*)

Ogni gruppo semplicemente transitivo si può considerare come gruppo di movimenti.

§ 3.

I gruppi conformi.

Le formole che servono di base alla teoria dei gruppi conformi sono le (II) del § 1. Anche per i gruppi conformi vale il Teorema A, che nel § 2 abbiamo dato per i gruppi di movimenti.**) E si possono dimostrare per i gruppi conformi anche altri teoremi, di cui ricorderò qui qualcuno:

Un gruppo intransitivo di trasformazioni conformi in uno spazio S si può considerare come gruppo di movimenti in un altro spazio S.

Due trasformazioni conformi infinitesime in uno spazio a più che due dimensioni non possono avere le stesse traiettorie.

Si può anche dimostrare un teorema affatto analogo al Teorema B del § 2 per i gruppi di movimenti, e che noi enuncieremo addirittura nella forma seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo G (che, per il Teorema A, noi possiamo supporre senz' altro transitivo) *si possa considerare come gruppo conforme in una qualche metrica è che si possano scegliere le variabili coordinate x in guisa che ogni trasformazione infinitesima di G sia del tipo:*

$$\sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \beta_{ik} x_i \frac{\partial}{\partial x_k} + \gamma \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots\cdots$$
$$(\alpha_i, \beta_{ik}, \gamma = \text{cost}; \ \beta_{ik} + \beta_{ki} = 0; \ i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

---

*) Il seguente teorema è stato enunciato dal Prof. Bianchi nella sua Memoria: Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. (Mem. della Società Italiana delle scienze, 1897). In questo lavoro si pone e si risolve completamente il problema della determinazione di tutti gli spazii a tre dimensioni, che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Al lavoro del Prof. Bianchi seguì una pregevole memoria del Cotton negli Ann. de l' École Norm. Supérieure, e un lavoro del Prof. Ricci nelle Mem. della Società Italiana delle Scienze (1899), in cui le varietà del Prof. Bianchi sono caratterizzate invariantivamente.

**) La dimostrazione di questo teorema, e dei seguenti si trova nella Nota dell' Autore: Sulla teoria degli spazii, che ammettono un gruppo conforme (Atti della R. Accad. di Torino, Vol. 38; 1903). Nuove dimostrazioni, insieme a un importante complemento, a cui accenneremo più tardi, sono contenute nella Nota del Dr. Siro Medici: Sui gruppi conformi (Rend. del, Circ. Matem. di Palermo, Tomo 26, 1908).

dove i termini trascurati sono infinitesimi almeno del secondo ordine per $x_i = 0$.

Si dimostrano poi i seguenti due lemmi:

Se il gruppo G *contiene anche una sola trasformazione infinitesima, per cui sono nulle le costanti* α, β, γ, *o anche soltanto le costanti* α, β, *allora ogni spazio, che ammette* G *come gruppo conforme è rappresentabile conformemente sullo spazio euclideo, ed ammette quindi come gruppo conforme il gruppo a* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *parametri delle inversioni per raggi vettori reciproci di questo spazio. In ogni altro caso* G *ha meno di* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *parametri.*

Se per ogni trasformazione infinitesima di G *il coefficiente* γ *è nullo, ossia* (§ 2, Teor. B) *se* G *si può considerare come gruppo di movimenti, ogni spazio, che ammette* G *come gruppo conforme è rappresentabile conformemente su uno spazio che ammette* G *come gruppo di movimenti.*

Valendomi di questi lemmi, io ho dimostrato il seguente teorema, che esaurisce la nostra ricerca per gli spazii a tre dimensioni:

Uno spazio a tre dimensioni, che ammetta un gruppo G *di trasformazioni conformi è conformemente rappresentabile o sullo spazio euclideo, o su un altro spazio che ammette* G *come gruppo di movimenti.*

Questo teorema, che esaurisce la ricerca degli spazii a tre dimensioni, che ammettono un gruppo conforme G, è stato generalizzato dal Dott. Siro Medici (loc. cit.) agli spazii a un numero qualsiasi di dimensioni.

§ 4.

I gruppi che conservano il sistema delle ipersfere.

Noi cercheremo qui tutte le metriche (1), per cui esiste un gruppo continuo che porta le ipersfere in ipersfere. La difficoltà di questa ricerca sta in ciò che delle ipersfere non si posseggono neanche equazioni differenziali. Si deve perciò ricorrere a un metodo indiretto.

Considereremo cioè lo spazio come luogo delle sue ipersfere, assumendo come coordinate di una ipersfera le coordinate $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ del suo centro, e il suo raggio x_{n+1}. Una trasformazione infinitesima di contatto nello spazio ambiente, che porti ipersfere in ipersfere, darà origine a una trasformazione infinitesima

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \xi_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \tag{10}$$

sulle coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ di una ipersfera. Noi ci proponiamo ora di trovare le condizioni, affinchè la trasformazione (10) delle ipersfere

corrisponda proprio a una trasformazione di contatto dello spazio ambiente. Si trova che:*)

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè la trasformazione infinitesima (10) sulle ipersfere della metrica (1) sia indotta proprio da una trasformazione di contatto dello spazio ambiente, è che la (10) sia una trasformazione conforme per la metrica (non reale), che si definisce, assumendo come elemento lineare la forma

$$\sum_{i,k}^{1\dots n} a_{ik}\, dx_i dx_k - dx^2_{n+1}. \tag{11}$$

Se di più per $x_{n+1} = 0$ *si ha* $\xi_{n+1} = 0$, *la (10) è indotta sulle ipersfere proprio da una trasformazione di punti nello spazio ambiente.*

Questo teorema riduce la ricerca delle metriche (1), per cui esiste un gruppo, che ne trasforma le ipersfere in ipersfere, alla ricerca delle metriche (11), che ammettono un gruppo conforme, e quindi sostanzialmente ai problemi, che noi abbiamo studiato al § 3.

§ 5.

I gruppi di trasformazioni geodetiche.

Ci limiteremo nel § 5 allo studio degli spazii a tre dimensioni, che ammettono un gruppo continuo, che trasforma in sè stesso il sistema delle geodetiche.**) Per il caso degli spazii a $n > 3$ dimensioni i metodi da seguire sono completamente analoghi.***)

---

*) La dimostrazione di questo teorema, e di alcuni suoi corollarii si trova nella Nota dell' Autore: Sulla teoria delle ipersfere e dei gruppi conformi in una metrica qualunque (Rend. dell' Istituto Lombardo 1904). In una memoria di prossima pubblicazione negli Annali di Matematica io ho anzi dimostrato:

1°) *Se tra le due metriche definite dagli elementi lineari*

$$\Sigma a_{ik}\, dx_i dx_k, \quad \Sigma b_{ik}\, dy_i dy_k \tag{α}$$

esiste una corrispondenza, che a ipersfere fa corrispondere ipersfere, allora tra le metriche definite dagli elementi lineari

$$\Sigma a_{ik}\, dx_i dx_k - dx^2_{n+1},$$

$$\Sigma b_{ik}\, dy_i dy_k - dy^2_{n+1},$$

esiste una corrispondenza conforme. E viceversa.

2°) *Se* $n = 2$, *allora, nella precedente ipotesi, gli elementi lineari* (α), *o sono simili, o sono entrambi a curvatura costante.*

**) Le dimostrazioni dei seguenti teoremi, e di alcuni altri relativi ai gruppi di similitudini (che sono tutti geodetici) si trovano nella Memoria dell' Autore: Sui gruppi di trasformazioni geodetiche (Mem. della R. Accad. di Torino, Ser. 2, Tomo 53; 1903).

***) Cfr. loc cit. Vi si troverà pure qualche cenno pel caso di $n = 2$.

Si comincia con l'osservazione, che i gruppi di movimenti e di similitudini trasformano evidentemente le geodetiche in geodetiche. Da tali gruppi si può nello studio attuale prescindere, perchè la loro teoria rientra completamente nella teoria di quei gruppi, a cui sono dedicati i §§ 2—3. Basta dunque solamente ricercare tutti gli spazii, che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni geodetiche, non ridotto a pure similitudini. Per un teorema del Prof. Levi-Civita*), l'elemento lineare di un tale spazio dovrà essere dell' uno o dell'altro dei seguenti due tipi:

$$(12)\qquad ds^2 = (U_1 - U_2)(U_1 - U_3)\,dx_1^2 + (U_2 - U_1)(U_2 - U_3)\,dx_2^2 + (U_3 - U_1)(U_3 - U_2)\,dx_3^2.$$

$$(13)\qquad ds^2 = (U_1 - \alpha)(dx_1^2 - 2\lambda\,dx_2\,dx_3)^{**})$$

dove U_i è funzione di x_i, α è costante, λ è funzione di x_2, x_3.

Studiamo dapprima l'elemento lineare (12). Scrivendo per esso le equazioni (III)' del § 1, si trova facilmente che, o

$$\{12, 12\} - \{13, 13\} = \{23, 23\} - \{21, 21\} = \{31, 31\} - \{32, 32\} = 0,$$

oppure

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = 0.$$

Nel primo caso lo spazio è a *curvatura costante. Escluso dunque il caso banale e ben noto degli spazii a curvatura costante, potremo concluderne che* ξ_i *è funzione della sola* x_i $(i = 1\ 2,\ 3)$. *Altrettanto si dimostra per gli spazii* (13)***). La ricerca resta da questo fatto semplificata di gran

---

*) Il Prof. Levi-Civita in una sua Memoria (Sulla trasformazione delle equazioni dinamiche, Ann. di Matematica, 1896) estese agli spazii a $n > 2$ dimensioni i classici risultati del Prof. Dini sulle superficie, che si corrispondono in guisa che le geodetiche dell' una siano immagine delle geodetiche dell' altra. Dai suoi risultati segue in particolare che per $n = 3$ due spazii, che siano in tale corrispondenza, hanno elementi lineari che, con opportuna trasformazione di variabili, si possono entrambi ridurre o al tipo (12), o al tipo (13). Da ciò si deduce facilmente l'asserzione del testo, quando si pensi che nel nostro caso le metriche definite dall' elemento lineare

$$\Sigma a_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

e dall' elemento lineare trasformato

$$\Sigma(a_{ik} + \varepsilon a'_{ik})\,dx_i\,dx_k$$

sono appunto in una corrispondenza, che conserva le geodetiche. Cfr. anche la seconda delle osservazioni seguenti a piè di pagina.

**) Le linee coordinate x_2, x_3 debbono essere immaginarie coniugate, se si vuole che (13) sia l'elemento lineare di una metrica reale.

***) Questo risultato diventa intuitivo, quando si ricordino alcuni teoremi, enunciati dall' Autore in due Note: Sulle coppie di varietà geodeticamente applicabili (Rend.

lunga. Ricordando infatti che ξ_i è funzione della sola x_i, si deduce facilmente, o direttamente, o partendo dai risultati del Levi-Civita, che le (III) sono equivalenti per gli spazii (12) alle seguenti equazioni $(\mathrm{III})_1$, e per gli spazii (13) alle seguenti equazioni $(\mathrm{III})_2$:

$$(\mathrm{III})_1 \left\{ \begin{array}{l} \xi_i = \frac{1}{2}(p-2\varepsilon)x_i + \frac{1}{2}\lambda_i; \quad \frac{1}{2}[(p-2\varepsilon)x_i+\lambda_i]\, U_i' = q\,U_i^2 + \varepsilon\, U_i + \eta \\ \hfill (i=1,\,2,\,3) \\ \left(\begin{array}{c}\text{dove } p,\ \varepsilon,\ \lambda_i,\ q,\ \eta \text{ sono costanti arbitrarie, che possono però} \\ \text{variare dall'una all'altra trasformazione geodetica}\end{array}\right); \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{III})_2 \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \frac{U_1'}{u_1 - a} - (U_1 + 2a) = k; \quad \xi_2 \frac{\partial \log \lambda}{\partial x^2} + \xi_3 \frac{\partial \log \lambda}{\partial x^3} + \xi_2' + \xi_3' = k \\ \left(\begin{array}{c}\text{dove } k \text{ è una costante arbitraria, che può però} \\ \text{variare dall'una all'altra trasformazione geodetica.}\end{array}\right). \end{array}\right.$$

L'integrazione delle $(\mathrm{III})_1$, $(\mathrm{III})_2$, che si compie con metodo affatto elementare, permette di trovare gli spazii (12) e (13) cercati, e i gruppi corrispondenti.

§ 6.

Applicazioni alle equazioni della dinamica.

Sia Σ un sistema olonomo con n coordinate libere $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La sua forza viva sia $\frac{ds^2}{dt^2}$, dove t indica il tempo, e ds^2 è una forma diffe-

---

della R. Accad. dei Lincei, 18 Giugno e 17 Sett. 1905). In queste Note l'Autore vuole determinare tutte le varietà geodeticamente applicabili su una varietà data. Nella prima Nota sono caratterizzate invariantivamente le varietà (12) e (13); e si dimostra che *(esclusi gli spazii a curvatura costante) esiste in un tale spazio un solo sistema triplo di superficie, che, assunto come sistema di linee coordinate, fa assumere all'elemento lineare la forma* (12) *o* (13) *di Levi-Civita.* Per gli spazii a curvatura costante invece ogni sistema triplo di *quadriche confocali* gode già di tale proprietà. Ma nel nostro caso (cfr. la penultima osservazione a piè di pagina) per i risultati del Prof. Levi-Civita, la trasformazione (5) deve portare il sistema coordinato in un nuovo sistema triplo di superficie tale che, se noi assumiamo come superficie coordinate questo nuovo sistema di superficie, l'elemento lineare resta ancora del tipo (12) o (13). *Se dunque escludiamo il caso degli spazii a curvatura costante, la* (5) *deve trasformare in sè stesso il sistema delle superficie coordinate; e quindi* ξ_i *deve essere funzione della sola* x_i.

Nella seconda delle due note citate questi teoremi sono parzialmente estesi al caso di spazii ad $n > 3$ dimensioni. Per il caso di $n = 2$ cfr. la nota del Königs nel Tomo 4 della *Théorie des Surfaces* del Darboux.

renziale quadratica positiva nelle x. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ le forze impresse. Si indicherà con *problema* (ds^2, X_i) il sistema corrispondente di equazioni di Lagrange.

La questione fondamentale, che ci possiamo proporre, è la seguente: *Trovare tutti i problemi* (ds^2, X_i), *per cui esiste un gruppo continuo di trasformazioni sulle* x, *il quale porti ogni traiettoria del problema in un'altra traiettoria.*

Questa questione, nel caso che $X_i = 0\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, si riduce a quella studiata nel § 5.

La precedente questione non è stata finora risoluta in generale. Io sono riuscito a risolverla, soltanto se $n = 2$.*) Questo risultato è però troppo particolare, perchè io qui lo riproduca.

Una seconda questione, che ci possiamo porre e che ha una grande importanza per lo studio delle applicazioni dei metodi di Lie alle equazioni della dinamica è quella di ricercare tutti i problemi dinamici (ds^2, X_i), per cui esiste un gruppo continuo, che trasforma in sè stesse le corrispondenti equazioni di Lagrange.**) Il risultato, che si ottiene, è il seguente:

La determinazione di tutti questi problemi dinamici è perfettamente equivalente alla ricerca delle metriche, che ammettono un gruppo continuo di movimenti o di similitudini, e si può quindi eseguire con sole quadrature (§§ 2—3).

Infine possiamo ancora occuparci di un' altra questione, che è molto affine alla prima delle questioni citate in questo paragrafo, e che fu già oggetto di studio da parte dei Sigi Stäckel, R. Liouville, Painlevé nei Comptes Rendus (1890—1895) e nei Leipziger Berichte (1893—1897). Un problema dinamico (ds^2, X_i), in cui le forze impresse derivano da un potenziale U, ossia un problema (ds^2, X_i), per cui $X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ si indicherà anche col simbolo (ds^2, U). Le traiettorie di un tale problema, che corri-

*) Cfr. la Nota dell' Autore: Sulle traiettorie di un problema dinamico (Rend. del Circ. Matematico di Palermo, Tomo 18; 1904). In questa nota viene anche risoluta per ogni valore di n la questione di determinare tutti i problemi dinamici (ds^2, X_i) per i quali esiste un gruppo, che trasforma ogni sua traiettoria in un' altra traiettoria, e trasforma insieme ogni geodetica per l'elemento lineare ds^2 in un' altra geodetica per lo stesso elemento lineare.

**) I teoremi, di cui ci occuperemo in quest' ultima parte del § 6, sono dimostrati in tre Note dell' Autore: Ricerche gruppali sulle equazioni della dinamica (*Rendiconti della R. Acc. dei Lincei,* 21 Giugno, 19 Luglio, 16 Agosto 1903).

spondono a uno stesso valore per la costante dell'integrale delle forze vivi, si diranno costituire un *fascio di traiettorie*.

La questione, che ci si può proporre, è quella di trovare *tutti i problemi dinamici* (ds^2, U), *per cui esiste un gruppo continuo, che trasforma ogni fascio di traiettorie in un altro fascio di traiettorie.*

La ricerca di quelli tra questi problemi, per cui $U = \text{cost.}$, equivale completamente alla ricerca, di cui trattammo al § 5. Possiamo dunque non occuparcene, e supporre $U \neq \text{cost.}$

In questo caso si dimostra:

Il più generale problema, per cui esiste una trasformazione infinitesima X, *che muta ogni fascio di traiettorie in un altro fascio di traiettorie, è il problema* $\left([\alpha U + \beta] ds^2, \frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta}\right)$, *dove* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sono costanti,* ds^2 *ammette* X *come similitudine infinitesima, e le varietà* $U = \text{cost.}$ *sono trasformate imprimitivamente con una trasformazione lineare intera da qualsiasi trasformazione del gruppo generato da* X.

Se ne deduce:

*La questione proposta è caso particolare di quelle, di cui ci occupammo ai §§ 1—2, e si può risolvere con sole quadrature.**)

Nella seconda delle due note citate si trova come esempio sviluppato il caso di $n = 3$.

---

*) Più precisamente la nostra ricerca equivale alla ricerca dei problemi (ds^2, U), dove

$$U = x_1, \quad ds^2 = a_{11}\, dx_1^2 + \sum_{i,k}^{2\cdots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

per cui esistono una o più trasformazioni infinitesime del tipo

$$X = (\lambda + \mu x_1 + \nu x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} \xi_i (x_2, x_3, \cdots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

(λ, μ, ν = costanti, anche variabili da trasformazione a trasformazione), per cui valgano equazioni del tipo:

$$a'_{ik} = (-\nu x_1 + \sigma)\, a_{ik} \quad (\sigma = \text{cost.}) \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n),$$

dove le a'_{ik} sono definite dalle (6) del § 1. Evidentemente queste equazioni non sono che un caso particolare delle (II) del § 1.

Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.*)

Von

E. Hilb in Erlangen.

Herr Klein behandelte in seinen Vorlesungen**) über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Jahren 1890—91 und 1893—94 die Frage, inwieweit man nach Vorgabe der als reell angenommenen singulären Punkte und der dazu gehörigen Exponenten über die noch zur Verfügung stehenden Parameter dergestalt verfügen kann, daß das Kreisbogenpolygon, auf welches die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene durch den Quotienten zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung abgebildet wird, vorgegebene Eigenschaften besitzt.

Die allgemeinen hier einschlägigen Problemstellungen sind von Herrn Klein in einem im Herbste 1891 zu Borkum verfaßten Manuskripte, von dem ich Kenntnis genommen habe, das aber nicht veröffentlicht wurde, niedergelegt.

Herr Klein versuchte nun in den oben erwähnten Vorlesungen und mehreren damals veröffentlichten Noten***) diese Probleme mit den von ihm sogenannten Oszillationstheoremen in Verbindung zu bringen, wobei es ihm jedoch zunächst nicht gelang, im allgemeinen Falle durchzudringen. Angeregt durch Untersuchungen von Herrn Hilbert, welcher im Verfolge seiner Arbeiten über Integralgleichungen zu einem höchst einfachen Prinzipe gekommen war, das gestattet, Oszillationstheoreme auch auf solche Intervalle auszudehnen, die sich über singuläre Punkte hinüberziehen, hat

*) Vgl. eine vorläufige Mitteilung in den Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, 1908.

**) Autographierte Vorlesungshefte; es sind jedoch nur die Vorlesungen von 1893—1894 im Buchhandel erschienen.

***) z. B. Klein, Zur Theorie der Laméschen Funktionen. Göttinger Nachrichten 1890.

Herr Klein diese Untersuchungen etwa im Jahre 1906 wieder aufgenommen und in der für das Folgende grundlegenden Arbeit*): „Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ nach verschiedenen Richtungen gefördert. Er nimmt dabei zunächst allerdings nur einen Spezialfall in Angriff, der aber von entscheidender Bedeutung ist; es gelingt ihm dabei, das Problem auf eine einfache Oszillationsforderung zurückzuführen. Der wesentliche innere Fortschritt dieser Arbeit liegt in der scharfen *analytischen* Formulierung der schon in oben erwähnten Arbeiten ausgesprochenen geometrischen Ideen.

Bei seinem Aufenthalte in Erlangen im April 1907 (gelegentlich des 70-jährigen Geburtstages von Gordan) machte mich Herr Klein mit diesen seinen Untersuchungen bekannt und wünschte einen Beweis für die in der gerade erwähnten Annalenarbeit ausgesprochenen Behauptungen. Dieser Beweis ergibt sich nun, wie ich fand, mit größter Leichtigkeit durch elementare Stetigkeitsbetrachtungen, die ganz analog den bei der Lehre von den reellen Wurzeln reeller algebraischer Gleichungen benutzten sind. Mit derselben Leichtigkeit gelingt es aber auch, die sämtlichen von Herrn Klein von Anfang an in Aussicht gestellten Probleme zu erledigen, welche, wie oben schon erwähnt wurde, darauf ausgehen, den Zusammenhang zwischen den Bestimmungsstücken des Kreisbogenpolygons und den noch zur Verfügung stehenden Parametern der Differentialgleichung festzulegen. *Irgend welche höhere Prinzipien sind also für die Beweise nicht notwendig; die Form der angewandten Stetigkeitsbetrachtungen ist sogar in gewisser Hinsicht noch einfacher als in den ersten auf das Oszillationstheorem bezüglichen Untersuchungen von Herrn Klein* (Math. Ann. Bd. 18, 1881).

In der folgenden Arbeit beschränke ich mich, dem von Herrn Klein in seiner genannten Annalenarbeit gegebenen Beispiele folgend, auf eine lineare Differentialgleichung mit vier reellen singulären Punkten.

Es seien also $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegebene reelle Größen und zwar sei:

$$0<\alpha<1, \quad 0<\beta<1, \quad 0<\gamma<1, \quad 0<\delta<1; \tag{1}$$

ferner:

$$a>b>c. \tag{2}$$

Wir betrachten dann die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-\alpha}{x-a}+\frac{1-\beta}{x-b}+\frac{1-\gamma}{x-c}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,y=0, \tag{3}$$

welche die vier singulären Stellen $a, b, c, d=\infty$ besitzt. Es gehören dabei zu diesen singulären Stellen die Exponentenpaare, $\alpha, 0$; $\beta, 0$; $\gamma, 0$; δ', δ''; dabei ist:

*) Mathematische Annalen, Band 64 (1907).

(4a) $$\alpha + \beta + \gamma + \delta' + \delta'' = 2,$$

(4b) $$\delta'\delta'' = A,$$

(4c) $$\delta' - \delta'' = \delta.$$

Die Ausschließung von 0 in den Ungleichungen (1), wodurch das Auftreten logarithmischer Glieder verhindert wird, geschieht nur der Bequemlichkeit halber, um die Untersuchung von Spezialfällen zu vermeiden; ebenso geschieht die Beschränkung auf vier reguläre Punkte nur deshalb, um zunächst einen einfachen, konkreten Fall zu haben; die Untersuchung bei n singulären Punkten erledigt sich hinterher mit derselben Leichtigkeit.

Dagegen geschieht der Ausschluß der Werte α, β, γ, δ, die größer als 1 sind, aus inneren Gründen, da sonst die Eindeutigkeitstheoreme bei den Oszillationsbetrachtungen verloren gehen; immerhin lassen sich auch in diesem ausgeschlossenen Falle eine große Anzahl bemerkenswerter Aussagen machen, auf die an anderer Stelle als in dieser Arbeit zurückzukommen ist. Ebenso bleibt noch der Fall komplexer singulärer Punkte der Differentialgleichung, der komplexer Werte für die dazugehörigen Exponenten und der komplexer Parameter zu erledigen.

Es erscheint als ungemein wahrscheinlich, daß der weitere Ausbau der von Herrn Klein in der erwähnten Annalenarbeit niedergelegten Ideen vermittels der im folgenden durchgeführten Kontinuitäts-Methode genau entsprechend den ursprünglichen Zielen von Herrn Klein dazu führen wird, allgemeine Sätze zu gewinnen, in denen alle die von den Herren Klein und Poincaré ausgesprochenen Grundtheoreme der automorphen Funktionen als Spezialfälle enthalten sind. Dies wird für den vorliegenden Fall ausführlicher am Schlusse des § 7 erläutert werden.

Zum Schlusse dieser einleitenden Bemerkungen möchte ich nur noch hervorheben, daß ich mich während der ganzen Zeit, in der ich an den hier folgenden Ausführungen arbeitete, fortwährend mit Herrn Klein in lebhafter Korrespondenz befand. Ich werde im folgenden daher sehr oft Herrn Klein anzuführen haben, was durch Beifügung des Buchstabens (K) geschehen möge.

§ 1.

Die Maßzahlen eines Kreisbogenviereckes.

Unter einem Kreisbogenpolygon verstehen wir im folgenden eine von Kreisbogen begrenzte, einfach zusammenhängende, ebene oder sphärische Fläche, die im Inneren keinen Verzweigungspunkt besitzt. Dagegen können in den Ecken Verzweigungspunkte auftreten, d. h. die Winkel, die je zwei aufeinander folgende Polygonseiten einschließen, können $> 2\pi$ sein, auch dürfen sich die Polygonseiten beliebig oft überschlagen. Es war nun bis jetzt

noch nicht gelungen, sich über die allgemeinste mögliche Gestalt eines solchen Polygons Rechenschaft zu geben. Nur die Theorie der Kreisbogendreiecke ist durch die Arbeiten der Herrn H. A. Schwarz*), Klein**), Schilling***) vollständig behandelt, so daß wir uns eine anschauliche Vorstellung aller überhaupt hier möglichen Kreisbogendreiecke machen können. Die Kreisbogenvierecke wurden von Herrn Schönflies†) nur erst vorläufig auf ihre gestaltlichen Verhältnisse hin untersucht; eine volle Diskussion der möglichen Kreisbogenvierecke findet sich in der demnächst erscheinenden Göttinger Doktordissertation von Herrn Ihlenburg (Acta Leopoldina).

Wir beschäftigen uns im folgenden nur mit solchen Vierecken, deren Winkel $<\pi$ sind, während allerdings die Seiten sich beliebig oft überschlagen können; die Diskussion aller hier möglichen Vierecke wird sich später auf das leichteste in Anschluß††) an die Differentialgleichung (3) ergeben. Wir haben hier vorab nur einiges Allgemeine über die Maßzahlen eines Kreisbogenviereckes der betrachteten Art zu sagen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir das Viereck auf der Kugel und denken uns den reellen Punkten der Kugel die Gesamtheit der komplexen Werte einer Variabelen η ein-eindeutig zugeordnet, wie dieses durch stereographische Projektion der komplexen η-Ebene auf die η-Kugel geschieht. Nun kommen für uns nur solche Eigenschaften des Kreisbogenviereckes in Betracht, die bei einer linearen Transformation:

$$(5) \qquad \eta' = \frac{e\eta + f}{g\eta + h}$$

ungeändert bleiben, wenn e, f, g, h irgend welche komplexe Zahlen sind. Die Substitution (5) entspricht nämlich bekanntlich dem Übergang von dem Quotienten zweier Partikularlösungen von (3) zu dem Quotienten irgend zweier anderer Partikularlösungen derselben Differentialgleichung. Wir müssen daher die Maßzahlen des Viereckes so festlegen, daß sie bei einer (5) entsprechenden Transformation der η-Kugel unverändert bleiben, was man bekanntlich dadurch erreicht, daß man eine solche projektive Maßbestimmung†††) einführt, deren Maßfläche die η-Kugel ist. Dabei

*) H. A. Schwarz, Crelles Journal Band 75.

**) F. Klein, Mathematische Annalen, Band 37, ferner: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Wintersemester 1889—90 und Sommersemester 1890, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, Wintersemester 1893—94, autographierte Vorlesungshefte im Verlag bei Teubner.

***) Fr. Schilling, Mathematische Annalen, Band 44. 1894.

†) A. Schönflies, Mathematische Annalen, Band 42 und 44. 1893, 1894.

††) Ich werde in einer späteren Arbeit eine auf diese Weise durchgeführte Diskussion der gestaltlichen Verhältnisse des allgemeinsten Kreisbogenpolygons bringen.

†††) Klein, Math. Annalen, Band 9, vgl. bezüglich weiterer Ausführungen: Fricke-Klein: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen I, Einleitung S. 4 u. f.

drückt man die Winkel zweier Geraden eines Büschels oder zweier Ebenen eines Büschels oder zweier Punkte einer Punktreihe durch:

$$C \lg D \tag{6}$$

aus, wobei C eine noch geeignet zu wählende Konstante, D dasjenige Doppelverhältnis ist, welches die beiden in das Auge gefaßten Elemente mit denjenigen Elementen desselben Trägers bilden, welche die Kugel berühren, bez. ihr angehören. Da in der so festgelegten Maßbestimmung nur Doppelverhältnisse vorkommen, so behalten die so gemessenen Größen bei jeder projektiven Transformation des Raumes, welche die Kugel in sich überführen, ihren Wert bei. Nun kann man aber die durch (5) gegebene Transformation der η-Kugel in sich geradezu als eine projektive Transformation des Raumes deuten. Es geht nämlich bei der Transformation (5) ein jeder Kreis der Kugel wieder in einen solchen über; wir ordnen nun die beiden Ebenen, durch welche die entsprechenden Kreise ausgeschnitten werden, einander zu; dann zeigt man leicht*), daß allen Ebenen, welche durch einen Punkt hindurchgehen, vermittels (5) und der eben gemachten Festsetzung solche Ebenen entsprechen, die wieder alle durch einen Punkt gehen, so daß wir es mit einer Punkttransformation des Raumes zu tun haben, bei welcher alle Ebenen wieder in Ebenen übergehen. Eine solche Transformation des Raumes kann aber nur eine projektive Transformation sein, bei der also alle Doppelverhältnisse und speziell alle auf die η-Kugel gegründeten projektiven Maßbestimmungen erhalten bleiben.

Nachdem wir dieses vorausgeschickt haben, betrachten wir die vier Ebenen, in denen die vier Seiten unseres Viereckes liegen. Je zwei aufeinander folgende Ebenen haben dann eine „*Kante*" gemeinsam, je drei aufeinander folgende Ebenen eine „*Ecke*". Die vier Ebenen selbst wird man zweckmäßig als „*Seitenflächen*" bezeichnen. Die Konfiguration, welche von den vier Seitenflächen, den vier Kanten und den vier Ecken gebildet wird, heißt der zum Kreisbogenviereck gehörige *Kern* (K).

Der Kern sowohl wie das dazugehörige Viereck besitzt $3 \cdot 4 = 12$ Maßzahlen**), nämlich:

1. *Vier Kantenwinkel*, das sind die Winkel, welche von zwei durch eine Kante gehenden Seitenflächen gebildet werden. Wir messen diese

*) Vgl. Klein, Hypergeometrische Funktion, Seite 343 oder auch z. B. Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen, 2. Auflage, S. 49.

**) Nähere Ausführungen hierüber finden sich in der autographierten Vorlesung von Herrn Klein über lineare Differentialgleichungen vom Jahre 1890—91, die aber nicht im Buchhandel erschienen ist, sowie in dem ebenfalls nicht veröffentlichten Borkumer Manuskript von 1891 (siehe oben Einleitung).

Winkel, wie festgesetzt, durch den in (6) gegebenen Ausdruck, wobei wir in bekannter Weise

$$C = \frac{i}{2} \tag{7}$$

setzen. Da nun der Logarithmus um ganze Vielfache von $2\pi i$ unbestimmt ist, so sind die Winkel zunächst nur mod π festgelegt. Um sie mod 2π zu bestimmen, nehmen wir immer den Winkel, den diejenigen durch die in das Auge gefaßte Kante gelegten Halbebenen bilden, welche die Polygonseiten in der unmittelbaren Nachbarschaft der Ecke enthalten. Es folgt dann, daß die so bestimmten Kantenwinkel zunächst mod 2π mit den in gewöhnlicher Weise auf der Kugel gemessenen Eckenwinkeln des Vierecks übereinstimmen; wir dürfen durch Definition festsetzen, daß die *Kantenwinkel eines Kernes genau mit den in gewöhnlicher Weise gemessenen Eckenwinkeln des Kreisbogenviereckes übereinstimmen.*

2. *Vier Seitenwinkel.* Wir führen statt der Kanten jetzt die auf ihnen liegenden Halbgeraden ein, welche vom Schnittpunkt zweier aufeinander folgender Kanten derart ausgehen, daß sie den auf ihnen liegenden Begrenzungspunkt des Vierecks als ersten Schnittpunkt mit der Kugel gemein haben. Dann stimmt der betr. Seitenwinkel des Kerns mit dem von zwei solchen Halbgeraden gebildeten Winkel mod 2π überein, sofern wir wiederum C durch (7) bestimmen. Diese Seitenwinkel wählen wir als Maß für die *Seitenlängen* des Kreisbogenviereckes, wobei wir die Unbestimmtheit mod 2π durch die Festsetzung aufheben, daß der Vermehrung des Seitenwinkels um 2π gerade die Hinzufügung einer vollen Selbstüberschlagung der Seite entspreche.

3. *Vier Kantenlängen.* Jede Kante wird von der vorhergehenden und der folgenden Kante in je einem Punkte, einer „Ecke", geschnitten. Den in projektiver Maßbestimmung gemessenen Abstand von zwei auf einer Kante liegenden Ecken nennen wir *Kantenlänge.* Wir wählen dabei zweckmäßigerweise in (6) für C irgend einen reellen Wert, wobei wir uns noch der Bestimmtheit halber für den Hauptwert des Logarithmus entscheiden.

Wir gehen nun dazu über, die Seitenlängen und Kantenlängen durch diejenigen Werte von η auszudrücken, die den Schnittpunkten der Kanten mit der Kugel entsprechen. Es ist dabei keine wesentliche Spezialisierung, wenn wir annehmen, daß unsere Kugel den Durchmesser 1 besitze, daß ferner die Werteverteilung auf der Kugel durch stereographische Projektion der in einem Punkte O berührenden Zahlenebene von dem dem Punkte O diametral gegenüberliegenden Punkte P aus erhalten ist. Dem Punkte O entspreche $\eta = 0$, dem Punkte P $\eta = \infty$.

Es seien nun a', b', c', d' die vier Ecken des Kreisbogenviereckes; die zweiten Schnittpunkte der Kanten des Kernes mit der Kugel bezeichnen wir bez. mit a'', b'', c'', d''. Wir greifen b' heraus und bringen es durch eine geeignete Transformation (5) nach O, b'' nach P, ferner die Seitenfläche $a'b'$ in den Meridian der reellen Zahlen. Zu a' gehört dann ein reeller Wert l_1 von η, zu a'' ein reeller Wert l_2.

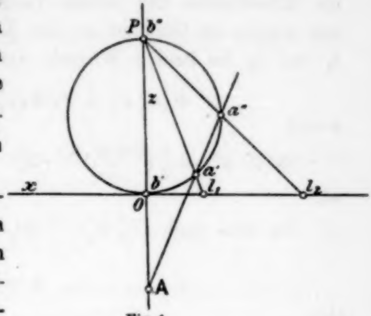


Fig. 1.

Wir führen jetzt die Verbindungslinie OP als z-Achse, die Tangente in O an den Meridian der reellen Zahlen als x-Achse ein. In diesem Koordinatensysteme haben a' und a'' die Koordinaten:

$$x = \frac{l_1}{1 + l_1^2}, \quad z = \frac{l_1^2}{1 + l_1^2}; \text{ bez. } x = \frac{l_2}{1 + l_2^2}, \quad z = \frac{l_2^2}{1 + l_2^2}$$

und man findet für die Gerade

$$u_1 x + u_2 z + u_3 = 0,$$

welche durch a' und a'' geht, die Koordinaten:

$$(8) \qquad u_1 = -(l_1 + l_2), \; u_2 = 1 - l_1 l_2, \; u_3 = l_1 l_2.$$

Für den Schnittpunkt A der Achse $a'a''$ mit der Achse $b'b''$, also mit der z-Achse des Koordinatensystems ist also:

$$(9) \qquad x = 0, \; z = -\frac{l_1 l_2}{1 - l_1 l_2}.$$

Nachdem dies vorausgeschickt ist, gehen wir dazu über, die Seitenlänge $b'a'$ unseres Polygons zu berechnen, und stellen dazu die Gleichung des die reellen Zahlen tragenden größten Kreises in homogenen Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 dar.

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $x = 0$, $z = \frac{1}{2}$, der Radius hat die Größe $\frac{1}{2}$. Also ist die Gleichung des Kreises:

$$\Phi(u, u) = u_1^2 - 4u_2 u_3 - 4u_3^2 = 0.$$

Dann erhält man den in der projektiven Maßbestimmung unter Zugrundelegung dieses Kreises gemessenen Winkel, den zwei in dieser Ebene liegende Gerade mit den homogenen Linienkoordinaten u_1', u_2', u_3' bez. u_1'', u_2'', u_3'' einschließen, bekanntlich folgendermaßen:

Es seien

$$u_1' + \lambda_1 u_1'', \quad u_2' + \lambda_1 u_2'', \quad u_3' + \lambda_1 u_3''$$

bez.

$$u_1' + \lambda_2 u_1'', \quad u_2'' + \lambda_2 u_2'', \quad u_3' + \lambda_2 u_3''$$

die Koordinaten der beiden Tangenten, welche von dem Schnittpunkte der gegebenen Geraden an den Kreis gezogen werden können; hier sind λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\Phi(u', u') + 2\lambda\,\Phi(u', u'') + \lambda^2\,\Phi(u'', u'') = 0,$$

wobei

$$\Phi(u', u'') = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\Phi(u', u')}{\partial u_1'}\cdot u_1'' + \frac{\partial\,\Phi(u', u')}{\partial u_2'}\cdot u_2'' + \frac{\partial\,\Phi(u', u')}{\partial u_3''}\cdot u_3''\right)$$

ist.

Da nun nach (7) $C = \frac{i}{2}$ ist, so ist der gesuchte Winkel:

$$\varphi = \frac{i}{2}\cdot \lg\frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

also

$$\cos\varphi = \frac{e^{-\frac{1}{2}\lg\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + e^{\frac{1}{2}\lg\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} = -\,\frac{\Phi(u', u'')}{\sqrt{\Phi(u', u')\,\Phi(u'', u'')}}.$$

Für unseren Fall ist nun nach (8):

$$u_1' = -(l_1 + l_2), \quad u_2' = 1 - l_1 l_2, \quad u_3' = l_1 l_2,$$

ferner ist:

$$u_1'' = 1, \quad u_2'' = 0, \quad u_3'' = 0.$$

Man erhält also für den von den Geraden $a'a''$, $b'b''$ eingeschlossenen Winkel φ:

$$\text{(10)} \qquad \cos\varphi = \frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1}, \quad \sin\varphi = \frac{2\cdot\sqrt{-l_1 l_2}}{l_1 - l_2}. \qquad \text{(K)}$$

An sich würde bei beiden Ausdrücken ein doppeltes Vorzeichen auftreten, was daher rührt, daß wir vermöge unserer Ableitung die Formeln sowohl für $\pm\varphi$, als auch für die Nebenwinkel dieser Winkel gewinnen; es erweist sich aber als zweckmäßig, für den früher bei der Festlegung der Seitenwinkel näher bestimmten Winkel in den Formeln ein für allemal das positive Vorzeichen zu wählen.

Ehe wir nun eine weitere Diskussion von (10) durchführen, berechnen wir noch die Kantenlänge auf $b'b''$. Zu diesem Zwecke haben wir nur noch die Koordinaten des Schnittpunktes B der Kante $c'c''$ mit der Kante $b'b''$ anzugeben. Zu c' und c'' gehören Werte

$$\text{(11)} \qquad \eta = \nu_1 = n_1 e^{\beta\pi i}, \quad \text{bez.} \quad \eta = \nu_2 = n_2 e^{\beta\pi i},$$

wobei n_1 und n_2 reelle Größen, $\beta\pi$ aber der Winkel des Kreisbogenviereckes bei b' ist. Wir drehen nun die Ebene, welche die Vierecksseite $b'c'$ enthält, um den Winkel $-\beta\pi$ mit $b'b''$ als Achse, so daß der Kreisbogen $c'c''$ in den Meridian der reellen Zahlen fällt.

B bleibt bei der Drehung liegen, zu c' bez. c'' gehören nach der Drehung die reellen Werte

$$\eta = n_1, \quad \text{bez.} \quad \eta = n_2,$$

so daß wir wieder denselben Sachverhalt haben wie schon oben. Man findet daher für B die Koordinaten

$$x = 0, \quad z = -\frac{n_1 n_2}{1 - n_1 n_2}. \tag{12}$$

Durch Zusammenfassung mit (9) finden wir für die in der projektiven Maßbestimmung gemessene Länge L der Kante AB:

$$L = C \cdot \lg\left(\frac{-l_1 l_2 (1 - l_1 l_2)}{1 - l_1 l_2} : \frac{-n_1 n_2 (1 - n_1 n_2)}{1 - n_1 n_2}\right) = C \lg \frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}, \tag{13} \qquad \text{(K)}$$

wobei C, wie festgesetzt wurde, hier irgend eine reelle Konstante ist.

Nachdem wir jetzt das nötige Formelmaterial gewonnen haben, gehen wir zur Diskussion der Formeln (10) *und* (13) *über.*

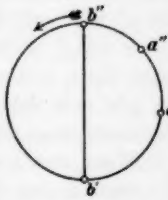


Fig. 2.

1) Es mögen, wie in nebenstehender Figur, a' und a'' zwischen b' und b'', d. h. l_1 und l_2 zwischen 0 und ∞ liegen, und zwar gelange man, wenn man von b' entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers ausgeht, direkt nach a' und dann nach a'', ohne in beiden Fällen die ganze Kreisperipherie ein oder mehrmals durchlaufen zu haben. Da hierbei l_1 und l_2 positiv sind und l_2 einen größeren Wert besitzt als l_1, so ist

$$\frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1} > 1,$$

es folgt also aus (10), daß φ einen rein imaginären Wert besitzt. Zunächst können wir allerdings nur behaupten, daß

$$\varphi = \psi_1 i + 2k\pi$$

ist, wobei ψ irgend eine reelle Größe, k eine ganze Zahl ist; es ist jedoch äußerst zweckmäßig und natürlich, hier $k = 0$ zu setzen.

Es ist nun für die späteren Anwendungen von Bedeutung, zu sehen, wie sich φ ändert, wenn wir a' und a'' entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne den Kreis beliebig oft durchlaufen lassen, dergestalt, daß a' niemals a'' einholt und a'' niemals a' um einen vollen Kreisumlauf überholt. Es dürfte dabei zweckmäßig sein, für a' und a'' die dazugehörigen Werte von η, l_1 und l_2, für b' den Wert 0, für b'' den Wert ∞ einzuführen. Es sei dazu noch bemerkt, daß η auf dem rechts liegenden, von b' und b'' begrenzten Halbkreise die positiven, auf dem links liegenden Halbkreise die negativen reellen Zahlen durchläuft.

Zunächst kommt jetzt bei unserer Bewegung l_2 nach ∞; es wird also $\cos\varphi = 1$. Da wir natürlich φ sich nur stetig ändern lassen werden, und es vorher rein imaginär war, so werden wir jetzt $\varphi = 0$ setzen müssen. Dieses stimmt mit der bekannten Tatsache überein, daß, wenn man in der sogenannten parabolischen Geometrie auf der Kugel die Kreisbogen in allgemein-projektiver Weise mißt, ihre Längen gleich 0 sind. Wenn l_2 jetzt ∞ überschritten, also negative Werte angenommen hat, wird $\cos\varphi < 1$; also wird φ reelle Werte zwischen 0 und π annehmen.

Es kann nun fernerhin nach unseren Festsetzungen entweder $l_1 = \infty$ und dann $l_2 = 0$ werden, oder es können diese beiden Ereignisse in umgekehrter Reihenfolge oder auch gleichzeitig eintreten. Diskutieren wir zuerst den ersten Fall, nehmen wir also an, es werde $l_1 = \infty$, solange l_2 noch negativ ist; es wird dann $\varphi = \pi$, und φ hat alle Werte zwischen 0 und π mindestens einmal durchlaufen. Bei Weiterbewegung wird l_1 negativ, $|\cos\varphi| > 1$ und da wir wieder φ als sich stetig ändernd annehmen, $\varphi = \pi + \psi_2 i$, wobei ψ_2 eine reelle Größe ist. φ behält diese Form so lange, bis $l_2 = 0$ wird; es kann dabei ψ nicht ∞ werden, da stets $l_2 \gtrless l_1$ ist; gibt man daher für $|l_2 - l_1|$ eine untere Grenze vor, so kann ψ_2 eine bestimmte obere Grenze nicht überschreiten.

Wenn nun $l_2 = 0$ wird, wird wieder $\cos\varphi = -1$, also $\varphi = \pi$.

Ganz analog ist die Sachlage in dem zweiten möglichen Falle, wenn l_2 zuerst 0 und l_1 dann erst ∞ wird, d. h. φ wird auch hier zuerst $= \pi$, dann von der Form $\varphi = \pi + \psi_2 i$, dann wieder π.

Im dritten Falle, wenn gleichzeitig $l_2 = 0$, $l_1 = \infty$ wird, erhält φ den Wert π.

Nachdem nun l_1 den Punkt ∞, l_2 den Punkt 0 passiert hat, ist $|\cos\varphi| < 1$; wir werden zweckmäßigerweise daher $\varphi = \pi + \psi_3$ setzen, wobei $0 < \psi_3 < \pi$ ist, während an sich auch die Ungleichung $0 > \psi_3 > -\pi$ zulässig wäre, was wir durch Definition ausschließen wollen. φ bleibt jetzt reell und $0 < \psi_3 < \pi$, bis entweder l_1 den Wert 0 oder l_2 den Wert ∞ annimmt; in beiden Fällen wird $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 2\pi$.

Eine weitere Diskussion und Festsetzung der noch frei stehenden Definitionen geschieht ganz analog.

Da die vorstehenden Untersuchungen für das Folgende von grundlegender Bedeutung sind, so wollen wir die Sachlage im allgemeinen Fall in folgendem Satz 1 zusammenfassen.

Satz 1. *Wenn l_1 k mal durch ∞ und k mal durch 0, l_2 k mal durch ∞ und k mal durch 0 gegangen ist, oder auch, wenn l_1 k mal durch ∞, aber nur $k-1$ mal durch 0, l_2 dagegen $k+1$ mal durch ∞ und k mal durch 0 gegangen ist, so ist der Winkel, welcher die Länge $b'a'$ mißt, von der Form $\varphi = 2k\pi + \psi i$, wo ψ irgend eine reelle Größe ist. Geht nun*

im 1. Falle l_2 das $(k+1)^{te}$ Mal durch ∞, im 2. Falle l_1 das k^{te} Mal durch 0, *so ist $\varphi = 2k\pi$ und wächst, wenn sich l_1 und l_2 entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne weiter bewegen, alle dazwischen liegenden reellen Werte und nur diese annehmend, auf $\varphi = (2k+1)\pi$, bis l_1 das $(k+1)^{te}$ Mal durch ∞ oder l_2 das $(k+1)^{te}$ Mal durch* 0 *geht. Welches von diesen beiden Ereignissen zuerst eintreffen mag, φ wird nach dem Eintreffen des einen bis zum Eintreffen des anderen die Form $(2k+1)\pi + \psi i$ haben, beim Eintreffen des anderen Ereignisses selbst wird wieder $\varphi = (2k+1)\pi$ sein. Dann bleibt φ reell und erreicht den Wert $2(k+1)\pi$, wenn l_1 das $(k+1)^{te}$ Mal durch* 0, *oder l_2 das $(k+2)^{te}$ Mal durch ∞ geht. Damit sind wir aber beim Ausgangspunkte des Satzes angekommen, wenn wir nur k mit $k+1$ vertauschen.*

Unter Zugrundelegung der in Satz 1 getroffenen Festsetzungen wird es zweckmäßig sein, an der Vorstellung festzuhalten, daß sich die Seite $b'a'$ k mal durch ∞, bez. k mal durch 0 hindurchzieht, wenn l_1 bei unserer Bewegung das k^{te} Mal durch ∞, bez. durch 0 hindurchgegangen ist.

Wir entnehmen aus Satz 1 speziell:

Satz 2. *Wenn l_2 und l_1 von zwei zwischen* 0 *und* $+\infty$ *liegenden Punkten ausgehend den Kreis der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne beliebig oft derart durchlaufen, daß l_2 immer vorausgeht, ohne l_1 je um einen ganzen Umlauf zu überholen, so nimmt φ jeden positiven reellen Wert mindestens einmal an.*

2) Wir kommen jetzt zur Diskussion von (13). Dabei ist derjenige Fall von besonderem Interesse, in welchem das Kreisbogenviereck einen Orthogonalkreis besitzt, d. h. in welchem für das Kreisbogenviereck ein Kreis existiert, auf welchem die vier die Seiten des Viereckes enthaltenden Kreise senkrecht stehen. Dazu ist, wie wir zeigen wollen, die Bedingung:

$$l_1 l_2 = n_1 n_2 \tag{14}$$

notwendig und hinreichend.*)

Diese Gleichung sagt nämlich nach (13) aus, daß die Kantenlänge AB den Wert 0 besitzt; daraus folgt, daß die Ecken A und B des Kernes zusammenfallen. Es schneiden sich daher die Kanten $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ in einem Punkte; durch diesen Punkt geht dann von selbst auch die vierte Kante $d'd''$, welche mit $a'a''$ und $c'c''$ je in einer Ebene liegt.

Ist also Gleichung (14) erfüllt, so sind alle Kantenlängen 0 und alle Ecken des Kernes fallen in einen Punkt Π zusammen.

*) Diese Bedingung wurde von Herrn Klein in seiner Annalenarbeit Bd. 64, S. 187 ff. auf ganz andere Weise abgeleitet und *Involutionsbedingung* genannt.

Wir betrachten jetzt die Polarebene Π_1 dieses Punktes Π in bezug auf die Kugel. Dann steht jede Ebene E, welche den Punkt Π enthält, auf Π_1 im Sinne unserer projektiven Maßbestimmung senkrecht. In der Tat hat das Doppelverhältnis, das Π_1 und E mit den beiden in dem von Π_1 und E gebildeten Ebenenbüschel enthaltenen Tangentialebenen bilden, den Wert $-1 = e^{-\pi i}$, also ist nach (6) und (7) der von E und Π_1 eingeschlossene Winkel $\frac{\pi}{2}$. Speziell stehen also die vier Seitenflächen des Vierecks auf Π_1 senkrecht. Da man nun alle Schlüsse in umgekehrter Reihenfolge wiederholen kann, so ist damit die Behauptung in ihrer vollen Allgemeinheit bewiesen.

Wenn nun l_1 und l_2 dasselbe Zeichen haben und (14) erfüllt ist, liegt Π außerhalb der Kugel; die Polarebene Π_1 schneidet die Kugel in einem reellen Kreise und das Viereck besitzt einen reellen Orthogonalkreis. Wenn dagegen in (14) l_1 und l_2 entgegengesetzte Zeichen haben, so liegt Π innerhalb der Kugel; Π_1 schneidet die Kugel in einem imaginären Kreise und das Viereck besitzt einen imaginären Orthogonalkreis.

Was nun im allgemeinen Falle die Kantenlänge anbelangt, so folgt, da C hier reell angenommen wurde, aus (13), daß eine Kante eine reelle Länge besitzt, wenn die beiden auf ihr liegenden Ecken des Kernes gleichzeitig im Äußeren oder gleichzeitig im Innern der Kugel liegen. Eine Kante hat dagegen eine komplexe Länge, wenn die eine Ecke im Innern, die andere im Äußeren der Kugel liegt.

§ 2.

Zusammenhang der Differentialgleichung mit den Bestimmungsstücken des Vierecks.*)

Wir gehen jetzt etwas näher auf die Differentialgleichung (3) der Einleitung ein, wobei wir ein für allemal hier annehmen, daß die durch 1, 2 und 4 gegebenen Gleichungen und Ungleichungen erfüllt seien.

Es seien nun $Y_\beta^b(x)$ und $Y_0^b(x)$ die zu den Exponenten β bezüglich 0 gehörigen Fundamentallösungen von (3) im Punkte b; den bei $Y_0^b(x)$ noch zur Verfügung stehenden konstanten Faktor denken wir uns so bestimmt, daß

$$(15) \qquad Y_0^b(b) = 1$$

ist; ebenso denken wir uns $Y_\beta^b(x)$ fest normiert, behalten uns aber die nähere Festsetzung hierüber für den nächsten Paragraphen vor.

*) Vgl. Klein l. c. Bd. 64.

Für die singulären Punkte a und c sollen nun die entsprechenden Fundamentallösungen Y_α^a, Y_0^a, Y_γ^c, Y_0^c sein. Wir denken uns in diesen die noch zur Verfügung stehenden konstanten Faktoren so gewählt, daß sie sich beim Hinschreiten längs der Stücke $\overline{ab}$, bez. $\overline{cb}$ der reellen x-Achse in der Form darstellen lassen:

$$(16)\qquad \begin{aligned} Y_\alpha^a &= Y_\beta^b - l_1 Y_0^b; & Y_\gamma^c &= Y_\beta^b - \nu_1 Y_0^b; \\ Y_0^a &= Y_\beta^b - l_2 Y_0^b; & Y_0^c &= Y_\beta^b - \nu_2 Y_0^b. \end{aligned}$$

Dabei sind l_1 und l_2 reelle Größen, ν_1 und ν_2 dagegen komplexe, und zwar ist: $\nu_1 = e^{+\beta\pi i}\cdot n_1$, $\nu_2 = e^{+\beta\pi i}\cdot n_2$, wenn n_1 und n_2 reelle Größen sind (vergl. Formel (11)).

Wir zeichnen nun weiterhin b aus und setzen:

$$(17)\qquad \eta = \frac{Y_\beta^b}{Y_0^b}.$$

Dieser Quotient bildet die von der reellen Achse begrenzte Halbebene der x auf ein Kreisbogenviereck ab, das wir uns zweckmäßigerweise statt in der η-Ebene auf der η-Kugel gelegen denken. Den singulären Punkten $a, b, c, d = \infty$ entsprechen die Ecken a', b', c', d' des Viereckes.

Wir führen neben a', b', c', d' die Punkte a'', b'', c'', d'' ein, d. h. diejenigen Punkte, in denen die Kanten des zu dem Kreisbogenvierecke gehörigen Kernes die Kugel das zweite Mal schneiden.

Nun entspricht einem vollen Umlaufe in der x-Ebene um b eine Drehung der η-Kugel von der Amplitude $2\pi\beta$ um die Achse $b'b''$. Die diesem Umlaufe entsprechende Substitution ist:

$$\eta' = e^{2\pi\beta i}\cdot \eta;$$

daraus folgt, daß das zu b'' d. h. zu dem 2. Fixpunkte bei der Drehung gehörige η den Wert ∞ besitzt. Es verschwindet also $Y_\beta^b(x)$ in dem Punkte b', $Y_0^b(x)$ in dem Punkte b'' der η-Kugel. Analog folgt, daß Y_α^a, Y_0^a, Y_γ^c, Y_0^c bezüglich in den Punkten a', a''; c', c'' der η Kugel verschwinden. Aus (16) und (17) folgt dann, daß η in den Punkten:

$$a',\ a'';\ b',\ b'';\ c',\ c''$$

bez. die Werte annimmt:

$$l_1,\ l_2;\ 0,\ \infty;\ \nu_1,\ \nu_2.$$

Wir haben nun schon im letzten Paragraphen die Seitenfläche $b'c'$ in die den Kreis der reellen Zahlen enthaltende Ebene gedreht; diese Drehung wird uns auch hier nützliche Dienste leisten.

Um sie analytisch zum Ausdruck zu bringen, werden wir zweckmäßigerweise eine bestimmte Verabredung über die Festlegung der zu b

gehörigen Fundamentallösungen treffen. Wir machen nämlich folgende Festsetzung:

$$(18)\qquad \begin{aligned} Y^b_\beta &= (x-b)^\beta\,\mathfrak{P}_\beta(x-b) \text{ für } x > b \\ Y^b_\beta &= (b-x)^\beta\,\mathfrak{P}_\beta(x-b) \text{ für } x < b, \end{aligned}$$

d. h. wir setzen

$$Y^b_\beta = |x-b|^\beta\,\mathfrak{P}_\beta(x-b) \text{ und analog } Y^a_\alpha = |x-a|^\alpha\,\mathfrak{P}_\alpha(x-a),$$

und entsprechend

$$Y^c_\gamma = |x-c|^\gamma\,\mathfrak{P}_\gamma(x-c),\quad Y^\infty_{\delta'} = \left|\frac{1}{x}\right|^{\delta'}\mathfrak{P}_{\delta'}\left(\frac{1}{x}\right),\quad Y^\infty_{\delta''} = \left|\frac{1}{x}\right|^{\delta''}\mathfrak{P}_{\delta''}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dabei schreiben wir $\mathfrak{P}$ als Symbol einer Potenzreihe mit von 0 verschiedenem konstanten Glied; die vorkommenden Potenzen reeller positiver Größen aber sollen selbst reell und positiv genommen sein.

Diese Festsetzung bezüglich der Fortsetzung über einen singulären Punkt hinaus wurde von Herrn Hilbert zunächst in dem Falle eingeführt, daß α, β, γ, $\delta' - \delta''$ verschwinden, Herr Klein hat dann in der öfter erwähnten Annalenarbeit von 1907 diese Festsetzung für allgemeine Werte der α, β, γ und $\delta' - \delta''$ fixiert und geometrisch interpretiert, was wir im folgenden benützen müssen.

Unter der Annahme des durch (18) ausgedrückten Fortsetzungsprinzips unterscheidet sich $\dfrac{Y^b_\beta}{Y^b_0}$ zwar für alle Werte von x zwischen a und b von der abbildenden Funktion η überhaupt nicht, für alle Werte von x zwischen b und c jedoch um den Faktor $e^{-\beta\pi i}$; diesem Faktor entspricht aber gerade eine Drehung der $b'c'$ enthaltenden Seitenfläche in die Ebene, welche den Meridian der reellen Zahlen enthält.

Wir haben also hier dieselbe Drehung, die wir bei der Ableitung von (13) benützten.

Unter Zugrundelegung des durch (18) gegebenen Fortsetzungsprinzips erhalten wir in (16) nach geeigneter Abänderung der Normierung von Y^c_γ, Y^c_0 statt ν_1, ν_2 die Werte n_1 und n_2, so daß wir mit den Ergebnissen des § 1 zusammenfassend haben

Satz 3: *Es sei unter Zugrundelegung des durch* (18) *gegebenen Fortsetzungsprinzipes*

$$(19)\qquad \begin{aligned} Y^a_\alpha &= Y^b_\beta - l_1\,Y^b_0; & Y^c_\gamma &= Y^b_\beta - n_1\,Y^b_0; \\ Y^a_0 &= Y^b_\beta - l_2\,Y^b_0; & Y^c_0 &= Y^b_\beta - n_2\,Y^b_0; \end{aligned}$$

dann erhält man für die Längen φ_1 *und* φ_2 *der Vierecksseiten* $a'b'$ *und* $b'c'$ *nach* (10):

$$(20)\qquad \cos\varphi_1 = \frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1},\quad \cos\varphi_2 = \frac{n_1 + n_2}{n_2 - n_1}$$

und nach (13) *für die Länge* L *der Kante auf* $b'b''$:

(21) $$L = C \cdot \lg \frac{l_1 l_2}{n_1 n_2},$$

wobei C eine reelle Konstante ist.

Es ist damit ein einfacher Zusammenhang zwischen den Maßzahlen des Kreisbogenviereckes und den durch die Fundamentallösungen definierten Größen l_1, l_2, n_1, n_2 aufgestellt.

Wir haben jetzt noch die Abhängigkeit dieser Größen von dem Parameter B zu untersuchen, wobei wir uns sogenannter Oszillationsbetrachtungen bedienen wollen. Ehe wir aber dazu übergehen, wollen wir die Differentialgleichung auf eine für diese Untersuchungen geeignetere Form bringen; ferner wollen wir diskutieren, welchen Einfluß es auf die Differentialgleichung hat, wenn wir statt d einen anderen singulären Punkt in das Unendliche werfen.

§ 3.

Umformungen der Differentialgleichung. Allgemeine Bemerkungen über Oszillationsbetrachtungen.

Wir setzen jetzt gemäß unserem Fortsetzungsprinzip:

(22) $$dt = \frac{dx}{|x-a|^{1-\alpha}\,|x-b|^{1-\beta}\,|x-c|^{1-\gamma}}.$$

Dann geht (3) über in

(23) $$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}\,|x-b|^{2-2\beta}\,|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}(Ax+B)y = 0.$$

Dadurch erhält man nicht nur, wie man sieht, die Differentialgleichung in einfacherer Gestalt, sondern es ist auch, wenn wir die Ungleichungen für α, β, γ berücksichtigen:

(24) $$\left(\frac{d\,Y_0^a(x)}{dt}\right)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{d\,Y_0^b(x)}{dt}\right)_{x=b} = 0, \quad \left(\frac{d\,Y_0^c(x)}{dt}\right)_{x=c} = 0,$$

da ja z. B.

$$\left(\frac{d\,Y_0^a(x)}{dt}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\,Y_0^a(x)}{dx}\,|x-a|^{1-\alpha}\,|x-b|^{1-\beta}\,|x-c|^{1-\gamma}\right)_{x=a}.$$

Ferner ist nach (18):

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d\,Y_\beta^b(x)}{dt}\right)_{x=b+\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d\,Y_\beta^b(x)}{dt}\right)_{x=b-\varepsilon} \neq 0.$$

Wir wollen nun die in § 2 verschobene Festsetzung der Normierung von $Y_\beta^b(x)$ derart treffen, daß:

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d\,Y_\beta^b(x)}{dt}\right)_{x=b+\varepsilon} = +1, \text{ also } \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d\,Y_\beta^b(x)}{dt}\right)_{x=b-\varepsilon} = -1$$

ist.

Fassen wir dieses mit der in (15) gegebenen Festsetzung zusammen, so hat man:

$$(25)\quad Y_0^b(b)=1,\ \left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=b}=0,\quad Y_\beta^b=0,\ \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_\beta^b(x)\right)_{x=b+\varepsilon}=1,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=b-\varepsilon}=-1.$$

In den zu a und c gehörigen Fundamentallösungen sind dann die an sich noch willkürlichen konstanten Faktoren durch die Gleichungen (19) festgelegt; aber auch in diesen beiden singulären Punkten haben die dazu gehörigen Fundamentallösungen die Eigenschaft, daß immer die eine daselbst verschwindet, die andere eine dort verschwindende 1. Ableitung besitzt.

Die Gültigkeit von (24) beruht wesentlich auf der Voraussetzung, daß α, β, γ kleiner als 1 sind, und dieses ist auch der Grund, warum wir diese so stark beschränkende Voraussetzung einführen mußten.

In der Tat ist (24) für die folgenden Oszillationsbetrachtungen von grundlegender Bedeutung, wenigstens was die dabei auftretenden Eindeutigkeitsfragen anbelangt; denn die benutzten Beweismethoden versagen zum größten Teile, wenn die in (24) auftretenden Größen, anstatt zu verschwinden, unendlich groß werden.

Es ist noch zu untersuchen, was aus A in (3) *bez.* (23) *wird, wenn wir statt d einen anderen singulären Punkt in das Unendliche werfen.* Zu diesem Zwecke fügen wir vorübergehend A und B den im ∞ gelegenen Punkt als Index bei, so daß wir z. B. in (23) statt A und B A_d und B_d zu schreiben hätten. Wir führen jetzt statt x die Größe $Z=-\frac{1}{x-b}$ als Variable ein, dann geht (3) in eine Differentialgleichung analoger Art über, welche die singulären Stellen $\bar a=\frac{1}{b-a}$, $\bar b=\infty$, $\bar c=\frac{1}{b-c}$, $\bar d=0$ besitzt, wobei jetzt aus den Ungleichungen $a>b>c$ folgt, daß $\bar c>\bar d>\bar a$ ist.

Die Differentialgleichung (3) geht daher über in:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{1-\gamma}{z-\bar c}+\frac{1-(\delta'+\delta'')}{z}+\frac{1-\alpha}{z-\bar a}\right)\frac{dy}{dz}$$
$$+\frac{-\bar a\bar c}{(z-\bar c)z(z-\bar a)}\left(A_d b-\frac{A_d}{z}+B_d\right)y=0.$$

Setzt man dann noch $y=z^{\delta''}y_1$, so erhält man für y_1 die Gleichung:

$$(26)\quad \frac{d^2y_1}{dz^2}+\left(\frac{1-\gamma}{z-\bar c}+\frac{1-(\delta'-\delta'')}{z}+\frac{1-\alpha}{z-\bar a}\right)\frac{dy_1}{dz}+\frac{1}{(z-\bar c)z(z-\bar a)}(A_b z+B_b)\,y_1=0.$$

Dabei wurde gesetzt:

$$(27)\qquad \delta''(\beta+\delta'')=A_b;$$

$$(28)\quad (\bar c+\bar a)A_d-\bar c\delta''(1-\alpha)-\bar a\delta''(1-\gamma)-\bar a\bar c B_d-\bar a\bar c A_d b=B_b.$$

Da nun $\bar{a}\bar{c}$ seiner Definition gemäß einen negativen Wert besitzt, so steigt und fällt, wie aus (28) unmittelbar folgt, B_b gleichzeitig mit B_d.

Überhaupt spielt jetzt das Intervall $(\bar{d}, \bar{c})$ dieselbe Rolle, wie früher das Intervall (b, a), das Intervall $(\bar{a}, \bar{d})$ dieselbe Rolle, wie früher das Intervall (c, b).

Wenn also A_d und A_b dasselbe Vorzeichen besitzen, so können wir die Sätze über das Verhalten von Lösungen der Gleichung (3) in dem Intervalle (b, a) bzw. (c, b) unmittelbar als Sätze über das Verhalten von Lösungen der Gleichung (26) für die Intervalle $(\bar{d}, \bar{c})$ bzw. $(\bar{a}, \bar{d})$ aussprechen und daher gelten diese Sätze, soweit sie durch die ausgeführten Transformationen nicht modifiziert werden, unmittelbar für die Lösungen der Differentialgleichung (3) in den Intervallen (d, c) bzw. (a, d). Es ist also von größter Wichtigkeit, die Vorzeichen der Größen A zu diskutieren. Da wir alle vier Punkte gleichmäßig behandeln wollen, setzen wir:

$$\delta''(\alpha + \delta'') = A_a, \quad \delta''(\beta + \delta'') = A_b, \quad \delta''(\gamma + \delta'')\, A_c, \quad \delta'\delta'' = A_d.$$

Es sind dann folgende Fälle möglich:

I. A_d sei positiv, $\alpha + \beta + \gamma < 2$.

Da nun $\alpha + \beta + \gamma + \delta' + \delta'' = 2$, $\delta'\delta'' = A_d > 0$ ist, muß sowohl δ' als auch δ'' positiv sein. Nun sind α, β, γ nach (1) positive Größen, also sind auch A_a, A_b, A_c positive Größen. Man kann diesen Satz auch sofort umkehren. Es seien A_a, A_b, A_c, A_d positive Größen. Da $A_d > 0$, so sind δ' und δ'' entweder gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ. Sind δ' und δ'' positiv, so folgt aus (4a), daß $\alpha + \beta + \gamma < 2$ ist. Nehmen wir aber an, es wären sowohl δ' als auch δ'' negative Größen, dann folgt, daß jede der drei Größen α, β, γ größer ist als $|\delta' + \delta''|$, da ja nach (1) z. B. $\alpha + \beta < 2$ und nach (4a) $\alpha + \beta + \gamma - |\delta' + \delta''| = 2$ ist. Daher wären in diesem Falle A_a, A_b, A_c negativ, was gegen die Voraussetzung ist. Wir haben also:

Satz 4: *Ist $A_d > 0$, $\alpha + \beta + \gamma < 2$, so sind A_a, A_b, A_c positiv; sind A_a, A_b, A_c, A_d positiv, so ist immer $\alpha + \beta + \gamma < 2$.*

II. Es ist $A_d > 0$, $\alpha + \beta + \gamma > 2$.

Aus (4a) folgt jetzt, daß δ' und δ'' negative Größen sind. Dann zeigt man, wie eben, daß jede der drei Größen α, β, γ größer ist als $|\delta' + \delta''|$, also ist gewiß $(\alpha + \delta'') > 0$, $(\beta + \delta'') > 0$, $(\gamma + \delta'') > 0$, und es folgt $A_a < 0$, $A_b < 0$, $A_c < 0$, so daß wir also den Satz haben:

Satz 5: *Ist $A_d > 0$, $\alpha + \beta + \gamma > 2$, so sind A_a, A_b und A_c negative Größen. Ist $A_d > 0$, $A_a < 0$, $A_b < 0$, $A_c < 0$, so ist $\alpha + \beta + \gamma > 2$.*

Der 2. Teil dieses Satzes 5 folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß δ' und δ'' negative Größen sein müssen, da sonst aus Satz 4 folgen würde, daß A_a, A_b, A_c positive Größen sind.

Es sei jetzt A_d negativ. Dann sind folgende zwei Fälle möglich. Entweder sind alle vier Größen A_a, A_b, A_c und A_d negativ, oder es ist zum mindesten eine von diesen Größen positiv. Wenn aber eine dieser Größen positiv ist, so haben wir einen zu Fall I oder zu Fall II analogen Fall. Ein zu Fall I analoger Fall ist aber unmöglich, da A_d negativ ist.

Wir haben also

Satz 6: *Ist A_d negativ, so sind entweder alle vier Größen A_a, A_b, A_c, A_d negativ oder zum mindesten drei von ihnen.*

Wir kommen also bei negativem A_d nur, wenn der zu II analoge Fall nicht eintrifft, auf einen neuen Fall:

III. $A_a < 0$, $A_b < 0$, $A_c < 0$, $A_d < 0$.

Den Satz 6 sieht man auch ohne Zuhilfenahme der Sätze 4 und 5 leicht folgendermaßen ein. Da nach (4c) $\delta' - \delta'' = \delta$ und nach (1) $0 < \delta < 1$, ferner nach Voraussetzung A_d negativ ist, so ist gewiß $\delta'' < 0$. Es sei nun β beispielshalber die kleinste der Größen α, β und γ und nicht nur $\beta + \delta'' < 0$, sondern auch $\gamma + \delta'' < 0$, dann wäre, da

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta' + \delta'' = \alpha + \beta + \delta'' + \gamma + \delta'' + \delta' - \delta'' = 2$$

ist,

$$\alpha + \delta' - \delta'' > 2,$$

was aber unmöglich ist, da $\alpha < 1$ und $\delta' - \delta'' < 1$ ist. Es kann also unter der Annahme, daß β die kleinste der Größen α, β, γ ist, bei den gemachten Voraussetzungen nur A_b positiv sein, womit Satz 6 aufs neue bewiesen ist.

Um die Tragweite dieser auf so einfache Weise gewonnenen Sätze klar zu machen, wollen wir folgendes Theorem aussprechen, dessen 1. Teil im nächsten Paragraphen, dessen 2. Teil im § 8 bewiesen wird.

Satz 7: *Ist A_d positiv, so besitzt höchstens die eine der beiden nicht durch d' gehenden Seiten des Kreisbogenviereckes eine in projektiver Maßbestimmung gemessene Länge mit von 0 verschiedenem reellem Teile. Ist A_d negativ, so besitzt mindestens die eine der beiden nicht durch d' gehenden Seiten des Kreisbogenviereckes eine in projektiver Maßbestimmung gemessene Länge mit von 0 verschiedenem reellem Teile.*

Um derartige Sätze zu beweisen, bedienen wir uns sogenannter „*Oszillationsbetrachtungen*".*) Die ursprüngliche Form des Oszillations-

*) Eine ausführliche Literaturangabe über diesen Gegenstand findet sich in dem Artikel von Herrn Bôcher über „Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen", Encyklopädie der math. Wiss. II A 7a, 1900.

theorems findet sich in den Arbeiten von Sturm und Liouville im Bande I und II von Liouvilles Journal aus den Jahren 1836—1838. Es handelt sich dabei im wesentlichen um folgendes Theorem.

Es sei (x_1, x_2) ein Intervall der x-Achse, ferner seien zwei in diesem Intervalle stetige Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegeben; überdies sei $\varphi(x)$ für $x_1 < x < x_2$ stets > 0. Wir betrachten dann die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (A\varphi(x) + \psi(x))y = 0. \tag{29}$$

Dann kann man stets einen und nur einen reellen Wert des Parameters A derart bestimmen, daß eine Lösung y von (29) existiert, für die $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y}$ in x_1 und x_2 je einen vorgeschriebenen Wert annimmt, welche ferner zwischen x_1 und x_2 eine gegebene Anzahl von Nullstellen besitzt, womit die Anzahl von *Halboszillationen* festgelegt ist, die y im Intervalle macht. Dieses Theorem wurde dann von Herrn Klein*), der den Namen Oszillationstheorem schuf, aufgenommen und dahin erweitert, daß er Differentialgleichungen mit m Parametern betrachtete und die m Parameter durch den obigen analoge Grenzbedingungen bez. Oszillationsforderungen für m Intervalle festlegte. Dann aber untersuchte Herr Klein, zunächst allerdings nur für einen Spezialfall, auch solche Oszillationstheoreme, bei denen sich das Intervall bis an singuläre Punkte heranzieht. Herr Bôcher**) zeigte nun in der Folge ganz allgemein, daß das Oszillationstheorem für Intervalle, die an singuläre Punkte heranreichen, bestehen bleibt, sofern die Exponentendifferenzen der in Betracht kommenden singulären Punkte reell sind, *zwischen* 0 und 1 liegen und von dem Parameter unabhängig sind. Man muß aber dann, statt den Wert des Quotienten $\frac{y'}{y}$ in den Randpunkten vorzuschreiben, angeben, welchen linearen Kombinationen der zu den singulären Punkten gehörigen Fundamentallösungen y proportional sein soll. Ferner werden von Herrn Bôcher auch solche Fälle erörtert, bei denen die Exponentendifferenzen $\geqq 1$ sind, diese bleiben aber hier außer Betracht.

Bei allen diesen Erweiterungen des Oszillationstheorems blieb man dabei stehen, daß man, wenn *ein* Parameter gegeben war, auch nur für *eine* Lösung der Differentialgleichung Grenzbedingungen vorschrieb. Unsere Aufgabe ist es aber, den Parameter B in (3) derart zu bestimmen, daß die durch (10) oder (13) gegebenen Verbindungen von l_1, l_2, n_1, n_2 vorgeschriebene Werte annehmen, d. h. wir haben im ersten Falle zwei

---

*) Math. Annalen 18, Göttinger Nachrichten 1890, vgl. auch Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen 1894. (Autographiertes Vorlesungsheft, Verlag Teubner).

**) American Bulletin, Oktober 1898 u. April 1900.

Lösungen, Y^a_α, Y^a_0, im zweiten Falle vier Lösungen Y^a_α, Y^a_0, Y^c_γ, Y^c_0 zu betrachten und den Parameter B so zu bestimmen, daß, wenn diese Lösungen durch die Fundamentallösungen Y^b_β und Y^b_0 in der durch (19) gegebenen Weise dargestellt werden, entweder $\frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1}$ oder $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$ in geeigneter Weise vorgeschriebene Werte annehmen.

Um diese Probleme zu behandeln, müssen wir zunächst die Abhängigkeit der Größen l_1, l_2, n_1, n_2 von B direkt untersuchen und dann erst die aus ihnen gebildeten Ausdrücke (10) und (13) in ihrer Abhängigkeit von B diskutieren.

Diese Methode wird uns über die meisten hier in Betracht kommenden Fragen in befriedigender Weise Aufschluß erteilen.

Es ist nun im folgenden ein wesentlicher Unterschied zu machen, ob A positiv oder negativ ist. Wir lassen zunächst, um einen konkreten Fall zu haben, d im Unendlichen; es geht dann aus den Untersuchungen am Anfang dieses Paragraphen hervor, wie wir aus diesem Spezialfall Aufschluß über die Verhältnisse gewinnen, die eintreten, wenn wir einen anderen singulären Punkt in das Unendliche werfen.

§ 4.

Oszillationsbetrachtungen bei positivem A.

Wir gehen von der Differentialgleichung:

$$(23)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}\,|x-b|^{2-2\beta}\,|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot (Ax+B)y = 0$$

aus, wobei $a > b > c$ und $A > 0$ ist.

Dabei ist also:

$$\frac{|x-a|^{2-2\alpha}\,|x-b|^{2-2\beta}\,|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

für $b < x < a$ negativ, für $c < x < b$ positiv.

Wir führen jetzt ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, z ein und betrachten die verschiedenen Lagen der Geraden:

$$z = Ax + B$$

bei variierendem B, dem Parallelverschiebungen der Geraden entsprechen, da A einen festen, positiven Wert besitzt.

Fig. 3.

Als Anfangswert wählen wir $B = -b \cdot A$, d. h. wir geben der Geraden die in nebenstehender Figur gezeichnete Lage. Dann aber ist in (23) der Faktor von y sowohl im Intervalle (c, b) als auch im Intervalle (b, a) negativ und dies ist die einzige mögliche Lage der Geraden, bei der der Faktor von y in beiden Intervallen durchaus dasselbe Vorzeichen besitzt.

Verschieben wir die Gerade nach oben, so wird für das Intervall (c, b) der Faktor von y in einem immer größer werdenden Teile dieses Intervalles positiv, verschieben wir die Gerade nach abwärts, so gilt dasselbe vom Intervalle (b, a).

Wir untersuchen jetzt den Verlauf von Y_β^b und Y_0^b in den Intervallen (b, a) und (b, c) unter der Annahme daß $B = -bA$ sei. Es ist nach (25):

$$Y_\beta^b(b) = 0, \quad \lim_{\epsilon=0}\left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)\right)_{x=b+\epsilon} = 1\cdot$$

Da nun in (23) der Koeffizient von y nach unserer Annahme im Intervalle (b, a) negativ ist, so folgt, daß $\frac{d^2y}{dt^2}$ immer dasselbe Vorzeichen hat wie y. Nun sind in der unmittelbaren Nachbarschaft von t_b, d. h. von dem Werte von t, der zu $x = b$ gehört, $Y_\beta^b(x)$ und $\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)$ positiv, also ist auch $\frac{d^2}{dt^2} Y_\beta^b(x)$ positiv, d. h. aber, $\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)$ und also auch $Y_\beta^b(x)$ wachsen beständig, wenn sich t von t_b nach t_a, d. h. nach dem zu $x = a$ gehörigen Werte von t bewegt. Da ferner nach (25)

$$Y_0^b(b) = 1, \quad \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=b+\epsilon} = 0$$

ist, so folgt auf dieselbe Weise, daß

$$Y_0^b(x), \quad \frac{d}{dt} Y_0^b(x) \text{ und } \frac{d^2}{dt^2} Y_0^b(x)$$

im ganzen Intervall durchaus positiv sind. Es empfiehlt sich, den Verlauf von $Y_\beta^b(x)$ und $Y_0^b(x)$ graphisch darzustellen und zwar als Funktionen von t, wie es in Figur 4 geschieht.

Nun soll sich Y_α^a in der Form $Y_\beta^b - l_1 Y_0^b$ darstellen lassen derart, daß $Y_\alpha^a(a) = 0$ ist; daraus folgt, daß l_1 positiv ist. Ebenso folgt, daß l_2 positiv ist, denn man hat ja:

$$Y_0^a = Y_\beta^b - l_2\, Y_0^b, \quad \left(\frac{d}{dt} Y_0^a(x)\right)_{x=a} = 0,$$

$$\lim_{\epsilon=0}\left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)\right)_{x=a-\epsilon} > 0,$$

$$\lim_{\epsilon=0}\left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=a-\epsilon} > 0\cdot$$

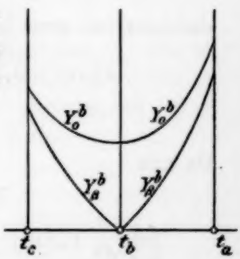


Fig. 4.

Wir untersuchen jetzt für den betrachteten Fall die gegenseitige Lage von l_1 und l_2. Es ist:

$$l_1 = \frac{Y_\beta^b(a)}{Y_0^b(a)}, \quad l_2 = \lim_{\epsilon=0}\frac{\left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)\right)_{x=a-\epsilon}}{\left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=a-\epsilon}};$$

also:

$$(30)\quad l_2 - l_1 = \lim_{\varepsilon=0} \frac{Y_0^b(a)\cdot\left(\frac{d}{dt}Y_\beta^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon} - Y_\beta^b(a)\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon}}{Y_0^b(a)\cdot\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon}}.$$

Nach dem früheren sind aber

$$Y_0^b(a) \text{ und } \lim_{\varepsilon+a}\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon}$$

positiv, ferner ist für $b \leqq x \leqq a$:

$$Y_0^b(x)\frac{d}{dt}Y_\beta^b(x) - Y_\beta^b(x)\frac{d}{dt}Y_0^b(x) = \text{const.},$$

wie aus einem bekannten Satze der linearen Differentialgleichungen unmittelbar folgt. Zur Bestimmung der Konstanten setzen wir $x = \lim_{\varepsilon=0}(b+\varepsilon)$ und finden ihren Wert gleich 1. Es folgt also aus (30) $l_2 - l_1 > 0$, d. h.

$$(31)\qquad l_2 > l_1.$$

Wir leiten jetzt die analogen Resultate für n_1 und n_2 ab, wobei wir zunächst zeigen, daß $Y_0^b(x)$ und $Y_\beta^b(x)$ auch zwischen t_b und t_c den in Figur 4 schematisch angegebenen Verlauf haben. Da nämlich:

$$Y_\beta^b(b) = 0, \qquad \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_\beta^b(x)\right)_{x=b-\varepsilon} = -1,$$

$$Y_0^b(b) = +1, \quad \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=b-\varepsilon} = 0,$$

so folgt, daß mit abnehmendem t, also auch mit abnehmendem x:

$$Y_\beta^b(x), \qquad \left|\frac{d}{dt}Y_\beta^b(x)\right|, \qquad Y_0^b(x), \qquad \left|\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right|$$

durchaus und zwar immer stärker wachsen. Es ist also sicher:

$$Y_\beta^b(c) > 0, \quad Y_0^b(c) > 0, \quad \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_\beta^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon} < 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon} < 0.$$

Da nun

$$Y_\gamma^c(c) = 0 = Y_\beta^b(c) - n_1\, Y_0^b(c),$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_0^c(x)\right)_{x=c+\varepsilon} = 0 = \lim_{\varepsilon=0}\left[\frac{d}{dt}\left(Y_\beta^b(x) - n_2\, Y_0^b(x)\right)\right]_{x=c+\varepsilon},$$

so folgt, daß $n_1 > 0$ und $n_2 > 0$ ist. Ferner hat man analog wie oben:

$$n_1 - n_2 = \lim_{\varepsilon=0}\frac{Y_\beta^b(c)\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon} - Y_0^b(c)\left(\frac{d}{dt}Y_\beta^b(c)\right)_{x=c+\varepsilon}}{Y_0^b(c)\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon}}$$

$$= \frac{1}{Y_0^b(c)\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{c+\varepsilon}} < 0.$$

Daher ist:

$$n_2 > n_1. \tag{32}$$

Zusammenfassend haben wir also:

Satz 8. *Ist* $A > 0$, $B = -bA$, *dann verschwindet weder* $Y_\beta^b(x)$ *noch* $Y_0^b(x)$ *im Intervalle* $b < x \leq a$ *oder im Intervalle* $c \leq x < b$; *es sind ferner* l_1, l_2, n_1, n_2 *positive Größen und es ist* $l_2 > l_1$, $n_2 > n_1$.

Die Gültigkeit dieses Satzes ist wesentlich von der Annahme $A > 0$ abhängig.

Um nun weiterhin zu sehen, wie sich die Größen l_1, l_2, n_1, n_2 mit abnehmendem oder wachsendem B ändern, bedienen wir uns folgenden Satzes:

Es sei

$$L(u) = \frac{d^2u}{dt^2} + \varphi(t) \cdot u = 0, \tag{33}$$

wobei $\varphi(t)$ eine stetige Funktion von t ist. Es seien ferner t_1 und t_2 reelle Zahlen, dann gilt die Identität:

$$\int_{t_1}^{t_2} (v\,L(v) - u\,L(u))\,dt = \left[v\frac{du}{dt} - u\frac{dv}{dt}\right]_{t_1}^{t_2}. \tag{34}$$

Wir betrachten jetzt speziell die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}(Ax+B)\,y = 0 \tag{35}$$

und:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}(Ax+B+\varepsilon_1)\,y = 0. \tag{35a}$$

Die Lösungen von (35a) sind analytische Funktionen von ε_1. Die zu (35) gehörigen Fundamentallösungen bezeichnen wir wie früher; die zu (35a) gehörigen Fundamentallösungen und Größen zeichnen wir durch Hinzufügung eines Index ε_1 aus, wir schreiben also z. B.:

$$Y_\alpha^{a,\varepsilon_1} = Y_\beta^{b,\varepsilon_1} - l_1^{(\varepsilon_1)}\,Y_0^{b,\varepsilon_1}.$$

Wir setzen nun in (33) bzw. (34):

$$\varphi(t) = \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot Ax,\ t_1 = t_b,\ t_2 = t_a,$$

$$u = Y_\alpha^{a,\varepsilon_1}(x), \quad v = Y_\alpha^a(x);$$

dann erhält man:

$$-\varepsilon_1 \int_{t}^{t_a} \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot Y_\alpha^{a,\varepsilon_1}(x) \cdot Y_\alpha^a(x)\,dt = l_1 - l_1^{(\varepsilon_1)}.$$

Nun ist

$$\frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

im ganzen Intervalle negativ, ferner können wir ε_1 so klein wählen, daß sich $Y_\alpha^{a,\varepsilon_1}(x)\cdot Y_\alpha^a(x)$ beliebig wenig von $(Y_\alpha^a(x))^2$ unterscheidet; für kleine positive Werte von ε_1 ist daher der Wert des Integrals negativ, also $l_1 > l_1^{(\varepsilon_1)}$, für kleine negative Werte von ε_1 ist $l_1 < l_1^{(\varepsilon_1)}$. Es folgt unmittelbar, daß derselbe Satz auch für l_2, dagegen der entgegengesetzte Satz für n_1 und n_2 gilt. Denn man sieht sofort, daß das Verhalten von $Y_\beta^b(x)$ und $Y_0^b(x)$ im Intervalle (b, c) bez. einer Abwärtsbewegung der Geraden $z = Ax + B$ dasselbe ist wie im Intervalle (b, a) bez. einer Aufwärtsbewegung dieser Geraden und umgekehrt.

Wir dürfen uns also im folgenden stets darauf beschränken, die Veränderung von l_1, l_2, n_1, n_2 bei einer Abwärtsbewegung der Geraden von der Anfangslage aus zu diskutieren. Zunächst verzeichnen wir aber den

Satz 9. *Wenn wir die Gerade $z = Ax + B$ parallel zu sich nach unten verschieben, so wachsen l_1 und l_2, n_1 und n_2 nehmen dagegen ab; verschieben wir die Gerade nach oben, so nehmen l_1 und l_2 ab, n_1 und n_2 wachsen.*

Da nun bei der Abwärtsbewegung der Geraden von der Anfangslage aus der Koeffizient von y in der Differentialgleichung in dem Intervalle (b, c) immer stärker negativ wird, so gelten die Schlüsse, durch welche wir bei der Anfangslage zeigten, daß

$$Y_\beta^b(x),\quad Y_0^b(x),\quad \left|\frac{d}{dt}Y_\beta^b(x)\right|,\quad \left|\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right|$$

im Intervalle (b, c) mit abnehmendem t fortwährend wachsen, a fortiori können daher

$$Y_\beta^b(c),\quad Y_0^b(c),\quad \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_\beta^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon}\quad \text{und}\quad \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon}$$

nicht verschwinden; dann folgt aber aus (19), daß n_1 und n_2 stets von 0 verschieden sind. Verbinden wir dies mit den Sätzen (8) und (9), so erhalten wir, da ja n_2 und n_1 nie einander gleich werden können,

Satz 10. *Ist $B < -bA$, so sind n_1 und n_2 stets positiv, $n_2 > n_1$ und $Y_\beta^b(x)$ und $Y_0^b(x)$ sind stets von 0 verschieden, wenn $c \leqq x < b$; ist $B > -bA$, so sind l_1 und l_2 stets positiv, $l_2 > l_1$ und sowohl $Y_\beta^b(x)$ als auch $Y_0^b(x)$ sind von 0 verschieden, wenn $b < x \leqq a$.*

Wir können diesen Satz auch folgendermaßen aussprechen:

Satz 11. *Wenn $B < -bA$, so erstreckt sich die in den Meridian der reellen Zahlen gedrehte Seite $b'c'$ direkt von 0 bis zu dem positiven Wert c', ohne die Kreisperipherie mehrmals zu umspannen. Ist dagegen*

$B > -bA$, *so erstreckt sich die Seite* $b'a'$ *direkt von* 0 *bis zu dem positiven* a'.

Etwas komplizierter ist die Sachlage in den beiden anderen Fällen, zu deren Untersuchung wir uns jetzt wenden. Wir wollen also z. B. die Änderung von l_1 und l_2 bei Abwärtsverschiebung der Geraden aus der Anfangslage verfolgen. Dabei wissen wir zunächst, daß sich

$$Y_\beta^b(a),\quad Y_0^b(a),\quad \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_\beta^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon},\quad \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon},\quad l_1 \text{ und } l_2$$

stetig mit B verändern. Ausgenommen dabei sind zunächst nur die Fälle, in denen l_1 und l_2 unendlich werden; in diesen Fällen ändern sich aber $\frac{1}{l_1}$ bzw. $\frac{1}{l_2}$ stetig.

Um weitergehen zu können, müssen wir jetzt das Sturmsche Oszillationstheorem heranziehen und zwar für ein Segment, an dessen beiden Enden singuläre Punkte liegen. Wir können hier nun auf zwei verschiedene Weisen verfahren. Wir können nämlich den oben erwähnten Satz des Herrn Bôcher, der aussagt, daß das Oszillationstheorem hier noch gilt, direkt benützen; wir kommen aber auch zu Ende, wenn wir nur als bekannt voraussetzen, daß wir $-B$ so groß wählen können, daß in irgend einem zwischen t_b und t_a gelegenen Intervalle die Lösungen der Differentialgleichung, also speziell auch $Y_\beta^b(x)$ und $Y_0^b(x)$ mindestens eine gegebene Anzahl von Nullstellen besitzen. Dieses folgt unmittelbar aus dem am Ende des vorigen Paragraphen zitierten Satze von Sturm, wenn wir noch hinzufügen, daß die Nullstellen irgend zweier Lösungen einer solchen Differentialgleichung sich stets trennen. Wir werden diesen letzteren Satz später noch direkt beweisen.

Es tritt nun die Frage auf, wie es möglich ist, daß bei Abwärtsbewegung unserer Geraden von der Anfangslage aus Nullstellen von $Y_\beta^b(x)$ und $Y_0^b(x)$ im Innern des Bereiches (b, a) entstehen können.

Von b aus können bei sich veränderndem B keine Nullstellen in das Innere hereinrücken, da man, sofern nur B unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, von $x = b$ aus nach rechts ein endliches Intervall derart angeben kann, daß innerhalb desselben

$$Y_0^b(x),\quad Y_\beta^b(x),\quad \frac{d}{dt}Y_0^b(x),\quad \frac{d}{dt}Y_\beta^b(x)$$

gewiß nicht verschwinden. Aber auch im Innern des Intervalles (b, a) kann keine Nullstelle entstehen; denn nehmen wir an, es verschwinde für $B = B_1$ $Y_0^b(x)$ im Punkte $t = \tau$, wobei $t_b < \tau < t_a$ ist, ferner seien die zu $B > B_1$ gehörigen $Y_0^b(x)$ in der Umgebung von $t = \tau$ durchaus von 0 verschieden, wenn B nahe genug an B_1 liegt. Nun sind $Y_0^b(x)$ und $Y_\beta^b(x)$ in der Umgebung von $t = \tau$ analytische Funktionen von t und B, es

müßte daher unter den obigen Annahmen für $B = B_1$ außer $(Y_0^b(x))_{t=\tau}$ auch noch $\left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{t=\tau}$ verschwinden; dann aber wäre für $B = B_1$ $Y_0^b(x) \equiv 0$, was widersinnig ist. Es kann also $Y_0^b(x)$ bei Verkleinerung von B nur dadurch im Innern des Intervalles Nullstellen erhalten, daß $Y_0^b(a)$ verschwindet und diese Nullstelle in das Innere des Intervalles rückt. Da man nun nach den obigen Ausführungen B so stark negativ wählen kann, daß jede Lösung der Differentialgleichung, also auch $Y_0^b(x)$ in einem zwischen b und a gelegenen Intervalle mindestens eine vorgegebene Anzahl n von Nullstellen besitzt, so folgt, daß $Y_0^b(a)$ mindestens n mal verschwinden muß, während B sich von $B = -bA$ soweit abwärts bewegt, da ja für $B = -bA$ $Y_0^b(x)$ im Intervalle (b, a) keine Nullstelle besaß. So oft aber $Y_0^b(a) = 0$ ist, muß es proportional mit $Y_a^a(x)$ sein, dieses ist aber nach (19) nur dann möglich, wenn $\frac{1}{l_1} = 0$, d. h. $l_1 = +\infty$ ist. Nun kann bei abnehmendem B die Größe l_1 im allgemeinen nur wachsen, es springt also l_1 von $+\infty$ nach $-\infty$ und durchwandert alle reellen Zahlen, bis $Y_0^b(a)$ wieder verschwindet. Da ferner l_2 stets l_1 vorauseilen muß, so durchläuft auch l_2 beliebig oft den Kreis der reellen Zahlen, ohne aber je l_1 um einen ganzen Umlauf überholen zu können. Wir haben also folgenden wichtigen Satz gewonnen:

Satz 12. *Ist $B < -bA$, so durchlaufen die Werte l_1 und l_2, wenn wir B genügend abnehmen lassen, den ganzen Kreis der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn beliebig oft, ohne daß dabei l_1 je l_2 einholen oder l_2 um einen ganzen Umlauf l_1 überholen kann; man kann also B so klein wählen, daß die Seite $b'a'$ den Kreis der reellen Zahlen eine gegebene Zahl Male umspannt. Ist dagegen $B > -bA$, so durchlaufen, wenn wir B genügend wachsen lassen, die Werte n_1 und n_2 den Kreis der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne beliebig oft, ohne daß dabei n_1 je n_2 einholen oder n_2 um einen ganzen Umlauf n_1 überholen kann; man kann also B so groß wählen, daß die in den Meridian der reellen Zahlen gedrehte Seite $b'c'$ den Kreis der reellen Zahlen eine gegebene Zahl Male umspannt.*

Einen genaueren Einblick in das Verhalten der Seitenlänge erhalten wir jetzt durch Zuhilfenahme von Satz 1 und 2. Wir entnehmen daraus speziell folgende Schlußfolgerung:

Satz 13. *Man kann stets B so bestimmen, daß die Seite $a'b'$ eine gegebene reelle Seitenlänge φ besitzt. Dagegen kann man für $a'b'$ nicht jede beliebige Seitenlänge von der Form $k\pi + \chi i$ vorschreiben, wo k eine ganze Zahl, χ eine vorgegebene reelle Größe ist.*

Aus Satz 12 können wir jetzt auch unmittelbar den ersten Teil von Satz 7 entnehmen; denn, wenn $B < -bA$ ist, sind n_1 und n_2 durchaus

positiv (vgl. Fig. 5), ebenso wenn $B > -bA$ ist, sind l_1 und l_2 positiv, also ist in dem einen Fall die Länge von $b'c'$, im anderen Falle die von $b'a'$ rein imaginär.

Wir haben aber jetzt erst gezeigt, daß man den Parameter B stets so bestimmen kann, daß die Seitenlänge von $a'b'$ einen vorgeschriebenen reellen Wert annimmt, es folgt aber daraus keineswegs, daß bei Vorgabe einer reellen Seitenlänge von $a'b'$ auch der Parameter B *eindeutig* bestimmt ist. Wir werden im nächsten Paragraphen diese Lücke ausfüllen, indem wir zeigen, daß, wenn wir für die Seitenlänge φ einen reellen Wert vorschreiben, der nicht gerade von der Form $k\pi$ ist, wo k eine ganze Zahl, der Parameter B eindeutig bestimmt ist. Was die

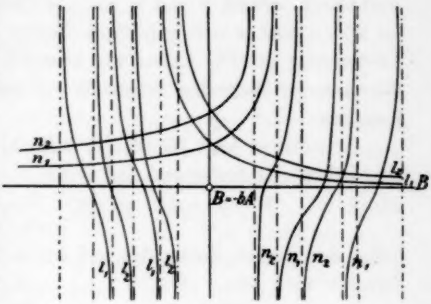


Fig. 5.

reellen Werte $k\pi$ anbetrifft, so folgt aus Satz 1 ja schon, daß es zu $\varphi = k\pi$ zwei Parameterwerte B gibt, es müßte denn gleichzeitig $l_1 = 0$, $l_2 = \infty$ oder $l_1 = \infty$, $l_2 = 0$ sein. Desgleichen kann es natürlich nicht gelingen, die eindeutige Bestimmung von B durch eine Seitenlänge $\varphi = k\pi + \psi i$ zu erweisen; denn man ersieht ja sofort aus Satz 1, daß es dazu entweder überhaupt keinen Parameterwert B oder mindestens zwei Parameterwerte gibt.

Zum Schlusse dieses Paragraphen wollen wir nur noch hervorheben, daß in der hier gegebenen Ableitung des einschlägigen Oszillationstheorems vieles enthalten ist, was sich unmittelbar auf den Fall übertragen läßt, bei dem die Exponenten α, β, γ zum Teil $\geqq 1$ sind.

§ 5.

Eindeutige Bestimmung von B durch Vorgabe einer reellen Maßzahl für die in projektiver Weise gemessene Seitenlänge von $a'b'$.

Wir bedienen uns zum Nachweise des angekündigten Satzes einer Methode, welche von Herrn Klein im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ in seinen Vorlesungen*) entwickelt wurde, die aber sehr leicht verallgemeinerungsfähig ist. Wir nehmen also an, die Seitenlänge $a'b'$ sei reell

*) Klein, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, 1894, S. 379.

und gleich der Größe $\frac{m}{n}\pi$, wobei $\frac{m}{n}$ eine rationale, nicht ganze Zahl sein soll. Wir setzen jetzt:

$$(36) \qquad d\tau = |dt| = \frac{|dx|}{|x-a|^{1-\alpha}|x-b|^{1-\beta}|x-c|^{1-\gamma}}.$$

Wenn x jetzt n mal den Weg von b nach a und von a nach b zurück durchläuft, wächst τ von t_b bis $t_b + 2n(t_a - t_b)$; dabei bezeichnen wir die zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Werte von t mit t_a und t_b. Durch die Festsetzung in (36) haben wir erreicht, daß die auf der x- und t-Achse übereinander liegenden Intervalle auf der τ-Achse nebeneinander zu liegen kommen.

Wir führen jetzt für $Y^b_\beta(x)$ und $Y^b_0(x)$ ein neues Fortsetzungsprinzip ein, indem wir festsetzen, daß sich

$$Y^b_\beta(x), \quad Y^b_0(x), \quad \frac{d}{d\tau}Y^b_\beta(x), \quad \frac{d}{d\tau}Y^b_0(x)$$

längs des ganzen Segmentes auf der τ-Achse stetig verändern, dann gilt dasselbe auch von

$$Y^a_\alpha(x), \quad Y^a_0(x), \quad \frac{d}{d\tau}Y^a_\alpha(x), \quad \frac{d}{d\tau}Y^a_0(x).$$

Nun ist für $x = a$

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y^a_0(x)\right)_{x=a-\varepsilon} = 0 = \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{d\tau}Y^a_0(x)\right)_{x=a-\varepsilon},$$

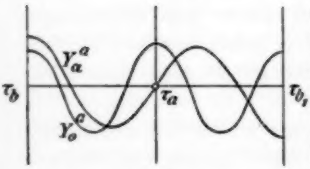


Fig. 6.

es wird also $Y^a_0(x)$ an der Stelle a infolge unserer Festsetzung gerade so reflektiert, wie es dorthin gekommen ist, d. h. auf dem Rückwege von a aus hat $Y^a_0(x)$ denselben Wert in irgend einem zwischen a und b gelegenen Punkte ξ, den es auf dem Hinwege zu a hatte. Anders aber verhält sich $Y^a_\alpha(x)$ bei der Reflexion. Es ist nämlich $Y^a_\alpha(a) = 0$, dagegen ist auf dem Hinwege

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y^a_\alpha(x)\right)_{x=a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{d\tau}Y^a_\alpha(x)\right)_{x=a-\varepsilon},$$

auf dem Rückwege

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y^a_\alpha(x)\right)_{x=a-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{d\tau}Y^a_\alpha(x)\right)_{x=a-\varepsilon}.$$

Nun ändert sich die Differentialgleichung nicht, wenn wir τ statt t einführen, und wir haben in $Y^a_\alpha(x)$ vor und nach der Reflektion zwei Lösungen der Differentialgleichung, deren Anfangswerte gerade das entgegengesetzte Zeichen haben, also haben diese Lösungen durchaus gleich große absolute Werte, aber entgegengesetzte Vorzeichen, d. h. es wird gemäß unserer Festsetzung $Y^a_\alpha(x)$ als $-Y^a_\alpha(x)$ an a reflektiert. Als Funk-

tion von τ haben Y_0^a und Y_α^a hiernach den in Figur 6 verzeichneten Verlauf; wir verstehen dabei unter τ_{b_1} den Wert von τ in b nach der ersten Reflexion.

Was bedeutet das für $\eta = \frac{Y_\beta^b(x)}{Y_0^b(x)}$? Es gehe durch die Reflexion in a η in η_1 über, dann ist nach (19):

$$\frac{\eta - l_1}{\eta - l_2} = -\frac{\eta_1 - l_1}{\eta_1 - l_2},$$

d. h. aber, die η-Kugel erleidet bei der Reflexion eine Drehung von der Amplitude π um $a'a''$ als Achse. a' uud a'' bleiben bei dieser Drehung liegen, b' und b'' gehen in zwei andere Punkte b_1' und b_1'' des reellen Zahlenkreises über, und zwar geht $b_1'b_1''$ durch den Schnittpunkt von $b'b''$ mit $a'a''$, da ja dieser Punkt bei der Drehung liegen bleibt. Die Länge der Seite $a'b_1'$ ist natürlich gleich der von $b'a'$. Der Reflexion an b entspricht in gleicher Weise eine Drehung der Kugel von der Amplitude π mit $b_1'b_1''$ als Achse, a' und a'' gehen dabei über in a_1' und a_1''. n Reflexionen an a und b entsprechen also hintereinander ausgeführten Drehungen von der Amplitude π um die Achsen

$$a'a''; \; b_1'b_1''; \; a_1'a_1''; \; b_2'b_2''; \ldots; \; a'_{n-2}a''_{n-2}; \; b'_{n-1}b''_{n-1}; \; a'_{n-1}a''_{n-1}; \; b_n'b_n''.$$

Dabei geht a_ν' und a_ν'' aus $a'_{\nu-1}$ und $a''_{\nu-1}$ durch eine Drehung um die Achse $b_\nu'b_\nu''$ hervor nnd b_μ' bzw. b_μ'' aus $b'_{\mu-1}$ bzw. $b''_{\mu-1}$ durch eine Drehung um die Achse $a'_{\mu-1}a''_{\mu-1}$. Bei jeder Drehung bleibt der Scheitel des die Seitenlänge messenden Winkels liegen und jeder Winkel hat die Größe $\frac{m}{n}\pi$. Die Länge des zwischen b' und b_n' liegenden Bogens ist also $\frac{m}{n}\pi \cdot 2n = 2m\pi$, d. h. der Bogen $b'b_n'$ durchläuft von b' ausgehend den Kreis der reellen Zahlen gerade m mal und endigt wieder in b'.

Unter Festhaltung des am Anfang des Paragraphen ausgesprochenen Fortsetzungsprinzips muß also η im Innern des Intervalles zwischen $\tau_b = t_b$ und $\tau_{b_n} = t_b + 2n(t_a - t_b)$ genau m mal unendlich werden und außer in τ_b und in τ_{b_n} noch in $m-1$ Stellen im Innern dieses Intervalles verschwinden. Um dieses zu erreichen, müssen wir in der Differentialgleichung

$$(37) \qquad \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}(Ax+B)y = 0$$

den Parameter B so bestimmen können, daß im Intervalle (τ_b, τ_{b_n}) eine Lösung existiert, die im Innern des Intervalles stetig ist, eine stetige erste Ableitung besitzt und außer in τ_b und τ_{b_n} noch in $m-1$ Punkten im Innern des Intervalles verschwindet.

Dieses ist aber ein ganz gewöhnliches Oszillationstheorem, welches nur insofern von den sonst gebrauchten Oszillationstheoremen abweicht, als

im Innern und auf dem Rande des Intervalles singuläre Stellen liegen, die von demselben Charakter sind, wie die im vorigen Paragraphen behandelten. Dabei soll aber jetzt die gewünschte Lösung, sowie ihre nach τ genommene erste Ableitung über die im Innern gelegenen singulären Stellen hinweg stetig fortgesetzt werden. Man zeigt nun, genau wie im letzten Paragraphen, daß man den Parameter B immer so bestimmen kann, daß den gewünschten Oszillationsbedingungen*) genügt wird; wir können überdies dieses Resultat selbst, ohne neue Oszillationsbetrachtungen, aus dem vorigen Paragraphen übernehmen. Es bleibt also nur mehr zu beweisen, daß auch der Parameter B durch diese Oszillationsbedingungen *eindeutig* bestimmt ist. Um zu zeigen, daß es nicht zwei Parameter, B_1 und B_2 (es sei dabei $B_1 > B_2$) geben kann, für welche je eine Lösung $Y_\beta^b(x)$ bzw. $\overline{Y}_\beta^b(x)$ der Differentialgleichung existiert, die für $\tau = \tau_b$ und $\tau = \tau_{b_n}$ verschwindet und im Innern des Intervalles $m-1$ Nullstellen hat, machen wir folgende Hilfsbetrachtung.

Es sei τ_1 ein Punkt des Intervalles, u und v je eine Lösung mit stetiger erster Ableitung von (37) für $B = B_1$ bzw. $B = B_2$; ferner sei $u(\tau_1) = 0$ und $v(\tau_1) = 0$. Wir können ferner es immer so einrichten, daß $u(\tau)$ und $v(\tau)$ für die Werte von τ, die $> \tau_1$ und in genügender Nähe von τ_1 sind, positiv ausfallen. Wir zeigen dann, daß die auf τ_1 folgende Nullstelle τ_2 von $u(\tau)$ weiter entfernt ist, als die nächste Nullstelle τ_3 von $v(\tau)$. Denn nehmen wir zunächst an, es liege zwischen τ_1 und τ_2 keine Nullstelle von $u(\tau)$ und $v(\tau)$. Nun ist nach (34)

$$(38) \qquad \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}(B_1 - B_2)\,u(\tau)\,v(\tau)\,d\tau$$
$$= \left[u\frac{dv}{d\tau} - v\frac{du}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} = \left(-v\cdot\frac{du}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_2}.$$

Es ist aber der Ausdruck unter dem Integralzeichen zwischen τ_1 und τ_2 durchaus negativ, also hat das ganze Integral einen negativen Wert, ferner ist $\left(\frac{du}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_2}$ negativ, da ja $u(\tau_2) = 0$ und $u(\tau)$ vorher positiv war, es muß also $v(\tau_2)$ negativ sein, also $v(\tau)$ zwischen $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ eine Nullstelle besitzen, da wir annehmen, daß $v(\tau)$ für $\tau > \tau_1$ zunächst positiv sein soll.

Diesen Hilfssatz verbinden wir mit einem zweiten Hilfssatz, den wir schon früher benützten und der aussagt, daß zwischen zwei Nullstellen einer Lösung u_1 der Differentialgleichung (37) jede andere Lösung u_2 der-

*) Unter Oszillationsbedingungen verstehen wir die Grenzbedingungen und die Zahl der Nullstellen.

selben Differentialgleichung mindestens eine Nullstelle besitzen muß. Der Beweis dieses zweiten Hilfssatzes folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$u_1(\tau)\frac{d}{d\tau}u_2(\tau) - u_2(\tau)\frac{d}{d\tau}u_1(\tau) = \text{const.};$$

verschwindet nämlich u_1 für $\tau = \tau_4$ und $\tau = \tau_5$, so ist:

$$u_2(\tau_4)\left(\frac{d}{d\tau}u_1(\tau)\right)_{\tau=\tau_4} = u_2(\tau_5)\left(\frac{d}{d\tau}u_1(\tau)\right)_{\tau=\tau_5},$$

und da

$$\left(\frac{d}{d\tau}u_1(\tau)\right)_{\tau=\tau_4} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d}{d\tau}u_1(\tau)\right)_{\tau=\tau_5}$$

entgegengesetzte Zeichen haben, so haben auch $u_2(\tau_4)$ und $u_2(\tau_5)$ entgegengesetzte Zeichen.

Nun folgt aus dem ersten Hilfssatze, daß die $\tau = \tau_b$ zunächst liegende Nullstelle von $Y_\beta^b(\tau)$ weiter von $\tau = \tau_b$ wegliegt, als die nächstliegende Nullstelle von $\overline{Y}_\beta^b(\tau)$; wir nehmen nun an, diese Eigenschaft gelte bis zu den ϱ^{ten} Nullstellen, d. h. es liege die ϱ^{te} Nullstelle von $Y_\beta^b(\tau)$ weiter von $\tau = \tau_b$ entfernt als die ϱ^{te} Nullstelle von $\overline{Y}_\beta^b(\tau)$, dann liegt auch die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Nullstelle von $Y_\beta^b(\tau)$ weiter von $\tau = \tau_b$ entfernt als die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Nullstelle von $\overline{Y}_\beta^b(\tau)$. Denn wählen wir für τ_1 die ϱ^{te} Nullstelle, für τ_2 die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Nullstelle von $Y_\beta^b(\tau)$, für u $Y_\beta^b(\tau)$, dann existiert nach dem ersten Hilfssatze für B_2 eine Lösung $v(\tau)$, die für $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_3 < \tau_2$ verschwindet. Nach dem zweiten Hilfssatze muß aber dann zwischen τ_1 und τ_3 auch eine Nullstelle von $\overline{Y}_\beta^b(\tau)$, also zum mindesten die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Nullstelle von $\overline{Y}_\beta^b(\tau)$ liegen. Daraus folgt aber unmittelbar, daß $Y_\beta^b(\tau)$ und $\overline{Y}_\beta^b(\tau)$ nicht gleichzeitig in τ_b und τ_{b_n} verschwinden und im Innern gleich viele Nullstellen besitzen können. Also ist B durch die Oszillationsforderungen eindeutig festgelegt.

Damit ist bewiesen, daß durch Vorgabe einer Seitenlänge in der Form $\frac{m}{n}\pi$ der Parameter B eindeutig bestimmt ist, sofern $\frac{m}{n}$ keine ganze Zahl ist. Es folgt aber hieraus in Verbindung mit den Sätzen des letzten Paragraphen, daß durch Vorgabe irgend einer reellen Seitenlänge ψ_1, die gerade kein ganzes Vielfaches von π ist, der Parameter B eindeutig festgelegt ist. Denn es ergibt sich ja aus jenen Untersuchungen, daß mit der Seitenlänge ψ sich umgekehrt auch B stetig ändert, sofern ψ kein ganzes Vielfaches von π ist, so daß wir stets rationale Werte von ψ angeben können, die teils größer sind als ψ_1, teils kleiner sind und zu beliebig nahe benachbarten Werten von B gehören.

Man sieht überdies leicht ein, daß das Resultat dieses Paragraphen von der Annahme $A > 0$ unabhängig ist, da sich alle Untersuchungen nur auf das eine Intervall (b, a) beziehen, und alle Sätze, die wir be-

nützten, von den Eigenschaften, die wir aus der speziellen Anfangslage der Geraden $z = Ax + B$ gewannen, unabhängig sind. Wir haben also ganz allgemein den

Satz 14. *Wenn wir für die in projektiver Maßbestimmung gemessene Länge ψ der Seite $a'b'$ einen beliebigen reellen Wert vorschreiben, so ist dadurch der Parameter B* **eindeutig** *festgelegt. Ausgenommen ist dabei nur der Fall, in dem $\varphi = k\pi$ und k eine ganze Zahl ist; dann gibt es stets zwei und nur zwei Parameterwerte B.*

§ 6.

Festlegung des Parameters B durch eine Kantenlänge, wenn $A > 0$.

Nach Satz 3 ist die Kantenlänge auf der Achse $b'b''$ wesentlich bestimmt durch den Quotienten $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$. Wir gehen wieder von der Anfangslage der Geraden $z = Ax + B$ für $B = -bA$ aus, bei der sowohl l_1 und l_2, als auch n_1 und n_2 positiv sind. Aus Satz 13 folgt, daß wir B von dem gewählten Anfangswerte aus so weit wachsen lassen können, daß n_2 das erste Mal ∞ wird; das geschehe für $B = \beta_0$; n_1 ist dabei noch positiv, ebenso l_1 und l_2; für $B = \beta_0$ ist also $n_1 n_2 = \infty$, $l_1 l_2 > 0$. Lassen wir aber jetzt von $B = \beta_0$ aus B wieder abnehmen, so nimmt n_1 und n_2, also auch $n_1 n_2$ kontinuierlich ab, dagegen wachsen l_1 und l_2, also auch $l_1 l_2$, bis $l_2 = \infty$ wird, was natürlich erst für $B < -bA$ eintreten kann; es geschehe für $B = \beta_1$. Der Quotient $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$ nimmt also, wenn B von β_0 nach β_1 geht, alle Werte zwischen 0 und ∞ einmal und nur einmal an, da ja der Zähler kontinuierlich wächst, der Nenner dagegen kontinuierlich abnimmt; die Seiten $b'c'$ und $b'a'$ haben dabei nach Satz 1 rein imaginäre Werte. Wir haben also:

Satz 15. *Wenn A positiv ist, kann man den Parameter B auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daß die Kantenlänge auf der Achse $b'b''$ irgend einen zwischen 0 und ∞ gelegenen reellen Wert besitzt und die beiden Seiten $b'c'$ und $b'a'$ rein imaginäre Längen haben.*

Speziell können wir daraus folgendes Theorem, das sogenannte *Grundtheorem**) entnehmen:

*) Nach der Ausdrucksweise von Herrn Klein in den Math. Annalen Bd. 64. Das Grundtheorem deckt sich in dem Falle, daß $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reziproke Werte ganzer Zahlen sind, mit dem sogenannten *Fundamentaltheoreme* der automorphen Funktionen. (Vergl. Schluß des § 7.) Die Bestimmung des Parameters B für das Grundtheorem sowie für die ersten Obertheoreme wurde für den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ im Anschluß an die von Herrn Klein im Sommer 1907 gehaltenen Seminarvorträge von Herrn Rothe mit Hilfe der elliptischen Funktionen rechnerisch durchgeführt. (Monatshefte für Mathematik und Physik, 19. Jahrgang, S. 258 ff.)

Satz 16. *Wenn A_3 positiv ist, kann man den Parameter B auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daß das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt, den die Seiten $b'a'$ und $b'c'$ nicht schneiden.*

Denn aus den Untersuchungen am Ende des § 1 folgt unmittelbar, daß das Viereck dann und nur dann einen Orthogonalkreis besitzt, wenn $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2} = 1$, also die Kantenlänge auf $b'b''$ den Wert 0 hat. Da nun l_1 und l_2 positiv sind, so liegt der Schnittpunkt der Achse $a'a''$ und $b'b''$ außerhalb der Kugel, woraus folgt, daß der Orthogonalkreis reell ist. Es sei nun in Figur 7 $O_1 O_2$ die Schnittlinie dieses Orthogonalkreises mit dem Meridian der reellen Zahlen, dann lehrt ein Blick auf die Figur in Verbindung mit Satz 1, daß die Forderung, die Seite $b'a'$, soll den Orthogonalkreis nicht schneiden, identisch ist mit der Forderung, daß $b'a'$ eine rein imaginäre Seitenlänge besitzen soll. Über das Verhalten der Seiten $d'a'$ und $d'b'$ in bezug auf den Orthogonalkreis werden erst die folgenden Paragraphen Aufschluß geben.

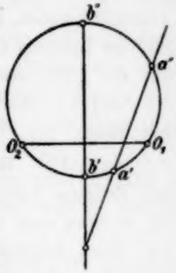


Fig. 7.

Wir lassen jetzt B von β_1 an weiter abnehmen, n_1 und n_2 bleiben nach wie vor positiv, l_1 ist zunächst noch positiv, l_2 dagegen negativ, $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$ ist also für die Werte $B < \beta_1$ zunächst negativ und sein absoluter Betrag nimmt zunächst im allgemeinen ab, wobei aber Schwankungen nicht ausgeschlossen sind. Es sind dann zwei Fälle zu unterscheiden wie wir schon früher bemerkt haben. Entweder wird nämlich bei fortwährendem Abnehmen von B zuerst l_2 0 und erst später $l_1 = \infty$, oder diese beiden Ereignisse treten in umgekehrter Reihenfolge ein. Im ersten Falle wird, wenn B von β_1 an abnimmt, $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$ zunächst alle Werte zwischen $-\infty$ und 0 mindestens einmal annehmen, dann aber alle Werte zwischen 0 und $+\infty$ einmal und nur einmal, bis $l_1 = +\infty$ geworden ist. Es durchläuft dabei die Kantenlänge auf $b'b''$ zunächst alle Werte zwischen $C\pi i + \infty$ und $C\pi i - \infty$ von der Form $C\pi i + D$, wobei D irgend eine reelle Größe ist, jeden solchen Wert mindestens einmal annehmend; dann aber durchläuft sie alle reellen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$, jeden Wert einmal und nur einmal annehmend. Solange dabei $l_2 < 0$, ist die Länge der Seite $b'a'$ rein reell, aber $\leqq \pi$, wenn $l_2 > 0$, ist die Seitenlänge von der Form $\pi + \psi i$, wobei ψ eine reelle Größe ist. Ganz anders aber ist das Verhalten der Kantenlänge im zweiten Falle, in dem l_1 zuerst ∞ wird. Jetzt durchläuft die Kantenlänge nicht mehr alle Werte zwischen $C\pi i + \infty$ und $C\pi i - \infty$, sondern sie kehrt nach

$C\pi i+\infty$ zurück, wenn $l_1=\infty$ wird. Von da an durchwandert $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$ alle Werte zwischen ∞ und 0, aber wir können nicht mehr direkt schließen, daß der Bruch dabei monoton abnimmt, da ja Zähler und Nenner gleichzeitig abnehmen. Aber jedenfalls nimmt dabei die Kantenlänge jeden reellen Wert zum mindesten einmal an. Dabei ist die Länge von $a'b'$ reell und kleiner als π, solange l_1 positiv ist, dagegen von der Form $\pi+\psi i$, wenn l_1 und l_2 negativ sind. Nachdem wir so den einfachsten Fall völlig diskutiert haben, können wir gleich anschließend an Satz 1 im allgemeinsten Fall das Resultat aussprechen, wobei uns jedoch aus naheliegenden Gründen*) nur die Fälle interessieren, in denen die Kantenlänge reell ist, die Seiten $a'b'$ und $b'c'$ also komplexe bzw. rein imaginäre Längen besitzen. Man hat dann:

Satz 17. *Wenn die Länge von $a'b'$ die Form $k\pi+\psi i$ hat, wobei k eine beliebige vorgegebene ganze Zahl, ψ eine noch unbekannte, reelle Größe ist, so kann man den Parameter B stets so bestimmen, daß die Kantenlänge $b'b''$ einen beliebig vorgeschriebenen reellen Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt. Ist speziell k eine solche ganze Zahl, daß die Werte l_1 und l_2, zu denen Seiten von der Länge $k\pi+\psi i$ gehören (wobei ψ irgend eine reelle Größe ist), positiv sind, so ist der Parameter B durch Vorgabe von k und der Kantenlänge eindeutig bestimmt.*

In den anderen Fällen, in denen l_1 und l_2 beide negativ sind, können wir über die eindeutige Bestimmtheit des Parameters B nichts Sicheres aussagen. Es ist dabei noch hervorzuheben, daß, wenn l_1 und l_2 bei irgend einem Werte von ψ positiv bzw. negativ sind, sie bei festgehaltenem k für jedes reelle ψ positiv bzw. negativ sind.

Der Beweis des Satzes 17 ist nun folgender: Soll die Länge von $a'b'$ die Form $k\pi+\psi i$ besitzen, so muß die Achse $a'a''$ die Achse $b'b''$ außerhalb der Kugel schneiden, also müssen l_1 und l_2 gleichzeitig positiv oder negativ sein. l_1 und l_2 können aber, wenn wir von dem in Satz 15 erledigten Fall absehen, nur dadurch bei abnehmendem B beide positive Werte annehmen, daß die eine von den beiden Größen schon positiv ist, die andere durch 0 hindurchgehend positiv wird, was für $B=B_0$ eintreten möge. Dann wachsen aber l_1 und l_2 mit abnehmendem B, bis für $B=B_1$ diejenige Größe, die am Anfang schon positiv war, ∞ wird. n_1 und n_2 nehmen aber mit abnehmendem B ab und sind gewiß, da $B<-bA$, positiv; also wächst $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$ von 0 bis ∞, jeden Wert einmal

*) Man sieht ja aus dem eben behandelten Fall, daß man nicht immer reelle B zu einer Kantenlänge von der Form $C\pi i+D$ bestimmen kann, wenn D eine beliebig vorgegebene Konstante ist.

und nur einmal annehmend, wenn B von B_0 bis B_1 abnimmt. Andererseits können l_1 und l_2 nur dadurch beide bei abnehmendem B negative Werte annehmen, daß die eine der beiden Größen schon negativ ist, die andere durch ∞ hindurchgehend negativ wird, was für $B = B_2$ eintreten möge. Dann nehmen die Größen $|l_1|$ und $|l_2|$ mit weiter abnehmenden B ab, bis für $B = B_3$ die eine verschwindet. $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$ nimmt also von $+\infty$ bis 0 ab, wenn B von B_2 bis B_3 sinkt, und zwar nimmt $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$ jeden zwischen ∞ und 0 liegenden Wert mindestens einmal an; daß aber jeder solche Wert wirklich nur einmal angenommen wird, dürfen wir nicht schließen, da ja Zähler und Nenner gleichzeitig abnehmen.

Damit sind alle Aussagen des Satzes 17 bewiesen. Als Spezialfall von Satz 17 haben wir:

Satz 18. *Wenn A positiv ist, kann man den Parameter B stets so bestimmen, daß das Viereck einen (reellen) Orthogonalkreis besitzt, den die Seite $a'b'$ genau k mal schneidet.*

Damit ist die Existenz der sogenannten „Obertheoreme“*) bewiesen. Über die eindeutige Festlegung von B durch diese Bedingung gilt dasselbe wie bei Satz 17.

Es tritt jetzt die Aufgabe an uns heran, das Verhalten der beiden nicht durch b gehenden Seiten zu untersuchen; dieses wird uns dann erlauben, die Sätze 17 und 18 noch weiter zu vertiefen.

§ 7.

Nähere Ausführungen für den Fall, daß die Winkelsumme im Vierecke kleiner ist als 2π. (Fall I des § 3.)

Wir haben jetzt das Material beisammen, um in dem in § 3 mit I bezeichneten Falle die Untersuchung über die Abhängigkeit der Maßzahlen des Viereckes vom Parameter B zum Abschluß zu bringen.

Wir benützen dazu den 1. Teil des Satzes 7, dessen Beweis sich am Schlusse des § 4 findet. Es sind nämlich hier A_a, A_b, A_c, A_d positiv, folglich kann jetzt durch eine jede Ecke des Vierecks höchstens eine Seite gehen, deren Länge einen von 0 verschiedenen reellen Wert besitzt. Nun kann man nach Satz 18 bei positivem A_d die Größe B_d immer so bestimmen, daß das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt, den die Seite $a'b'$ k mal schneidet. Dann hat die Länge von $a'b'$ die Form $k\pi + \psi i$, wo ψ irgend eine reelle Größe ist. Ist daher die ganze Zahl $k \geqq 1$, so kann weder die Seite $b'c'$ noch $a'd'$ nach dem 1. Teil des Satzes 7 den Ortho-

*) Vergl. Klein, Math. Annalen, Bd. 64, Seite 185.

gonalkreis schneiden. Der von den Vierecksseiten gebildete Linienzug geht aber von b' aus und endet in demselben Punkte; nun schneidet $b'a'$ den Orthogonalkreis k mal, und zwar müssen wir uns übereinanderliegende Punkte der Seite $b'a'$ in verschiedenen Blättern einer Riemannschen Fläche liegend denken. Es soll aber der Linienzug, der von $a'd'$, $d'c'$, $c'b'$ gebildet wird, von a' nach b' zurückführen, wobei $a'd'$ und $c'b'$ den Orthogonalkreis nicht schneiden. Dieses ist nur möglich, wenn $c'd'$ den Orthogonalkreis k mal schneidet.

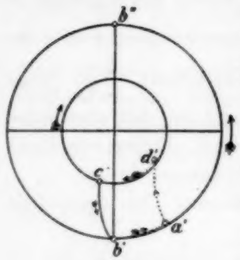


Fig. 8.

Ist aber $k = 0$ und schneidet auch $b'c'$ den Orthogonalkreis nicht (Satz 16), so können auch die beiden anderen Seiten den Orthogonalkreis nicht schneiden. Denn $c'd'$ und $d'a'$ können den Orthogonalkreis nicht alle beide schneiden, wenn aber $c'd'$ allein den Orthogonalkreis schneidet, so würde d' auf der anderen Seite des Orthogonalkreises oder gar in einem anderen Blatte wie a', b', c' liegen, was doch unmöglich ist, da $d'a'$ den Orthogonalkreis nicht schneiden kann. Wir haben also:

Satz 19. *Ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta' - \delta'' < 2$, so schneidet beim Grundtheorem keine Vierecksseite den Orthogonalkreis, bei den Obertheoremen gibt es immer zwei gegenüberliegende Seiten, die den Orthogonalkreis nicht schneiden; die beiden anderen Seiten schneiden den Orthogonalkreis gleich oft.*

Wir können den eben gewonnenen Satz noch etwas verallgemeinern. Wir verstehen unter ψ_1, ψ_2, ψ_3 u. s. f. im folgenden beliebige reelle Größen. Es sei dann bei der Existenz eines Orthogonalkreises die Länge von $b'a'$ gleich $k\pi + \psi_1 i$, wobei k Null oder eine ganze Zahl ist; dann ist die Länge von $c'd'$ von der Form $k\pi + \psi_2 i$. Lassen wir jetzt B_d weiter abnehmen, so wird die Länge von $b'a'$ zunächst die Form $k\pi$ erhalten, dann auf $(k+1)\pi$ wachsen und bei abermaligem Auftreten eines Orthogonalkreises von der Form $(k+1)\pi + \psi_3 i$ sein. Nun verhält sich nach § 3 das Wachsen und Sinken der Seite $c'd'$ bei Veränderungen von B_d genau wie das Wachsen und Sinken der Seite $b'a'$, d. h. die Länge der Seite $c'd'$ wird bei abnehmendem B_d zunächst die Form $k\pi$ annehmen, dann auf $(k+1)\pi$ wachsen und bei abermaliger Existenz eines Orthogonalkreises die Form $(k+1)\pi + \psi_4 i$ besitzen. Es folgt also:

Satz 20. *Ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta' - \delta'' < 2$, so ist der Unterschied zwischen den reellen Teilen der Längen gegenüberliegender Seiten nie $> \pi$.*

Die gleichzeitige Betrachtung zweier gegenüberliegender Seiten führt nun weiter zu:

Satz 21. *Es sei $\alpha + \beta + \gamma + \delta' - \delta'' < 2$, ferner k eine ungerade Zahl. Wenn dann für die Seite $a'b'$, also auch für die Seite $c'd'$ vor-*

geschrieben ist, daß sie sich in der Form $k\pi + \psi i$ darstellen läßt, so hat mindestens eine der beiden Achsen $b'b''$ oder $a'a''$ die Eigenschaft, daß durch Vorgabe irgend einer reellen Länge für die auf ihr liegende Kante B eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Wenn k eine solche ganze Zahl ist, daß die Werte l_1 und l_2, bei denen die Seitenlänge von $a'b'$ die Form $k\pi + \psi i$ besitzt, positiv sind, so folgt schon aus Satz 17, daß der Parameter B durch Vorgabe irgend einer reellen Kantenlänge auf $b'b''$ eindeutig bestimmt ist. Wir haben also nur den Fall zu betrachten, daß l_1 und l_2 negativ sind. Wir gehen dann von einem Werte B aus, für den das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt und $a'b'$ eine Länge von der Form $k\pi + \psi i$ hat. Die Existenz eines solchen B ist durch Satz 18 gewährleistet. Nun ist k ungerade, also schneidet $b'a'$ den Orthogonalkreis in einer ungeraden Anzahl von Punkten; da ferner l_1 und l_2 beide negativ sind, so folgt, daß $l_2 > l_1$, d. h. daß a'' näher an b' liegen muß als a' (Fig. 9). Wir erteilen jetzt, was erlaubt ist, dem singulären Punkte a dieselbe Rolle, die früher b spielte, d. h. wir nehmen an, daß η in a' den Wert 0, in a'' den Wert ∞ hat. Früher wählten wir nun für die positiven Werte aller reellen η denjenigen der beiden zwischen 0 und ∞ liegenden Kreisbogen, durch den die von b' ausgehende Seite $b'a'$ zunächst ging. Dementsprechend müssen wir jetzt als Träger der positiven Werte der reellen η denjenigen der beiden zwischen a' und a'' liegenden Kreisbogen wählen, durch den die von a' ausgehende Seite $a'b'$ zunächst geht, um die für b abgeleiteten Resultate unmittelbar übertragen zu können. Diesem entsprechend müssen wir also bei der neuen Wertverteilung η in b' und b'' positive reelle Werte m_1 und m_2 zuweisen; da nun m_1 und m_2 in bezug auf die Achse $a'a''$ dieselbe Rolle spielen wie l_1 und l_2 in bezug auf $b'b''$, so folgt, nach Satz 17, daß durch Vorgabe der Kantenlänge auf $a'a''$ jetzt B eindeutig bestimmt ist.

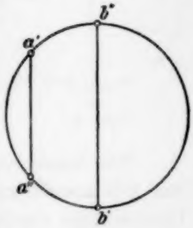


Fig. 9.

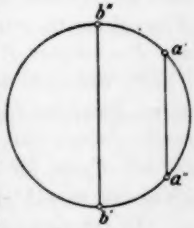


Fig. 10.

Sind übrigens, wie wir zuerst annahmen, l_1 und l_2 positiv, so sind, bei analoger Bezeichnung wie oben, m_1 und m_2 negativ, wenn k wiederum ungerade ist. Denn geben wir wieder η in a' den Wert 0, in a'' den Wert ∞, so liegen diesmal konsequenterweise die positiven η auf demjenigen Bogen zwischen a' und a'', der b' und b'' nicht enthält. Es haben also bei ungeradem k von den vier Kanten zum mindesten zwei und zwar zwei gegenüberliegende Kanten die Eigenschaft, daß durch Vorgabe einer

reellen Kantenlänge auf ihnen neben der Forderung für die Form einer Seitenlänge der Parameter B eindeutig bestimmt ist.

Schreiben wir nun speziell die Kantenlänge 0 bei ungeradem k vor, so ist dadurch B eindeutig bestimmt, da ja doch sicher eine, ja sogar zwei Achsen existieren, die unter den angegebenen Bedingungen nur für einen Wert B die Kantenlänge 0 haben können. Es folgt also:

Satz 22: *Wenn k eine ungerade Zahl ist, so ist durch die Forderung, daß das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt, den eine Seite k mal schneidet, der Parameter B* **eindeutig** *bestimmt.*

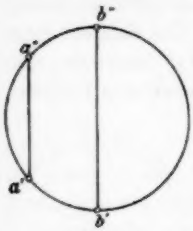


Fig. 11.

Es liegt jetzt die Frage nahe, ob man nicht bei geradem k einen analogen Schluß machen kann. Dies ist jedoch zu verneinen, wie ein Blick auf Fig. 11 lehrt. Denn wenn wiederum η in a' den Wert 0, in a'' den Wert ∞ haben soll, so müssen wir jetzt konsequenterweise dem Bogen zwischen $a'a''$, der b' und b'' nicht enthält, die positiven reellen Werte η zuordnen, da ja die Seite $a'b'$, von a' ausgehend, Punkte dieses Bogens zunächst enthält. Es sind also nach diesen Festsetzungen auch m_1 und m_2 negativ.

Wir haben nun diese Untersuchungen noch auf die Fälle II und III von § 3 auszudehnen, wobei sich jedoch nur bezüglich der Grundtheoreme Unterschiede ergeben werden, für die Obertheoreme ergeben sich in allen drei Fällen dieselben Verhältnisse. Ehe wir aber darauf eingehen, wollen wir die bisherigen in einzelnen Sätzen zerstreuten Resultate in einen Satz zusammenfassen.

Hauptsatz. *Für Kreisvierecke, bei denen jeder Winkel >0 und $<\pi$, die Winkelsumme $<2\pi$ ist, und für die damit verknüpfte Differentialgleichung* (3) *gelten folgende Sätze:*

1) *Schreibt man der Differentialgleichung neben den Winkeln des Kreisvierecks und den singulären Punkten noch für eine Vierecksseite eine bestimmte reelle Länge vor, so ist dadurch der Parameter B eindeutig bestimmt.*

2) *Schreibt man dagegen neben den Winkeln und den singulären Punkten für irgend eine Kante des Vierecks eine bestimmte reelle Länge vor, verlangt man ferner, daß sich eine Seitenlänge in der Form $k\pi + \psi i$ darstellen läßt, wo k eine gegebene ganze Zahl ist, so gibt es dazu stets mindestens einen Parameterwert B.*

3) *Ist das in* 2) *vorkommende k ungerade oder* 0, *so gibt es zum mindesten zwei Kanten, welche die Eigenschaft haben, daß B auch eindeutig festgelegt ist, wenn man für eine von ihnen eine reelle Länge vorschreibt.*

Zum Schlusse dieser Untersuchungen soll nochmals hervorgehoben werden, daß mit den obigen Betrachtungen ein *neuer* Beweis des Fundamentaltheorems der automorphen Funktionen (vergl. Klein, Math. Annalen Band 20) — natürlich vorläufig nur für den Fall von vier reellen singulären Punkten — wirklich durchgeführt ist, indem gezeigt ist, daß man nach Vorgabe von vier reell angenommenen singulären Stellen und der dazu gehörigen Exponentendifferenzen als reziproke ganze Zahlen den noch zur Verfügung stehenden akzessorischen Parameter eindeutig so bestimmen kann, daß das dazu gehörige Viereck einen Orthogonalkreis besitzt, der von keiner Vierecksseite geschnitten wird.

§ 8.

Das Oszillationstheorem bei negativem A.

Wir gehen wieder auf die Differentialgleichung

$$(23)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}\,|x-b|^{2-2\beta}\,|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}(Ax+B)y = 0$$

zurück, in der jetzt A negativ sein soll.

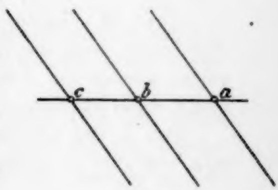


Fig. 12.

Setzen wir zunächst $B = -Aa$, dann zeigt man, wie bei Satz 8, daß l_1 und l_2 positiv sind, und daß $Y_\beta^b(x)$ und $Y_0^b(x)$ im Intervalle $b < x \leqq a$ nicht verschwinden. Die Seite $b'a'$ besitzt also eine rein imaginäre Länge. Wir sagen nun im folgenden, wenn, wie hier, der Koeffizient von y in (23) im ganzen Intervalle durchaus negativ ist, daß das Intervall durchaus nichtoszillatorisch ist. Wir lassen jetzt B bis $-Ab$ abnehmen. Dann ist der Koeffizient von y in (23) durchaus positiv im Intervalle (b, a); ist also y für irgend eine Stelle des Intervalles positiv, so ist hier $\frac{d^2y}{dt^2}$ negativ. Betrachten wir nun speziell Y_0^b; für dieses ist $\left(\frac{d}{dt}Y_0^b\right)_{x=b} = 0$, $Y_0^b(b) = 1$; es ist also $\frac{d}{dt}Y_0^b(x)$ gewiß so lange negativ, als $Y_0^b(x)$ positiv ist, da ja $\frac{d}{dt}Y_0^b(x)$ mit wachsendem x fortwährend abnimmt. Es ist also entweder für $x = a$ $\lim\limits_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}Y_0^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon} < 0$, oder $Y_0^b(x)$ hat zwischen b und a schon eine Nullstelle; in beiden Fällen hat die Seite $b'a'$ eine Länge mit einem von 0 verschiedenen reellen Teil. Ist $B < -bA$, so folgt a fortiori, daß die Länge von $b'a'$ einen von 0 verschiedenen reellen Teil besitzt. Im Intervalle (c, b) herrschen wieder die entgegengesetzten Verhältnisse. Für $B = -cA$ ist die Länge von $b'c'$

rein imaginär, für $B \geqq -bA$ besitzt die Länge von $b'c'$ einen von 0 verschiedenen reellen Teil. Damit ist der zweite Teil des Satzes 7 bewiesen.

Wir setzen jetzt unter Festhaltung des in § 2 festgelegten Fortsetzungsprinzips:

$$\eta = \frac{Y_\gamma^c(x)}{Y_0^c(x)}, \quad \eta(d') = r_1, \quad \eta(d'') = r_2, \quad \eta(b') = s_1, \quad \eta(b'') = s_2.$$

Es sei jetzt $B = -cA$. Dann ist das Intervall (c, b) durchaus nichtoszillatorisch und die Seitenlänge von $c'b'$ nach obigem rein imaginär. Ebenso ist das Intervall (c, ∞) jetzt durchaus nichtoszillatorisch; da jedoch in d bei unserer Anordnung andere Verhältnisse herrschen wie bei den anderen singulären Punkten, so können wir hier nur schließen, daß die Seite $c'd'$, die von 0 ausgeht, nicht durch ∞ geht. In der Tat wachsen Y_γ^c und Y_0^c mit abnehmendem x, es kann also $Y_0^c(x)$ im Intervalle $c > x > -\infty$ nicht verschwinden. Von den Exponenten im Unendlichen ist aber $\delta' > 0$, $\delta'' < 0$. Da nun aber weder $Y_\gamma^c(x)$ noch $Y_0^c(x)$ der zum Exponenten δ' gehörigen Fundamentallösung, die für $x = \infty$ verschwindet, proportional werden kann, so wird also auch η nicht ∞ für $x = \infty$. Diese Schlüsse gelten, was den Bereich (c, d) anbetrifft, a fortiori, wenn $B > -bA$ ist. Wir entnehmen daraus:

Satz 23. *Solange die Länge von $b'c'$ einen von 0 verschiedenen reellen Teil besitzt, kann die von c' ausgehende Seite $c'd'$ nicht durch c'' hindurchgehen; solange die Länge von $b'a'$ einen von 0 verschiedenen reellen Teil besitzt, kann die Seite $a'd'$, die von a' ausgeht, nicht durch a'' hindurchgehen.*

Den 2. Teil des Satzes beweist man genau so wie den 1. Teil, indem man von $B = -Aa$ ausgeht.*)

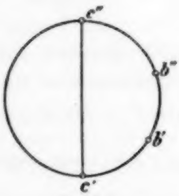


Fig. 13.

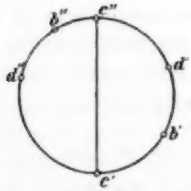


Fig. 14.

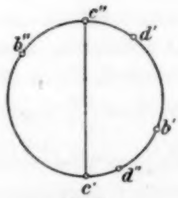


Fig. 15.

Es sei nun wieder $B = -Ac$, dann haben b' und b'' die in Fig. 13 angegebene Lage, von Seite $c'd'$ wissen wir zunächst nach Satz 7 nur, daß der reelle Teil ihrer Länge von 0 verschieden ist, wobei wir noch annehmen, daß auch $A_a < 0$. Lassen wir nun B wachsen, so bleibt der

*) Da d im Unendlichen ist, haben wir hier $B = B_d$.

reelle Teil der Länge von $c'd'$ aus demselben Grunde solange von 0 verschieden, bis b'' durch c'' hindurchgegangen ist. Ist aber b'' durch c'' hindurchgegangen, besitzt also $c'b'$ eine Länge mit von 0 verschiedenem reellen Teil, so muß nach Satz 23 d' auf dem rechts liegenden Bogen zwischen c' und c'' liegen, während d'' auf dem links liegenden Bogen zwischen c'' und c' (Fig. 14) oder auf dem rechts liegenden Bogen zwischen d' und c' liegt (Fig. 15). Wir denken uns dabei natürlich wieder die Seite $c'd'$ um $c'c''$ in den die Seite $c'b'$ enthaltenden Kreis gedreht. Im 1. Falle können wir B zunächst noch so klein annehmen, daß d'' zwischen b'' und c' liegt. Lassen wir nun B weiter wachsen, so können zwei Möglichkeiten eintreten.

1) b'' und d'' mögen sich auf dem linken Kreisbogen treffen. Es sei nun noch $A_b < 0$, also $A_a < 0$, $A_b < 0$, $A_d < 0$. Vertauschen wir dann in Satz 23 (1. Teil) b mit d, so folgt, daß b' so lange nicht durch c'' hindurchgehen kann, als der reelle Teil der Länge von $c'd'$ von 0 verschieden ist, d. h. solange nicht auch d'' zwischen c'' und d' liegt. Es ist also $s_1 > 0$, solange nicht d'' durch c'' hindurchgegangen ist. Ferner ist zunächst $s_2 < 0$, $r_1 > 0$. Nun hat man weitere Unterfälle zu unterscheiden.

1a) b'' komme nach c', bevor d'' nach c'' gelangt. Dann durchläuft $s_1 s_2$ alle Werte zwischen $-\infty$ und 0, $r_1 r_2$ ist aber inzwischen entweder durchaus negativ gewesen oder es ist durch 0 hindurchgehend negativ geworden. Unter diesen Annahmen gibt es also dazwischen gewiß einen Wert B, für den $r_1 r_2 = s_1 s_2$ ist.

1b) d'' komme nach c'', bevor b'' nach c' gelangt. $s_1 s_2$ hat einen negativen Wert, der von $-\infty$ an im allgemeinen zunimmt, $r_1 r_2$ durchläuft dagegen die negativen Werte von 0 bis $-\infty$, also muß es wieder dazwischen mindestens ein B geben, für welches $r_1 r_2 = s_1 s_2$.

Wenn sich dagegen b'' und d'' nicht auf dem links liegenden Halbkreis treffen, so muß d'' noch zwischen d' und c' liegen, wenn b'' durch c' hindurchgeht. Wir haben also:

2) b'' geht durch c' hindurch, während d'' zwischen c' und d' liegt. Dann ist, da wie bei 1) r_1 und $s_1 > 0$ sind, jetzt $r_1 r_2 > 0$ und $s_1 s_2 > 0$ und bei wachsendem B wächst $s_1 s_2$ von 0 aus beständig, während $r_1 r_2$ beständig abnimmt, bis es 0 wird. Also gibt es diesmal ein und nur ein B, für welches $r_1 r_2 = s_1 s_2$.

In den beiden Fällen (1a und 1b) schneiden sich, wenn $r_1 r_2 = s_1 s_2$, die drei Achsen $c'c''$, $b'b''$, $d'd''$ in einem im Innern der Kugel gelegenen Punkte, den wir in den Mittelpunkt der Kugel durch eine geeignete Transformation (5) bringen können. Dann ist das Viereck $a'b'c'd'$ ein *sphärisches Viereck im Sinne der Elementargeometrie.* Im Falle 2) haben wir dagegen wieder, wenn $r_1 r_2 = s_1 s_2$, ein Viereck mit reellem Ortho-

gonalkreis. Wir wollen die so gewonnenen Resultate auf den Fall II und III des § 3 anwenden.

§ 9.

Nähere Ausführungen über den Fall II des § 3.

Wir nehmen jetzt an, es sei:

$$A_c > 0, \quad A_a < 0, \quad A_b < 0, \quad A_d < 0.$$

Dann folgt aus Satz 16, daß man den Parameter B_c auf eine und nur eine Weise so bestimmen kann, daß das Kreisbogenviereck einen reellen Orthogonalkreis besitzt, den die Seiten $a'd'$ und $a'b'$ nicht schneiden, so daß also die Längen von $a'd'$ und $a'b'$ rein imaginäre Werte besitzen. Daher ergibt sich aus dem zweiten Teile des Satzes 7, daß sowohl $b'c'$ als auch $c'd'$ den Orthogonalkreis schneiden müssen. Nun folgt aber aus Satz 23, daß unter diesen Umständen $c'd'$ nicht durch c'' hindurchgehen kann; ebenso zeigt man, wenn man b mit d vertauscht, daß auch $c'b'$ sich nicht durch c'' hindurchziehen kann. Das Viereck $a'b'c'd'$ hat also die in nebenstehender Fig. 16 gezeichnete Gestalt.

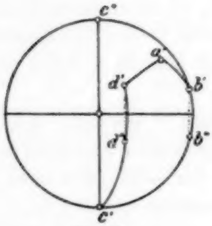


Fig. 16.

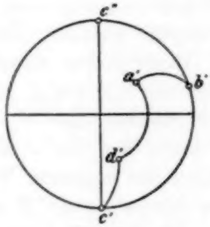


Fig. 17.

Wir haben also gerade den im vorhergehenden Paragraphen mit 2) bezeichneten Fall. Lassen wir daher B_d weiter wachsen, so folgt aus den dortigen Untersuchungen, daß erst dann wieder ein Obertheorem auftreten kann, wenn d'' durch c' und c'' hindurchgegangen ist, so daß also $c'd'$ den nach Satz 18 reellen Orthogonalkreis nicht schneidet. Auch $a'b'$ schneidet den Orthogonalkreis nicht, dagegen schneidet $a'd'$ nach Satz 18 den Orthogonalkreis gerade einmal. Also kann auch $c'b'$ den Orthogonalkreis nur einmal schneiden. Wir haben also die in Fig. 17 gezeichnete Sachlage, wobei wir ebenso wie in Fig. 16 η so transformiert haben, daß der Orthogonalkreis sich als Durchmesser projiziert. Es herrschen aber jetzt genau dieselben Verhältnisse wie bei dem ersten Obertheoreme im Falle I, alles weitere sich an das erste Obertheorem Anschließende, be-

sonders bezüglich der weiteren Obertheoreme, können wir daher unmittelbar vom Falle I auf den Fall II übertragen.

§ 10.

Nähere Ausführungen über den Fall III des § 3.

Es sei jetzt:

$$A_a < 0, \quad A_b < 0, \quad A_c < 0, \quad A_d < 0.$$

Lassen wir wieder B von dem Werte $-Ac$ aus wachsen, so haben wir nur die in § 8 durchgeführte Diskussion zu wiederholen; der dort angegebene Fall 2) ist aber jetzt unmöglich. Denn es existiert ja in diesem Falle ein reeller Orthogonalkreis, den die Seiten $c'd'$ und $c'b'$ schneiden. Nun muß aber nach dem zweiten Teile von Satz 7 entweder $d'a'$ oder $a'b'$ eine Seitenlänge mit von 0 verschiedenem reellen Teile besitzen, d. h. es muß entweder $a'b'$ oder $a'd'$ den reellen Orthogonalkreis schneiden, vorausgesetzt, daß dieser existiert. Unter der Annahme, daß alle Winkel des Kreisbogenvierecks kleiner sind als π, ist es aber unmöglich, daß drei Seiten den Orthogonalkreis schneiden. Es ist daher nur einer der beiden Fälle 1a) oder 1b) des § 8 möglich, d. h. *man kann jetzt B immer so bestimmen, daß das Viereck $a'b'c'd'$ ein sphärisches Viereck im Sinne der Elementargeometrie wird.*

Das so gewonnene Resultat ist für die Theorie der *Minimalflächen* von Bedeutung.

Es ist nämlich damit folgender Satz bewiesen:

Satz 24. *Genügen α, β, γ und $\delta' - \delta''$ den für den Fall III charakteristischen Bedingungen, so kann man nach Vorgabe von vier reellen Punkten a, b, c, d ein einfach zusammenhängendes Minimalflächenstück, welches von vier geraden Linien begrenzt wird, die die Winkel $(1-\alpha)\pi$, $(1-\beta)\pi$, $(1-\gamma)\pi$, $(1-\delta'+\delta'')\pi$ miteinander einschließen, derart angeben, daß es sich auf die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene abbilden läßt, so daß den Ecken des räumlichen Vierseits die Punkte a, b, c, d entsprechen.*

Die Obertheoreme ergeben sich auf dieselbe Weise wie in den Fällen I und II.

Erlangen, Februar 1908.

Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben der Funktionentheorie.*)

Von

Charles Haseman in Bloomington, U. S. A.

In der folgenden Arbeit werden wir die Theorie der Integralgleichungen auf die Lösung einiger Randwertaufgaben in der Funktionentheorie anwenden, welche von Riemann in seiner Inauguraldissertation (Abschnitt 19) aufgestellt wurden, nämlich, die Bestimmung in einem gegebenen Gebiete regulärer analytischer Funktionen komplexen Argumentes, wenn zwischen den Randwerten ihrer Real- und Imaginärteile gewisse Relationen vorgeschrieben sind.

Herr Hilbert**) hat diese Aufgabe gelöst, im Falle, daß *eine* Funktion gesucht ist und die Relation, die linear ist, stetig differenzierbare Koeffizienten enthält. Dieses Problem werden wir im § 1 verallgemeinern, indem wir den gegebenen Koeffizienten gewisse Unstetigkeiten gestatten.

Im § 2 werden wir zwei wie oben definierte komplexe Funktionen suchen, wenn zwischen ihren Real- und Imaginärteilen zwei lineare Relationen gegeben sind.

Endlich wenden wir uns im § 3 zur Aufgabe, eine innerhalb bezw. außerhalb eines gegebenen Gebietes reguläre analytische Funktion zu bestimmen, wenn zwischen ihren Randwerten am Punkte s bezw. $\sigma = \sigma(s)$ eine lineare Relation gegeben ist. Herr Hilbert***) hat dieses Problem gelöst, falls $\sigma = s$ ist.

*) Ein Auszug aus meiner Inauguraldissertation, Göttingen 1907. Siehe meine Dissertation betreffs numerischer Rechnungen.

**) Herrn Hilberts dritte Mitteilung über Integralgleichungen, Gött. Nachr. 1905; auch in einem auf dem internationalen Kongreß in Heidelberg (1904) von Herrn Hilbert gehaltenen Vortrage. Im ersten Bericht wird die Aufgabe durch zweimalige Anwendung der gewöhnlichen Randwertaufgaben aus der Theorie des logarithmischen Potentials, im zweiten durch die Theorie der Integralgleichungen gelöst.

***) Hilberts dritte Mitteilung über Integralgleichungen, Gött. Nachr. 1905.

§ 1.

Es sei zunächst *eine innerhalb eines gegebenen Gebietes K reguläre analytische komplexe Funktion*

$$f(z) = u(xy) + iv(xy)$$

zu bestimmen, deren Real- und Imaginärteile $u(s)$ resp. $v(s)$ auf der geschlossenen Randkurve C der Bedingung

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) + c(s) = 0 \tag{1}$$

genügen, wo $a(s), b(s), c(s)$ gegebene reelle Funktionen der Bogenlänge s sind.

Wir setzen folgendes voraus: die Randkurve C sei analytisch und auf einen Einheitskreis abbildbar; $a(s)$ und $b(s)$ mögen einzelne Unstetigkeitsstellen auf dem Rande haben, überall sonst aber sollen sie stetig nach der Bogenlänge s der Kurve C differenzierbare Funktionen sein; sie dürfen keine gemeinsamen Nullstellen haben; $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ seien periodische Funktionen mit der Periode l, der Gesamtlänge der Grenzkurve. $c(s)$ darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit des Problems überall auf dem Rande stetig differenzierbar sein. Die gesuchte komplexe Funktion $f(z)$ wird, wie wir im Laufe der Erörterung sehen werden, gewisse Unstetigkeiten auf dem Rande besitzen.

Im Falle, daß $a(s)$, $b(s)$ überall auf dem Rande stetig differenzierbar sind, hat Herr Hilbert*) eine obigen Bedingungen genügende Funktion gefunden. Innerhalb des Gebietes verhält sie sich wie eine ganze Funktion, auf dem Rande aber besitzt sie, wenn n negativ ausfällt, in dem Punkte, wo $\operatorname{arctg} \frac{b(s)}{a(s)}$ einen Sprung hat, einen Pol $2n^{\text{ter}}$ Ordnung; $2i\pi n$ sei die Änderung, die $\log(a(s) + ib(s))$ beim positiven Umlauf längs der Kurve C erfährt.

Um den Fall zu behandeln, wo $a(s)$, $b(s)$ Unstetigkeiten besitzen, suchen wir zunächst eine innerhalb unserer Grenzkurve C reguläre analytische Funktion

$$g(z) = u_1(xy) + iv_1(xy)$$

mit dem Randwerte

$$g(s) = u_1(s) + iv_1(s)$$

derart zu bestimmen, daß unsere gesuchte Funktion

$$f(z) = u(xy) + iv(xy)$$

durch die Relation

$$f^*(z) = f(z)\,g(z) \tag{2}$$

gegeben ist, wo die Randwerte $u^*(s)$ und $v^*(s)$ der in dem betrachteten Gebiete K analytischen Funktion

*) Hilberts dritte Mitteilung über Integralgleichungen, Gött. Nachr. 1905.

$$f^*(z) = u^*(xy) + iv^*(xy)$$

die folgende Randbedingung

(3) $$a^*(s)\, u^*(s) + b^*(s)\, v^*(s) + c^*(s) = 0$$

befriedigen, worin $a^*(s)$, $b^*(s)$, $c^*(s)$ so bestimmt werden sollen, daß sie überall stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s — die ersten beiden $a^*(s)$ und $b^*(s)$ ohne gemeinsame Nullstelle — bedeuten.

Um die Funktion $g(z)$ aufzustellen, setzen wir die Werte $u^*(s)$, $v^*(s)$ aus der Relation (2) in die Randbedingung (3) ein. Hieraus ergibt sich

$$a^*(uu_1 - vv_1) + b^*(uv_1 + vu_1) + c^* = 0$$

oder

$$u(a^*u_1 + b^*v_1) + v(b^*u_1 - a^*v_1) + c^* = 0,$$

ndem wir der Kürze halber das Argument s weglassen. Vergleichen wir diese Gleichung mit der ursprünglichen (1), so sehen wir, daß

$$a = a^*u_1 + b^*v_1, \quad b = b^*u_1 - a^*v_1, \quad c = c^*$$

oder

(4) $$(a - ib) = (a^* - ib^*)\,(u_1 - iv_1), \quad c = c^*$$

gesetzt werden kann. Wollen wir nun $a^*(s)$ und $b^*(s)$ derart bestimmen, daß sie die oben erwähnten Beschränkungen erfüllen, so müssen wir die Funktion $g(z)$ so wählen, daß sie auf dem Rande dieselben Unstetigkeiten hat wie die Funktion $a(s) - ib(s)$, d. h. daß $\frac{d(s)}{g(s)} = d^*(s)$ überall auf dem Rande stetig differenzierbar ist, wobei

$$d(s) = a(s) - ib(s), \quad d^*(s) = a^*(s) - ib^*(s)$$

zur Abkürzung gesetzt sind. Wir sehen leicht ein, daß $g(s)$ nirgends Null werden kann.

Wir können die Funktion $g(z)$ unter den gegebenen Voraussetzungen so bestimmen, daß sie sich innerhalb des betrachteten Bereiches regulär analytisch verhält; sie wird aber, falls $d(s)$ Pole in den einzelnen Punkten besitzt, Pole von derselben Ordnung wie $d(s)$; falls $d(s)$ nur endliche Sprünge bei den betrachteten Unstetigkeitsstellen besitzt, wesentlich singuläre Stellen haben.

Nachdem wir $g(s)$ so bestimmt haben, lösen wir (4) nach $a^*(s)$ und $b^*(s)$ auf. Dann bestimmen wir die Funktion $f^*(z)$ aus der Relation (3) nach der oben erwähnten Hilbertschen Methode. Die gesuchte Funktion $f(z)$ folgt ohne weiteres aus der Relation (2). Unter den am Anfang des Paragraphen gegebenen Beschränkungen können wir daher folgendes Resultat angeben: *hat der komplexe Ausdruck* $d(s) = a(s) - ib(s)$ *Pole oder nur endliche Sprünge in einer endlichen Anzahl von Randpunkten des betrachteten Gebietes, so können wir eine komplexe Funktion*

$$f(z) = u(xy) + iv(xy)$$

aufstellen, die überall in dem gegebenen Bereiche regulär und analytisch ist und sich auf dem Rande folgendermaßen verhält: in den Punkten, wo $d(s)$ Pole besitzt, hat sie reguläre Nullstellen; in den Punkten, wo $d(s)$ endliche Sprünge besitzt, hat sie wesentlich singuläre Stellen; wenn die Änderung $2i\pi n$ des $\log(a^*(s) + ib^*(s))$ bei einem positiven Umlauf längs der Randkurve C negativ ausfällt, hat sie in dem Punkte, in welchem $\operatorname{arctg} \frac{b^*(s)}{a^*(s)}$ den Sprung $2\pi n$ hat, einen Pol $2n^{\text{ter}}$ Ordnung.

Als spezielles Beispiel unserer allgemeinen Theorie betrachten wir folgendes Problem: es sei eine innerhalb eines umschlossenen Gebietes K reguläre analytische Funktion

$$f(z) = u(xy) + iv(xy)$$

verlangt, wenn der Realteil $u(s)$ auf einigen Teilen der Grenze C und der Imaginärteil $v(s)$ auf allen anderen Teilen der Grenze gegeben sind. Es sei C z. B. in $2k$ Teile

$$s = 0 \text{ bis } s = s_1, \quad s = s_1 \text{ bis } s_2, \cdots, \quad s = s_{2k-1} \text{ bis } s_{2k}$$

geteilt. Wir wollen $f(z)$ bestimmen, wenn $u(s)$ und $v(s)$ abwechselnd auf C vorgeschrieben sind, d. h. wenn die folgenden Bedingungen statt haben:

$$\begin{aligned}
&\text{für } 0 < s < s_1 \text{ sei } u(s) = c_1(s),\\
&\text{für } s_1 < s < s_2 \text{ sei } v(s) = c_2(s),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\text{für } s_{2k-2} < s < s_{2k-1} \text{ sei } u(s) = c_{2k-1}(s),\\
&\text{für } s_{2k-1} < s < s_{2k} \text{ sei } v(s) = c_{2k}(s).
\end{aligned}$$

Um diese Aufgabe zu lösen, braucht man nur unsere obige Theorie anzuwenden, indem $a(s)$ und $b(s)$ die folgenden Funktionen bedeuten:

$$\begin{aligned}
&\text{für } 0 < s < s_1\colon \quad a(s) = -\frac{c(s)}{c_1(s)}, \quad b(s) = 0,\\
&\text{für } s_1 < s < s_2\colon \quad a(s) = 0, \quad b(s) = -\frac{c(s)}{c_2(s)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\text{für } s_{2k-2} < s < s_{2k-1}\colon \quad a(s) = -\frac{c(s)}{c_{2k-1}(s)}, \quad b(s) = 0,\\
&\text{für } s_{2k-1} < s < s_{2k}\colon \quad a(s) = 0, \quad b(s) = -\frac{c(s)}{c_{2k}(s)}.
\end{aligned}$$

Die Funktionen $c_1(s), c_2(s), \cdots c_{2k}(s)$ können nicht willkürlich sein, sie müssen vielmehr so gewählt werden, daß $a(s)$ und $b(s)$ die am Anfang dieses Paragraphen genannten Beschränkungen befriedigen. Die

Unstetigkeiten der Funktion $f(z)$ auf dem Rande sind durch die vorstehende allgemeine Theorie gegeben.

Als weiteres Beispiel kann man die Funktion $f(z)$ bestimmen, wenn zwischen den Real- und Imaginärteilen gewisse lineare Relationen stückweise auf dem Rande gegeben sind. Wir lösen diese Aufgabe ähnlich wie die vorige, indem wir $a(s)$ und $b(s)$ gewisse Werte auf den betrachteten Stücken des Randes geben.

§ 2.

Als zweites Problem betrachten wir folgendes: *Es seien zwei in dem von der Kurve C begrenzten Bereiche reguläre analytische Funktionen*

$$f(z) = u(xy) + iv(xy) \quad \textit{und} \quad f^*(z) = u^*(xy) + iv^*(xy)$$

zu bestimmen, welche die Randwerte

$$f(s) = u(s) + iv(s) \quad \textit{resp.} \quad f^*(s) = u^*(s) + iv^*(s)$$

haben, deren Real- und Imaginärteile die Bedingungen

$$(1)\quad \begin{aligned} &\alpha(s)\,u(s) + \beta(s)\,v(s) + \alpha^*(s)\,u^*(s) + \beta^*(s)\,v^*(s) + \gamma(s) = 0, \\ &\alpha_1(s)\,u(s) + \beta_1(s)\,v(s) + \alpha_1^*(s)\,u^*(s) + \beta_1^*(s)\,v^*(s) + \gamma_1(s) = 0 \end{aligned}$$

erfüllen, wobei die Koeffizienten eindeutige, zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s sind.

Wir setzen vor allen Dingen voraus, daß die einzelnen Koeffizienten je eines der Funktionenquadrupel

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha^*,\ \beta^*;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_1^*,\ \beta_1^*;\quad \alpha,\ \beta,\ \alpha_1,\ \beta_1;\quad \alpha^*,\ \beta^*,\ \alpha_1^*,\ \beta_1^*$$

keine gemeinsamen Nullstellen haben; ferner sollen die Determinanten

$$\alpha(s)\,\beta_1(s) - \alpha_1(s)\,\beta(s), \qquad \alpha^*(s)\,\beta_1^*(s) - \alpha_1^*(s)\,\beta^*(s)$$

von Null verschieden ausfallen; die Grenzkurve C sei wieder analytisch.

In seiner dritten Mitteilung über Integralgleichungen hat Herr Hilbert folgende Relationen zwischen den Randwerten $u(s)$ resp. $v(s)$ der Real- und Imaginärteile einer innerhalb eines Gebietes regulären analytischen komplexen Funktion $f(z) = u(xy) + iv(xy)$ aufgestellt:

$$(2)\quad \begin{aligned} u(s) &= -\int_0^l \frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial \sigma}\, v(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u(\sigma)\, d\sigma, \\ v(s) &= \int_0^l \frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial \sigma}\, u(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l v(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Hierin ist l die Gesamtlänge der Grenzkurve und $G(\sigma, s)$ der Randwert der Greenschen Funktion, die so konstruiert ist, daß

$$\frac{\partial G(\sigma,s)}{\partial \sigma} = \frac{1}{2l}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(s-\sigma) + A(\sigma,s)\right\}$$

ist, wo $A(\sigma, s)$ eine stetig differenzierbare Funktion in σ, s bedeutet. Für das erste Integral in jeder der Gleichungen (2) sei der Cauchysche Hauptwert zu nehmen.

Wir können über die additiven Konstanten in $u(s)$ resp. $v(s)$ derart verfügen, daß (2) die Form

$$(3)\qquad \begin{aligned} u(s) &= -\int_0^l \frac{\partial G(\sigma,s)}{\partial \sigma} v(\sigma)\, d\sigma, \\ v(s) &= \int_0^l \frac{\partial G(\sigma,s)}{\partial \sigma} u(\sigma)\, d\sigma \end{aligned}$$

annimmt, d. h. daß

$$\int_0^l u(\sigma)\, d\sigma = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^l v(\sigma)\, d\sigma = 0$$

ausfallen.

Mit Hilfe der Relation (3) eliminieren wir jetzt $v(s)$, $u^*(s)$ und $v^*(s)$ aus den Gleichungen (1). Die resultierende Gleichung für $u(s)$ lautet:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &(\alpha\alpha_1^*)_s\, u(s) - (\alpha^*\beta_1)_s \int_0^l u(\sigma) \frac{\partial G(\sigma,s)}{\partial \sigma}\, d\sigma \\ &+ (\alpha^*\beta_1^*)_s \int_0^l u(\sigma) \frac{(\alpha\beta_1^*)_\sigma}{(\alpha^*\beta_1^*)_\sigma} \cdot \frac{\partial G(\sigma,s)}{\partial \sigma}\, d\sigma \\ &+ (\alpha^*\beta_1^*)_s \int_0^l\int_0^l u(\varrho) \frac{(\beta\beta_1^*)_\sigma}{(\alpha^*\beta_1^*)_\sigma} \cdot \frac{\partial G(\sigma,s)}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial G(\varrho,\sigma)}{\partial \varrho}\, d\varrho\, d\sigma \\ &- (\alpha^*\beta_1^*)_s \int_0^l \frac{(\beta^*\gamma_1)_\sigma}{(\alpha^*\beta_1^*)_\sigma} \cdot \frac{\partial G(\sigma,s)}{\partial \sigma}\, d\sigma - (\alpha^*\gamma_1)_s = 0, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned} (\alpha\alpha_1^*)_s &= \alpha(s)\,\alpha_1^*(s) - \alpha_1(s)\,\alpha^*(s), \\ (\alpha^*\beta_1)_s &= \alpha^*(s)\,\beta_1(s) - \alpha_1(s)\,\beta(s), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

gesetzt wird. Durch Einsetzen des Wertes von $\frac{\partial G(\sigma,s)}{\partial \sigma}$ in (4) folgt folgendes:

$$(5)\quad \begin{aligned} &(\alpha\alpha_1^*)_s\, u(s) - \frac{(\alpha^*\beta_1^*)_s}{2l}\int_0^l u(\sigma)\cot\frac{\pi}{l}(s-\sigma)\,d\sigma \\ &+ \frac{(\alpha^*\beta_1^*)_s}{(2l)^2}\int_0^l\int_0^l u(\varrho)\frac{(\beta\beta_1^*)_\sigma}{(\alpha^*\beta_1^*)_\sigma}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(s-\sigma)\cot\frac{\pi}{l}(\sigma-\varrho)\,d\varrho\,d\sigma \\ &+ \frac{(\alpha^*\beta_1^*)_s}{2l}\int_0^l u(\sigma)\frac{(\alpha\beta_1^*)_\sigma}{(\alpha^*\beta_1^*)_\sigma}\cot\frac{\pi}{l}(s-\sigma)\,d\sigma \\ &+ \int_0^l B''(\varrho, s)\, u(\varrho)\,d\varrho + d(s) = 0, \end{aligned}$$

wobei $d(s)$ und $B''(\varrho, s)$ stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente bedeuten.

Wir können weiter

$$\frac{(\beta\beta_1^*)_\sigma}{(\alpha^*\beta_1^*)_\sigma} = \frac{(\beta\beta_1^*)_s}{(\alpha^*\beta_1^*)_s} + \frac{(\beta\beta_1^*)_{s,\sigma}}{(\alpha^*\beta_1^*)_{s,\sigma}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{l}(s-\sigma),$$
$$\frac{(\alpha\beta_1^*)_\sigma}{(\alpha^*\beta_1^*)_\sigma} = \frac{(\alpha\beta_1^*)_s}{(\alpha^*\beta_1^*)_s} + \frac{(\alpha\beta_1^*)_{s,\sigma}}{(\alpha^*\beta_1^*)_{s,\sigma}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{l}(s-\sigma)$$

setzen, wo $\frac{(\beta\beta_1^*)_{s,\sigma}}{(\alpha^*\beta_1^*)_{s,\sigma}}$ und $\frac{(\alpha\beta_1^*)_{s,\sigma}}{(\alpha^*\beta_1^*)_{s,\sigma}}$ wiederum differenzierbar in s und σ sind. Aus der zweiten der Gleichungen (3) folgt

$$\int_0^l v(\varrho)\frac{\partial G(\varrho, s)}{\partial\varrho}\,d\varrho = \int_0^l\int_0^l u(\sigma)\frac{\partial G(\sigma,\varrho)}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial G(\varrho, s)}{\partial\varrho}\,d\varrho\,d\sigma,$$

oder

$$\left(\frac{1}{2l}\right)^2\int_0^l\int_0^l u(\sigma)\cot\frac{\pi}{l}(s-\varrho)\cot\frac{\pi}{l}(\varrho-\sigma)\,d\varrho\,d\sigma$$
$$= -u(s) + \left(\frac{1}{2l}\right)^2\int_0^l\int_0^l u(\varrho)\left\{A(\sigma,\varrho)\cot\frac{\pi}{l}(s-\varrho) + A(\varrho,s)\cot\frac{\pi}{l}(\varrho-\sigma)\right\}d\varrho\,d\sigma.$$

Vermöge dieser Formel geht (5) unmittelbar in

$$(6)\quad P(s) \equiv a(s)\,u(s) + \frac{b(s)}{2l}\int_0^l u(\sigma)\left\{\cot\frac{\pi}{l}(s-\sigma) + B(\sigma, s)\right\}d\sigma + d(s) = 0$$

über, wo $B(\sigma, s)$ auch stetig differenzierbar in σ, s ist und

$$a(s) = (\alpha\alpha_1^*)_s - (\beta\beta_1^*)_s \quad \text{und} \quad b(s) = (\alpha\beta_1^*)_s - (\alpha^*\beta_1)_s$$

gesetzt sind.

Unsere Aufgabe reduziert sich daher auf die folgende: zu finden ist eine innerhalb eines gewissen Gebietes reguläre analytische Funktion

komplexen Argumentes $f(z) = u(xy) + iv(xy)$, wenn der Randwert $u(s)$ ihres Realteils der Integralgleichung (6) genügt. Um eine solche Funktion herzustellen, müssen wir zunächst aus der eben erhaltenen Gleichung eine Integralgleichung mit stetigem Kern konstruieren.

Zu diesem Zwecke finden wir den Wert des Ausdruckes

$$\int_0^l P(\varrho) \frac{\partial G(\varrho, s)}{\partial \varrho} d\varrho.$$

Indem wir $a(\varrho)$ und $b(\varrho)$ durch

$$a(s) + a(\varrho, s) \operatorname{tg} \frac{\pi}{l}(s - \varrho) \quad \text{resp.} \quad b(s) + b(\varrho, s) \operatorname{tg} \frac{\pi}{l}(s - \varrho)$$

ersetzen, folgt leicht für den obigen Ausdruck

$$\frac{1}{2l}\int_0^l u(\sigma)\left\{a(s) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{l}(s - \sigma) + C(s, \sigma)\right\} d\sigma - b(s)\, u(s) + c(s) = 0.$$

Durch Elimination von $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{l}(s - \sigma)$ zwischen dieser Gleichung und (6) erhalten wir

$$(7) \qquad a(s)\, P(s) - b(s)\int_0^l P(\varrho) \frac{\partial G(\varrho, s)}{\partial \varrho} d\varrho \equiv [a^2(s) + b^2(s)]\, u(s)$$

$$+ \frac{b(s)}{2l}\int_0^l u(\sigma)\left\{a(s)\, B(\sigma, s) - C(\sigma, \varrho)\right\} d\sigma + a(s)\, d(s) - b(s)\, c(s) = 0.$$

Der Randwert $u(s)$ des Realteiles der gesuchten Funktion $f(z)$ muß daher die Integralgleichung

$$(8) \qquad u(s) + \frac{b(s)}{2l[a^2(s) + b^2(s)]}\int_0^l u(\sigma)\left\{a(s)\, B(\sigma, s) - C(\sigma, s)\right\} d\sigma$$

$$+ \frac{a(s)\, d(s) - b(s)\, c(s)}{a^2(s) + b^2(s)} = 0$$

befriedigen. Diese Integralgleichung hat wirklich einen stetigen Kern $a(s)\, B(\sigma, s) - C(\sigma, s)$, wie wir verlangten.

Es bleibt übrig zu untersuchen, ob und wann es eine Funktion gibt, die diese Integralgleichung erfüllt. Die Gleichung besitzt die Fredholmsche Form

$$g(s) = \varphi(s) + \int K(\sigma, s)\, \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

und es hat entweder die homogene oder die inhomogene Gleichung eine Lösung, je nachdem 1 ein Eigenwert für den Kern $K(\sigma, s)$ ist oder nicht.

Sind $\gamma(s)$ und $\gamma_1(s)$ in den Gleichungen (1) beide identisch Null, so können wir über die zu $v(s)$ und $v^*(s)$ additiven Konstanten so verfügen,

daß an Stelle des letzten Gliedes von (8) entweder Null oder eine bekannte Funktion von s tritt, weil sowohl $d(s)$ wie $c(s)$ den Faktor $\gamma(s)$ oder $\gamma_1(s)$ enthalten. Das sagt aber aus, daß (8) entweder eine homogene oder eine inhomogene Integralgleichung ist, je nachdem

$$\int_0^l v(\sigma)\,d\sigma \quad \text{und} \quad \int_0^l v^*(\sigma)\,d\sigma$$

gleich Null oder verschieden von Null vorausgesetzt sind. Daher wird in diesem Falle die Integralgleichung (8) immer eine Lösung $u(s)$ besitzen. Ist dann auf diese Art $u(s)$ gefunden, so erhalten wir $v(s)$ aus der Relation (3) und $u^*(s)$, $v^*(s)$ aus den Gleichungen (1). Dann brauchen wir nur analytische komplexe Funktionen $f(z)$, $f^*(z)$ zu bilden, welche diese gefundenen stetigen differenzierbaren Randwerte besitzen, womit unsere Aufgabe gelöst ist.

Um einen weiteren Fall zu betrachten, nehmen wir an, daß es keine innerhalb unseres Gebietes reguläre analytische Funktion

$$F(z) = U(xy) + iV(xy)$$

mit dem Randwerte

$$F(s) = U(s) + iV(s)$$

gibt, deren Real- und Imaginärteile die Randbedingung

$$a(s)\,U(s) + b(s)V(s) = 0 \tag{9}$$

erfüllen. Unter diesen Umständen kann auch die Relation

$$a(s)\,U'(s) - b(s)\,V'(s) = 0$$

nicht bestehen, wo $U'(s)$ und $V'(s)$ Randwerte einer analytischen Funktion

$$F'(z) = U'(xy) + iV'(xy)$$

sind, weil es sonst eine Funktion $F(z) = \frac{1}{F'(z)}$ geben würde, die der Relation (9) genügt. Daher muß der Zähler des letzten Gliedes von (8), $a(s)\,d(s) - b(s)\,c(s)$, verschieden von Null ausfallen, weil $d(s)$ und $c(s)$ die Randwerte des Realteiles resp. Imaginärteiles einer innerhalb der Grenzkurve C regulären analytischen Funktion sind, wie wir aus ihren Definitionen leicht sehen.

Daher hat in diesem Falle die inhomogene Integralgleichung (8) eine Lösung; denn hätte die homogene Gleichung eine Lösung, so würde

$$a(s)\,P^*(s) - b(s)\int_0^l P^*(\varrho)\,\frac{\partial G(\varrho, s)}{\partial \varrho}\,d\varrho = 0 \tag{10}$$

lösbar sein, wobei

$$P^*(s) = a(s)\,u(s) + \frac{b(s)}{2l}\int_0^l u(\sigma)\left\{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(s-\sigma) + B(\sigma, s)\right\} d\sigma$$

gesetzt ist, weil, wenn wir diesen Wert von $P^*(s)$ in (10) einsetzen, die homogene Integralgleichung (8) herauskommt. Das führt aber zu einem Widerspruch gegen die Annahme, da

$$P^*(s) \quad \text{und} \quad \int_0^l P^*(\varrho)\frac{\partial G(\varrho, s)}{\partial \varrho}\,d\varrho$$

die Randwerte des Real- resp. Imaginärteiles einer analytischen Funktion sind und daher eine Relation wie (9) erfüllen würden.

Die Lösung $u(s)$ der inhomogenen Integralgleichung wird die linke Seite von (7) zu Null machen und dies ist nur möglich, wenn $P(s)$ selbst gleich Null ist, denn wir könnten sonst

$$P(s) \quad \text{und} \quad \int_0^l P(\varrho)\frac{\partial G(\varrho, s)}{\partial \varrho}\,d\varrho$$

als Randwerte des Real- resp. Imaginärteiles einer analytischen Funktion betrachten, die die Relation (9) befriedigen. Daher genügt unser gefundener Wert $u(s)$ der Gleichung (6), wie wir verlangten. Der dazu gehörige Imaginärteil $v(s)$ ergibt sich aus der Relation (3), während $u^*(s)$ und $v^*(s)$ aus den Gleichungen (1) folgen; mithin bleibt nur übrig, die Funktionen $f(z)$, $f^*(z)$ aufzustellen.

Gibt es aber eine solche Funktion $F(z)$, deren Real- und Imaginärteile die Randbedingung (9) erfüllen, so können wir für $v(s)$ eine ganz ähnliche Integralgleichung wie früher bilden, welche die folgende Form annimmt:

$$(8') \qquad v(s) + \frac{b'(s)}{2l[a'^2(s) + b'^2(s)]}\int_0^l v(\sigma)\,\{a'(s)\,B_1(\sigma, s) - C_1(\sigma, s)\}\,d\sigma$$
$$+ \frac{a'(s)\,d(s) - b'(s)\,c(s)}{a'^2(s) + b'^2(s)} = 0,$$

wo wiederum $B_1(\sigma, s)$, $C_1(\sigma, s)$ stetig in σ, s sind und

$$a'(s) = -(\alpha^*\beta_1)_s + (\alpha\beta_1^*)_s, \quad b'(s) = -(\alpha\alpha_1^*)_s + (\beta\beta_1^*)_s$$

gesetzt ist. Wenn es dann keine Funktion $F(z)$ der oben erwähnten Art gibt, deren Real- und Imaginärteile die Randbedingung

$$(9') \qquad a'(s)\,U(s) + b'(s)\,V(s) = 0$$

erfüllen, so kann die homogene Gleichung (8') keine Lösung haben, wie wir durch ein ähnliches Verfahren wie oben sehen, weshalb die inhomo-

gene Gleichung lösbar sein muß. In diesem Falle ist also unsere Aufgabe lösbar.

Gibt es aber endlich eine derartige Funktion $F(z)$, die die beiden Bedingungen (9) und (9') erfüllt, so wird unser Problem im allgemeinen keine Lösung besitzen, wie wir sogleich zeigen werden.

Um dieses durchzuführen, werden wir zunächst eine innerhalb des betrachteten Gebietes reguläre analytische Funktion $g(z) = u_1(xy) + iv_1(xy)$ mit den Randwerten $g(s) = u_1(s) + iv_1(s)$ suchen, sodaß $f(z) = g(z)F(z)$ ist. Wir werden zeigen, daß es im allgemeinen keine solche Funktion $g(z)$ gibt. Substituieren wir nämlich die Werte von u und v aus der letzten Formel in die Gleichungen, die aus (1) durch sukzessive Elimination von $u^*(s)$ und $v^*(s)$ folgen, so kommt folgendes heraus:

$$(\alpha\alpha_1^*)[Uu_1 - Vv_1] - (\alpha^*\beta_1)[Uv_1 + Vu_1] - (\alpha^*\beta_1^*)v^* - (\alpha^*\gamma_1) = 0,$$
$$(\alpha\beta_1^*)[Uu_1 - Vv_1] + (\beta\beta_1^*)[Uv_1 + Vu_1] + (\alpha^*\beta_1^*)u^* - (\beta^*\gamma_1) = 0$$

oder

$$u_1[(\alpha\alpha_1^*)U - (\alpha^*\beta_1)V] - v_1[(\alpha^*\beta_1)U + (\alpha\alpha_1^*)V] - (\alpha^*\beta_1^*)v^* - (\alpha^*\gamma_1) = 0,$$
$$u_1[(\alpha\beta_1^*)U + (\beta\beta_1^*)V] + v_1[(\beta\beta_1^*)U - (\alpha\beta_1^*)V] + (\alpha^*\beta_1^*)u^* - (\beta^*\gamma_1) = 0,$$

wo das Argument s weggelassen ist. Aus (9) und (9') aber erhalten wir

$$(\alpha\alpha_1^*)U - (\alpha^*\beta_1)V = (\beta\beta_1^*)U - (\alpha\beta_1^*)V \equiv D,$$
$$(\alpha^*\beta_1)U + (\alpha\alpha_1^*)V = (\alpha\beta_1^*)U + (\beta\beta_1^*)V \equiv E,$$

wo natürlich D, E bekannte Funktionen von s sind. Vermöge dieser Gleichungen lassen sich die obigen Gleichungen so schreiben:

$$Du_1 - Ev_1 - (\alpha^*\beta_1^*)v^* - (\alpha^*\gamma_1) = 0,$$
$$Eu_1 + Dv_1 + (\alpha^*\beta_1^*)u^* - (\beta^*\gamma_1) = 0,$$

oder

(11) $$f^*(s) = p(s)\,g(s) + q(s),$$

wo zur Abkürzung

$$p(s) = -\frac{E}{(\alpha^*\beta_1^*)} + i\frac{D}{(\alpha^*\beta_1^*)} \quad \text{und} \quad q(s) = \frac{(\beta^*\gamma_1)}{(\alpha^*\beta_1^*)} - i\frac{(\alpha^*\gamma_1)}{(\alpha^*\beta_1^*)}$$

gesetzt ist.

Bevor wir diesen Fall weiter untersuchen, betrachten wir einen speziellen Fall, der sich in dieselbe Form wie (11) bringen läßt, nämlich den Fall, wo $a(s) \equiv 0$ und $b(s) \equiv 0$, d. h. $(\alpha\alpha_1^*) \equiv (\beta\beta_1^*)$ und $(\alpha^*\beta_1) \equiv (\alpha\beta_1^*)$ sind. In diesem Falle reduzieren sich die Gleichungen (1) auf die Form

$$\eta u + \xi v - (\alpha^*\beta_1^*)v^* - (\alpha^*\gamma_1) = 0,$$
$$-\xi u + \eta v + (\alpha^*\beta_1^*)u^* + (\beta^*\gamma_1) = 0,$$

oder

(12) $$f^*(s) = p_1(s)\,f(s) + g(s),$$

wo

$$p(s) = \xi + i\eta, \quad \xi = -\frac{(\alpha\beta_1^*)}{(\alpha^*\beta_1^*)} = -\frac{(\alpha^*\beta_1)}{(\alpha^*\beta_1^*)}, \quad \eta = \frac{(\alpha\alpha_1^*)}{(\alpha^*\beta_1^*)} = \frac{(\beta\beta_1^*)}{(\alpha^*\beta_1^*)}.$$

Wir müssen also noch zusehen, ob und wann es zwei innerhalb des Gebietes reguläre analytische Funktionen, etwa $f(z) = u(xy) + iv(xy)$, $g(z) = u_1(xy) + iv_1(xy)$ gibt, deren Randwerte eine solche Relation

$$f(s) = c(s)\,g(s) + d(s) \tag{13}$$

erfüllen, wobei $c(s)$ und $d(s)$ zweimal stetig differenzierbar in s sind.

Wir sehen leicht ein, daß Funktionen wie $f(z)$, $g(z)$ die Randbedingung $f(z) = c(s)g(s)$ nicht erfüllen können, außer wenn $c(s)$ selbst der Randwert einer innerhalb des Gebietes regulären analytischen Funktion ist, in welchem Falle es eine unendliche Anzahl von Funktionenpaaren gibt, die der gegebenen Relation genügen. Wenn in (13) $c(s)$ der Randwert einer solchen Funktion ist, so muß $d(s)$ auch eine solche Funktion sein, sonst könnten $f(z)$ und $g(z)$ die Bedingung (13) nicht erfüllen. Sind daher $c(s)$ und $d(s)$ beide Randwerte von solchen analytischen Funktionen, so würde es wieder eine unendlich große Anzahl von Funktionenpaaren $f(z)$, $g(z)$ geben, welche die gegebene Randbedingung erfüllen. Sind $c(s)$ und $d(s)$ keine solchen Funktionen, so können wir schreiben $c(s) = g_1(s)[c'(s) + g_2(s)]$, $d(s) = f_1(s)[d'(s) + f_2(s)]$, wo $g_1(s)$, $g_2(s)$, $f_1(s)$, $f_2(s)$ Randwerte von innerhalb des betrachteten Gebietes regulären analytischen Funktionen sind, jedoch $c'(s)$ und $d'(s)$ weder einen Faktor noch ein Glied enthalten, welches ein solcher Randwert ist. Daher läßt sich (13) so darstellen:

$$\frac{f(s) - f_1(s)\,f_2(s) - g_2(s)\,g_1(s)\,g(s)}{f_1(s)} = \frac{g_1(s)}{f_1(s)} \cdot c'(s)\,g(s) + d'(s).$$

Wir sehen ohne weiteres ein, daß es nur im Falle, wo $c'(s) + d'(s) = 0$ ist, eine Lösung unseres Problems geben kann, und zwar hat dann die Lösung folgende Form:

$$g(s) = \frac{f_1(s)}{g_1(s)}, \quad f(s) = f_1(s)\,f_2(s) + g_2(s)\,f_1(s).$$

Wir erhalten somit folgendes Resultat: *in den Fällen, wo entweder* $a(s) = (\alpha\alpha_1^*) - (\beta\beta_1^*)$ *und* $b(s) = (\alpha\beta_1^*) - (\alpha^*\beta_1)$ *identisch in* s *verschwinden, oder wo es eine innerhalb des gegebenen Gebietes reguläre analytische Funktion* $F(z) = U(xy) + iV(xy)$ *gibt, die die beiden Randbedingungen* (9), (9′) *erfüllt, d. h. wo die beiden homogenen Integralgleichungen* (8); (8′) *lösbar sind, haben wir im allgemeinen keine Lösung unseres Problemes; in allen andern Fällen haben wir unser Problem vollständig gelöst.*

Durch ein Verfahren, das dem vorigen ganz ähnlich ist, können wir folgende Aufgabe lösen:*) *zu bestimmen sind zwei komplexe Funktionen*

*) Siehe meine Inauguraldissertation.

$f_j(z) = u_j(xy) + iv_j(xy)$ und $f_a(z) = u_a(xy) + iv_a(xy)$, die sich innerhalb bzw. außerhalb des von der Kurve C begrenzten Gebietes wie reguläre analytische Funktionen verhalten und deren Real- und Imaginärteile auf dem Rande $u_j(s)$, $v_j(s)$ resp. $u_a(s)$, $v_a(s)$ die Bedingungen

$$\alpha(s)\,u_j(s) + \beta(s)\,v_j(s) + \alpha^*(s)\,u_a(s) + \beta^*(s)\,v_a(s) + \gamma(s) = 0,$$
$$\alpha_1(s)\,u_j(s) + \beta_1(s)\,v_j(s) + \alpha_1^*(s)\,u_a(s) + \beta_1^*(s)\,v_a(s) + \gamma_1(s) = 0$$

erfüllen, wo die Koeffizienten den einschränkenden Voraussetzungen des vorigen Problems unterworfen sind.

Die Lösung dieses Problems drückt sich folgendermaßen aus: *es gibt im allgemeinen keine Lösung in den Fällen, wo $(\alpha\alpha_1^*) + (\beta\beta_1^*)$ und $(\alpha\beta_1^*) + (\alpha^*\beta_1)$ identisch gleich Null sind, und wo eine innerhalb des betrachteten Gebietes reguläre analytische Funktion $F(z) = U(xy) + iV(xy)$ existiert, welche die beiden Randbedingungen* (9) *und* (9′) *erfüllt. In allen andern Fällen ist die Aufgabe lösbar.*

§ 3.

Endlich suchen wir eine außerhalb bzw. innerhalb eines von der Kurve C umschlossenen Gebietes reguläre analytische Funktion

$$f_a(z) = u_a(xy) + iv_a(xy) \quad \text{bzw.} \quad f_j(z) = u_j(xy) + iv_j(xy),$$

welche den Randwert

$$f_a(\sigma) = u_a(\sigma) + iv_a(\sigma) \quad \text{resp.} \quad f_j(s) = u_j(s) + iv_j(s)$$

an dem Punkte $\sigma = \sigma(s)$ resp. s des Randes besitzt, während die Relation

(1) $$f_a(\sigma) = c(s)\,f_j(s)$$

bestehen soll, wo in $c(s) = a(s) + ib(s)$ die Ausdrücke $a(s)$ und $b(s)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s — ohne gemeinsame Nullstelle — sind, und wo σ als eine eindeutige, umkehrbare, zweimal stetig differenzierbare Funktion von s vorausgesetzt ist.

Um diese Aufgabe zu behandeln, gebrauchen wir folgende Resultate, die Herr Hilbert*) gefunden hat:

I. *Die Bedingungen*

(2)
$$w_j(s) = M_j\,w_j(s) + \text{const.} \equiv i\int_0^l w_j(r)\,\frac{\partial G_j(r,s)}{\partial r}\,dr + \text{const.}$$
$$w_a(\sigma) = -M_a w(\sigma) + \text{const.} \equiv i\int_0^l w_a(r')\,\frac{\partial G_a(r',s)}{\partial r}\,dr' + \text{const.}$$

*) Hilberts dritte Mitteilung über Integralgleichungen, Gött. Nachr. 1905.

sind notwendig und hinreichend, um zu zeigen, daß $w_i(s)$ und $w_a(\sigma)$ Randwerte einer innerhalb resp. außerhalb der Randkurve C regulären analytischen komplexen Funktion $w_i(z)$ resp. $w_a(z)$ an den Punkten s resp. σ sind. $G_i(r,s)$ und $G_a(r,s)$ seien die Randwerte der innerhalb resp. außerhalb des betrachteten Bereiches liegenden Greenschen Funktionen.

II. *Die Ausdrücke*

$$w_i(s) + M_i w_i(s) \quad \text{und} \quad w_a(\sigma) - M_a w_a(\sigma) \tag{3}$$

sind Randwerte an den Punkten s resp. σ von Funktionen, die sich innerhalb resp. außerhalb des betrachteten Gebietes regulär und analytisch verhalten, wenn $w_i(s)$ und $w_a(\sigma)$ irgend welche stetigen, komplexen Funktionen sind.

Wenden wir den Operator M_a auf beide Seiten der Relation

$$f_a(\sigma) = c(s) f_i(s)$$

an, so erhalten wir

$$M_a f_a(\sigma) = \frac{i}{2l}\int_0^l \frac{\partial \sigma(r)}{\partial r}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(\sigma(s)-\sigma(r)) + A_a(\sigma(r),\sigma(s))\right\} c(r) f_i(r)\,dr,$$

oder mit Rücksicht auf

$$c(r)\frac{\partial \sigma(r)}{\partial r} = c(s)\frac{\partial \sigma(s)}{\partial s} + c(r,s)\operatorname{tg}\frac{\pi}{l}(\sigma(s)-\sigma(r)),$$

$$\begin{aligned} M_a f_a(\sigma) &= c(s) M_i f_i(s) \\ &+ \frac{ic(s)}{2l}\int_0^l f_i(r)\left\{\frac{\partial \sigma(s)}{\partial s}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(\sigma(s)-\sigma(r)) - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(s-r)\right\} dr \\ &+ \int_0^l E'(r,s) f_i(r)\,dr, \end{aligned}$$

oder endlich

$$M_a f_a(\sigma) = c(s) M_i f_i(s) + \int_0^l E(r,s) f_i(r)\,dr, \tag{4}$$

wo $E(r,s)$ natürlich den Ausdruck

$$\frac{\partial \sigma(s)}{\partial s}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(\sigma(s)-\sigma(r)) - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(s-r)$$

enthält. Dieser Ausdruck wird aber bei $r = s$ den endlichen Wert

$$\frac{l}{2\pi}\,\frac{d\left[\log\frac{\partial \sigma(s)}{\partial s}\right]}{ds}$$

besitzen. Daher sehen wir, daß $E(r,s)$ eine stetige Funktion von r, s ist und als Kern einer Fredholmschen Integralgleichung benutzt werden kann.

Wir betrachten weiter die Relation

(1') $$w_a(\sigma) = c(s)\, w_j(s)$$

und untersuchen, ob und wann $w_a(\sigma)$ und $w_j(s)$ so bestimmt werden können, daß sie die Randwerte einer außerhalb resp. innerhalb C regulären analytischen Funktion darstellen. Zu diesem Zwecke bilden wir mit Hilfe von (4) den Ausdruck

$$\begin{aligned} w_a(\sigma) + M_a w_a(\sigma) + c(s)\, w_j(s) - c(s)\, M_j w_j(s) \\ \equiv 2 w_a(\sigma) + \int_0^l 2K(r, s)\, w_a(r)\, dr + 2\gamma, \end{aligned}$$

wo γ eine beliebige Konstante, und $K(r, s)$ in r, s stetig ist. Die Integralgleichung

$$w_a(\sigma) + \int_0^l K(r, s)\, w_a(r)\, dr + \gamma = 0,$$

die die Fredholmsche Form hat, besitzt immer eine Lösung $w_a(\sigma)$, weil γ beliebig ist und daher die Gleichung entweder als eine homogene oder eine inhomogene Integralgleichung betrachtet werden kann.

Diese Lösung $w_a(\sigma)$ gibt nun

$$w_a(\sigma) + M_a w_a(\sigma) + c(s)\, w_j(s) - c(s)\, M_j w_j(s) = \text{const.}$$

und es lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

(a) $$w_a(\sigma) + M_a w_a(\sigma) = \text{const.}; \quad w_j(s) - M_j w_j(s) = \text{const.}$$

oder

(b) $$\bar{w}_a(\sigma) + \bar{M}_a \bar{w}_a(\sigma) + \bar{c}(s)\, [\bar{w}_j(s) - \bar{M}_j \bar{w}_j(s)] = \text{const.},$$

wo in der letzten Gleichung die jedesmal konjugierte Funktion zu nehmen ist.

Im Falle (a) kommen wir vermöge des Satzes I zu dem Resultate, daß $w_a(\sigma)$ und $w_j(s)$ — die letzte Funktion folgt aus (1') — die gesuchten Funktionen $f_a(\sigma)$ resp. $f_j(s)$ darstellen können.

Im Falle (b) haben wir vermöge des Satzes II zwei Funktionen $g_a(\sigma) \equiv -\bar{w}_a(\sigma) + M_a \bar{w}_a(\sigma)$ und $g_j(s) \equiv \bar{w}_j(s) + M_j \bar{w}_j(s)$, welche die Randwerte solcher Funktionen sind, wie wir suchen, und welche der Relation (1') genügen, in der wir $c(s)$ durch $\bar{c}(s)$ ersetzen.

Daher erhalten wir dieselben Resultate, die Herr Hilbert für den Fall $\sigma(s) = s$ gefunden hat, nämlich: *es gibt entweder zwei reguläre analytische Funktionen, die der Relation* (1) *genügen, oder zwei Funktionen derselben Art, die der Relation* (1') *genügen, indem wir* $c(s)$ *durch* $\bar{c}(s)$ *ersetzen.*

Singuläre Integralgleichungen.*)

Von

H. Weyl in Göttingen.

I. Teil.

Theorie der Integralgleichungen mit beschränktem Kern.

Von Herrn Hilbert ist als erstem zur Behandlung der Theorie der Integralgleichung**)

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt,$$

in welcher $f(s)$ und der „Kern“ $K(s,t)$ gegebene Funktionen sind, die *Methode der unendlichvielen Variablen* mit großem Erfolg angewandt worden. Diese Methode ist aber, wie im folgenden gezeigt werden soll, keineswegs auf die von Hilbert in der fünften Mitteilung vorzugsweise untersuchten stetigen Kerne beschränkt, sondern führt auch in gewissen allgemeineren Fällen zu interessanten Ergebnissen. Es muß dazu zunächst an einige Tatsachen aus der Theorie der Bilinearformen mit unendlichvielen Variablen kurz erinnert werden.

Es sei jedem Paar natürlicher Zahlen p, q eine reelle Zahl a_{pq} zugeordnet. Existiert alsdann eine Zahl M, so daß für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$, die den Bedingungen

(1) $$(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots \leqq 1, \qquad (y,y) \leqq 1$$

genügen, und für alle n der „Abschnitt“

$$[A(x,y)]_n = \sum_{\substack{p=1,2,\ldots,n\\ q=1,2,\ldots,n}} a_{pq}\, x_p\, y_q$$

*) Die vorliegende Arbeit ist eine teils verkürzte, teils durch Zusätze vermehrte Umarbeitung meiner Inauguraldissertation „Singuläre Integralgleichungen, mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems“ (Göttingen 1908).

**) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. und 5. Mitteilung, Gött. Nachr. 1906.

dem absoluten Betrag nach unterhalb M bleibt, so existiert der Limes*)

$$\underset{n=\infty}{L}[A(x,y)]_n = A(x,y)$$

und stellt demnach eine im Gebiet (1) erklärte Funktion der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ dar. Diese Funktion wird die mittels der Koeffizienten a_{pq} gebildete *beschränkte Bilinearform*

$$A(x,y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$$

genannt. Sind

$$A(x,y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q, \qquad B(x,y) = \sum_{(p,q)} b_{pq} x_p y_q$$

irgend zwei beschränkte Bilinearformen, so konvergiert für jedes p, q die Reihe

$$c_{pq} = a_{p1} b_{1q} + a_{p2} b_{2q} + \cdots$$

absolut, und die mit diesen Koeffizienten c_{pq} gebildete Bilinearform, die durch das Symbol $AB(x, y)$ bezeichnet und die *Faltung* der Formen A und B genannt werde, ist gleichfalls beschränkt.**) Es läßt sich zeigen, daß für alle gemäß den Ungleichungen (1) in Betracht kommenden Werte der Variablen $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ die Gleichung besteht***):

$$AB(x,y) = \sum_{(p)} [(a_{1p} x_1 + a_{2p} x_2 + \cdots)(b_{p1} y_1 + b_{p2} y_2 + \cdots)].$$

Da offenbar nach Definition, falls unter $E(x, y)$ die Form

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots$$

verstanden wird,

$$AE(x,y) = EA(x,y) = A(x,y)$$

ist, folgt daraus insbesondere, daß der Wert einer beschränkten Bilinearform durch reihen- oder kolonnenweise Summation berechnet werden kann:

$$A(x,y) = \sum_{(p)} \Big(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q\Big) = \sum_{(q)} \Big(\sum_{(p)} a_{pq} x_p y_q\Big).$$

Der Beweis der angeführten Tatsachen stützt sich vor allem auf eine fundamentale Ungleichung, welche im wesentlichen besagt, daß aus den Ungleichungen (1)

$$\text{abs. } E(x,y) \leqq 1$$

folgt.

Ist

$$A(x,y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$$

---

*) Hilbert, 4. Mitt., pag. 178.

**) l. c., pag. 179.

***) Vergl. meine Dissertation, pag. 7 f.

eine beschränkte Bilinearform, so soll unter $A'(x, y)$ die mit den Koëffizienten

$$a'_{pq} = a_{qp}$$

gebildete Bilinearform verstanden werden. Herr O. Toeplitz hat gezeigt*), daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine beschränkte Form $B(x, y)$ von der Art existiere, daß

$$AB(x, y) = (x, y)$$

wird, darin besteht, daß die Funktion $AA'(x, x)$, welche negativer Werte nicht fähig ist, für alle Werte der Variablen $x_1, x_2, \ldots$, deren Quadratsumme $(x,x) = 1$ ist, oberhalb einer von 0 verschiedenen positiven Zahl liegt.

Wir beabsichtigen jetzt, die Theorie der Integralgleichung

$$(2) \qquad f(s) = \varphi(s) - \lambda\int_0^\infty K(s, t)\, \varphi(t) dt \qquad (s \geqq 0)$$

zu entwickeln, wenn für den Kern $K(s, t)$ die folgenden Annahmen gemacht werden:

1) $K(s, t)$ ist für $s \geqq 0$, $t \geqq 0$ im allgemeinen definiert und stetig; es gibt nämlich *in jedem endlichen Gebiet* der s, t-Ebene höchstens eine endliche Anzahl monotoner stetiger Kurvenstücke, die sich in endlichvielen Punkten schneiden, und eine endliche Anzahl isolierter Punkte, längs deren und in denen $K(s, t)$ nicht definiert oder doch nicht stetig ist. Dabei ist noch angenommen, daß die Abszissen ev. vorkommender zur t-Achse paralleler singulärer Geradenstücke sich im Endlichen nirgends häufen.

2) Die durch

$$\int_0^\infty (K(s, t))^2 dt = (k(s))^2, \qquad k(s) \geqq 0$$

erklärte Funktion $k(s)$ existiert und ist stetig außer für endlich- oder unendlichviele, jedenfalls aber *isolierte* singuläre Stellen $s = s_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Unter die s_i haben wir uns insbesondere die Abszissen der unter 1) erwähnten, zur t-Achse parallelen singulären Geradenstücke aufgenommen zu denken.

3) Ist dann $s_0 \geqq 0$ irgend ein Wert, der von allen $s_i (i = 1, 2, \ldots)$ verschieden ist, so trifft die Gerade $s = s_0$ die singulären Kurven und Punkte nur in isoliert liegenden Punkten $t = \tau_i$. Bezeichnet $E(\omega)$ die Gesamtheit der Punkte $t \geqq 0$, welche einer der folgenden Ungleichungen genügen

$$|t - \tau_i| \leqq \frac{1}{\omega}, \quad t \geqq \omega, \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

*) Gött. Nachr. 1907, Sitzung vom 23. Februar.

so ist wegen der Stetigkeit von $k(s)$ für $s = s_0$

$$\underset{\substack{s=s_0 \\ \omega=\infty}}{L} \int_{E(\omega)} (K(s,t))^2\, dt = 0,$$

und daraus erschließen wir die Limesgleichung

$$\underset{s=s_0}{L} \int_0^\infty (K(s,t) - K(s_0,t))^2\, dt = 0,$$

welche mit Hilfe der sog. Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int_0^\infty f(s)\, g(s)\, ds\right)^2 \leqq \int_0^\infty (f(s))^2\, ds \cdot \int_0^\infty (g(s))^2\, ds$$

ergibt, daß für jede stetige, im Intervall $0 \cdots \infty$ quadratisch integrierbare Funktion $v(t)$ das Integral

$$\int_0^\infty K(s,t)\, v(t)\, dt$$

eine für $s \neq s_i$ stetige Funktion von s ist. Nehmen wir etwa an, daß

$$\int_0^\infty (v(t))^2\, dt = 1$$

ist, so wird

$$\left| \int_0^\infty K(s,t)\, v(t)\, dt \right| \leqq k(s).$$

Bezeichnet daher $u(s)$ eine stetige Funktion von der Art, daß das Integral

$$\int_0^\infty k(s)\, |u(s)|\, ds$$

existiert, so konvergiert a fortiori

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K(s,t)\, u(s)\, v(t)\, dt\, ds.$$

Die *dritte Annahme*, die wir in betreff des Kernes $K(s,t)$ machen wollen, ist dann die, daß *dieses zweifache Integral für alle stetigen Funktionen* $u(s)$, $v(s)$, *für welche*

$$\int_0^\infty k(s)\, |u(s)|\, ds$$

existiert und

$$\int_0^\infty (u(s))^2\, ds = \int_0^\infty (v(s))^2\, ds = 1$$

ist, absolut unterhalb einer festen positiven Zahl M gelegen ist.

Ein Kern, der den drei soeben ausgesprochenen Voraussetzungen genügt, heiße ein *beschränkter Kern.*

Um die Integralgleichung (2) mit der Theorie der unendlichvielen Variablen in Zusammenhang zu bringen, bedienen wir uns nach dem Vorgange von Herrn Hilbert eines *vollständigen Systems orthogonaler Funktionen.**)

Unter einem solchen System für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ versteht man eine Reihe stetiger Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$, welche

I. die *Orthogonalitätsrelationen*

$$\int_0^1 \varphi_p(x)\,\varphi_q(x)\,dx = \begin{matrix} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{matrix}$$

$$(p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

und

II. die *Vollständigkeitsrelation*

$$\int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx = \sum_{(p)} \left[\int_0^1 u(x)\,\varphi_p(x)\,dx \int_0^1 v(x)\,\varphi_p(x)\,dx \right]$$

für jedes Paar stetiger Funktionen $u(x)$, $v(x)$ befriedigen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Zutreffen der Vollständigkeitsrelation ist (unter Voraussetzung von I) die, daß sich zu jeder stetigen Funktion $u(x)$ und jeder positiven Zahl ε eine endliche Anzahl von Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ angeben läßt derart, daß

$$\int_0^1 (u(x) - c_1\varphi_1(x) - \cdots - c_m\varphi_m(x))^2 dx < \varepsilon$$

wird. Ist allgemeiner $u(x)$ eine Funktion, die stetig ist außer für endlichviele oder abzählbar-unendlichviele Werte der Unabhängigen x, die sich nur an der Stelle $x = 0$ häufen, existiert aber noch das Integral

$$\int_0^1 (u(x))^2 dx,$$

so läßt sich eine im ganzen Intervall stetige Funktion $u^*(x)$ angeben, für welche

$$\int_0^1 (u(x) - u^*(x))^2 dx < \varepsilon$$

ausfällt.**) Hieraus ist zu schließen, daß die Vollständigkeitsrelation II auch noch für je zwei Funktionen $u(x)$, $v(x)$ gelten wird, welche von der eben von $u(x)$ vorausgesetzten allgemeineren Beschaffenheit sind. Führen wir an Stelle von x durch die Substitution

$$x = \frac{1}{t+1} \qquad (t \geqq 0) \tag{4}$$

*) Hilbert, 5. Mitt., pag. 442.

**) Vergl. meine Diss., pag. 14 f.

die Variable t ein und setzen

$$\frac{1}{t+1}\cdot\varphi_p\left(\frac{1}{t+1}\right)=\Phi_p(t),$$

so erhalten wir außer den Beziehungen

$$\text{I}^*.\qquad \int_0^\infty \Phi_p(t)\,\Phi_q(t)\,dt=\delta_{pq}$$

[δ_{pq} bedeutet, wie im folgenden stets, 0, falls $p\neq q$, 1, falls $p=q$ ist] die Vollständigkeitsrelation

$$\text{II}^*.\qquad \int_0^\infty u(t)\,v(t)\,dt=\sum_{(p)}\left[\int_0^\infty u(t)\,\Phi_p(t)\,dt\int_0^\infty v(t)\,\Phi_p(t)\,dt\right],$$

gültig für irgend zwei im allgemeinen stetige Funktionen $u(t)$, $v(t)$, die quadratisch integrierbar sind. Dabei wird unter einer *„im allgemeinen stetigen“* Funktion eine solche verstanden, die für alle Werte von t mit Ausnahme gewisser isoliert liegender Stellen stetig ist.

Wir behandeln jetzt die umgekehrte Frage, wann aus der Konvergenz der Summe

$$\sum_{(p)}\left(\int_0^1 u(x)\,\varphi_p(x)\,dx\right)^2$$

für eine gewisse, nicht überall stetige Funktion $u(x)$ die Existenz des Integrals $\int_0^1 (u(x))^2\,dx$ erschlossen werden kann. Zu diesem Zweck gehen wir aus von unendlichvielen, im Intervall $0\leqq x\leqq 1$ stetigen Funktionen $P_1(x)$, $P_2(x),\ldots$, die gestatten, durch Bildung endlicher Linearkombinationen

$$c_1P_1(x)+c_2P_2(x)+\cdots+c_mP_m(x)$$

mittels konstanter Koeffizienten $c_1, c_2, \cdots, c_m$ jede stetige Funktion*) gleichmäßig anzunähern (z. B. $P_p(x)=x^{p-1}$), und verstehen unter $\varrho(x)$ irgend eine stetige Funktion im Intervall $0\cdots 1$, die höchstens für $x=0$ verschwindet, für $x>0$ hingegen positiv ist, und deren Maximum mit P bezeichnet werde. Wir bestimmen dann die Koeffizienten $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{22}; \gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{33}; \ldots$ sukzessive so, daß die Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x)&=\varrho(x)\cdot\gamma_{11}P_1(x),\\
\varphi_2(x)&=\varrho(x)\,(\gamma_{21}P_1(x)+\gamma_{22}P_2(x)),\\
\varphi_3(x)&=\varrho(x)\,(\gamma_{31}P_1(x)+\gamma_{32}P_2(x)+\gamma_{33}P_3(x)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

*) oder doch jede stetige Funktion, die in der Umgebung des Punktes $x=0$ identisch Null ist.

die Orthogonalitätsrelationen I erfüllen.*) Ist nun $u(x)$ eine für $x > 0$ stetige Funktion von der Art, daß $\int_0^1 \varrho(x)\,|u(x)|\,dx$ und mithin die Integrale $\int_0^1 u(x)\,\varphi_p(x)\,dx$ existieren, und konvergiert ferner

$$\left(\int_0^1 u(x)\,\varphi_1(x)\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 u(x)\,\varphi_2(x)\,dx\right)^2 + \cdots = H^2,$$

so, behaupte ich, ist $u(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ quadratisch integrierbar.

Seien ε, δ zwei positive Zahlen, so daß $\varepsilon + \delta < 1$. Wir setzen

$$\begin{aligned} u^*(x) &= 0 && (0 \leqq x < \varepsilon), \\ &= u(\varepsilon + \delta)\cdot\frac{x-\varepsilon}{\delta} && (\varepsilon \leqq x < \varepsilon + \delta), \\ &= u(x) && (\varepsilon + \delta \leqq x \leqq 1), \end{aligned}$$

bestimmen darauf zu der positiven Größe ζ die Zahl m und die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m$ so, daß

$$\left|\frac{u^*(x)}{\varrho(x)} - c_1 P_1(x) - \cdots - c_m P_m(x)\right| < \zeta$$

oder

$$|u^*(x) - \mathsf{Z}(x)| \leqq \zeta\,\varrho(x) \leqq \zeta \mathsf{P}$$

wird; hierin ist $\mathsf{Z}(x)$ eine endliche Linearkombination der $\varrho(x)\,P_p(x)$, also auch der $\varphi_p(x)$:

$$\mathsf{Z}(x) = \gamma_1\,\varphi_1(x) + \cdots + \gamma_m\,\varphi_m(x).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x)\,\mathsf{Z}(x)\,dx &= \gamma_1 \int_0^1 u(x)\,\varphi_1(x)\,dx + \cdots + \gamma_m \int_0^1 u(x)\,\varphi_m(x)\,dx \\ &\leqq H\sqrt{\gamma_1^2 + \cdots + \gamma_m^2} = H\cdot\sqrt{\int_0^1 (\mathsf{Z}(x))^2\,dx}. \end{aligned} \tag{5}$$

Es gelten ferner die Ungleichungen

$$(u^*(x))^2 - (\mathsf{Z}(x))^2 < \zeta\mathsf{P}\,(2\,M(\varepsilon) + \zeta\mathsf{P}),$$

wo

$$M(\varepsilon) = \underset{\varepsilon \leqq x \leqq 1}{\text{Max.}}\,|u(x)|$$

gesetzt ist, und

$$\left|\int_0^1 u(x)\,u^*(x)\,dx - \int_0^1 u(x)\,\mathsf{Z}(x)\,dx\right| \leqq \zeta \int_0^1 \varrho(x)\,|u(x)|\,dx.$$

*) Vergl. z. B. Hilbert, 5. Mitt., pag. 444.

Führt man sie in (5) ein und läßt dann ζ gegen 0 konvergieren, ohne ε und δ zu ändern, so erhält man

$$\int_0^1 u(x)\, u^*(x)\, dx \leqq H \sqrt{\int_0^1 (u^*(x))^2\, dx}. \tag{6}$$

Endlich ist

$$\left| \int_0^1 u(x)\, u^*(x)\, dx - \int_\varepsilon^1 (u(x))^2\, dx \right| \leqq 2\delta\, (M(\varepsilon))^2,$$

$$\left| \int_0^1 (u^*(x))^2\, dx - \int_\varepsilon^1 (u(x))^2\, dx \right| \leqq 2\delta\, (M(\varepsilon))^2.$$

Berücksichtigt man dies, so kann in (6) der Grenzübergang $L\delta = 0$ vollzogen werden, welcher

$$\int_\varepsilon^1 (u(x))^2\, dx \leqq H \sqrt{\int_\varepsilon^1 (u(x))^2\, dx}$$

ergibt. Diese letzte Relation zeigt die Konvergenz des Integrals $\int_0^1 (u(x))^2\, dx$, und zwar muß, da H^2 auf keinen Fall größer als $\int_0^1 (u(x))^2\, dx$ sein kann,

$$\int_0^1 (u(x))^2\, dx = H^2$$

werden. Damit ist zugleich die Vollständigkeit des Orthogonalsystems $\varphi_p(x)$ bewiesen.

Wir kehren nunmehr zu dem Intervall $0 \cdots \infty$ zurück, und es sei $k(t) \geqq 0$ irgend eine Funktion, die für alle Werte $t \geqq 0$ definiert und stetig ist. Es ist dann leicht, eine *stetige* Funktion

$$0 < k^*(t) \leqq \frac{1}{(t+1)^2}$$

zu konstruieren von der Art, daß das Integral

$$\int_0^\infty k^*(t)\, k(t)\, dt$$

konvergiert. Wir schreiben

$$\varrho(x) = \frac{1}{x} \cdot k^*\left(\frac{1}{x} - 1\right) \qquad \text{für } 0 < x \leqq 1,$$

$$\varrho(0) = 0;$$

alsdann ist $\varrho(x)$ für $x > 0$ positiv und stetig, auch für $x = 0$. Mit Hilfe dieser Funktion $\varrho(x)$ konstruieren wir, wie oben geschildert, das vollständige Orthogonalsystem $\varphi_p(x)$ und setzen darauf, indem wir die Substitution (4) ausüben,

$$\Phi_p(t) = x \cdot \varphi_p(x).$$

Ist dann $U(t)$ eine „im allgemeinen" stetige Funktion, zu der sich eine Zahl A so angeben läßt, daß

$$| U(t) | \leqq A k(t)$$

wird, so existiert offenbar $\int\limits_0^1 \varrho(x) | u(x) | dx$, wenn $u(x)$ durch

$$U(t) = x \cdot u(x)$$

definiert wird, und es ist demnach $\Phi_p(t) (p = 1, 2, \ldots)$ ein vollständiges Orthogonalsystem von der Art, daß für jede Funktion $U(t)$ der soeben geschilderten Beschaffenheit aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{(p)} \Big(\int\limits_0^\infty U(t)\, \Phi_p(t)\, dt\Big)^2$$

auf die des Integrals $\int\limits_0^\infty (U(t))^2 dt$ geschlossen werden kann. Außerdem existiert für jedes p das Integral

$$\int\limits_0^\infty k(t) | \Phi_p(t) | dt.$$

Ein solches Funktionensystem $\Phi_p(t)$ nennen wir, wenn es auf einen kurzen Ausdruck ankommt, *zu der Funktion $k(t)$ passend*. Ein zu $k(t)$ passendes Orthogonalsystem läßt sich auch immer dann finden, wenn $k(t)$ nicht überall, sondern nur „im allgemeinen" stetig ist.

Wir haben nunmehr die Vorbereitungen beendet, um die Theorie der Integralgleichungen mit beschränktem Kern aufnehmen zu können. Wir bedienen uns der früher benutzten Bezeichnungen, verstehen vor allem unter $k(s)$ die durch

$$\int\limits_0^\infty (K(s, t))^2 dt = (k(s))^2, \qquad k(s) \geqq 0$$

definierte Funktion. Wegen der Voraussetzungen, die wir über diese gemacht haben, existiert ein vollständiges System orthogonaler Funktionen

$$\Phi_1(t), \quad \Phi_2(t), \ldots$$

für das Intervall $0 \ldots \infty$, *welches zu $k(t)$ paßt.* Wir zeigten oben, daß die Funktionen

$$K_p(s) = \int_0^\infty K(s,t)\,\Phi_p(t)\,dt$$

außer für $s = s_i$ stetig sind. Wenden wir die Vollständigkeitsrelation an, so kommt

$$\int_0^\infty (K(s,t))^2\,dt = (k(s))^2 = (K_1(s))^2 + (K_2(s))^2 + \cdots.$$

Es ist also

$$|K_q(s)| \leqq k(s) \qquad (q = 1, 2, \ldots),$$

und darum existiert für jedes Paar ganzer positiver Zahlen p, q

$$\int_0^\infty \Phi_p(s)\,K_q(s)\,ds = c_{pq}.$$

Sind $x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n$ irgend $2n$ Zahlen, die den Ungleichungen

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1, \qquad y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leqq 1$$

genügen, und setzen wir

$$u(s) = x_1\Phi_1(s) + \cdots + x_n\Phi_n(s),$$
$$v(t) = y_1\Phi_1(t) + \cdots + y_n\Phi_n(t),$$

so ist

$$\int_0^\infty (u(s))^2\,ds \leqq 1, \qquad \int_0^\infty (v(s))^2\,ds \leqq 1,$$

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty K(s,t)\,u(s)\,v(t)\,dt\,ds = \sum_{\substack{p=1,\cdots,n\\ q=1,\cdots,n}} c_{pq}\,x_p\,y_q.$$

Aus der betreffs des Kernes $K(s,t)$ gemachten dritten Voraussetzung folgt demnach jetzt, daß die mit den Koeffizienten c_{pq} gebildete Bilinearform $C(x,y)$ beschränkt ist.

Bedeuten ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ irgendwelche reelle Zahlen mit konvergenter Quadratsumme, so konvergiert die Reihe

$$\alpha_1 K_1(s) + \alpha_2 K_2(s) + \cdots = g(s)$$

und stellt eine für $s \neq s_i$ stetige Funktion dar, da der Rest der Reihe vom n^{ten} Term ab kleiner als

$$\sqrt{\alpha_n^2 + \alpha_{n+1}^2 + \cdots}\; k(s)$$

ausfällt. Es ist darum auch

$$\left|\int_0^\infty g(s)\,\Phi_p(s)\,ds - \sum_{q=1,\cdots,n} c_{pq}\,\alpha_q\right| \leqq \sqrt{\alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n+2}^2 + \cdots}\int_0^\infty k(s)\,|\Phi_p(s)|\,ds,$$

folglich

$$\int_0^\infty g(s)\,\Phi_p(s)\,ds = c_{p1}\alpha_1 + c_{p2}\alpha_2 + \cdots;$$

mithin konvergiert die Reihe

$$\sum_{(p)}\Big(\int_0^\infty g(s)\,\Phi_p(s)\,ds\Big)^2 = C'C(\alpha,\alpha),$$

und da

$$|g(s)| \leqq \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots}\cdot k(s),$$

das Orthogonalsystem $\Phi_p(s)$ aber als ein zu der Funktion $k(s)$ passendes gewählt ist, konvergiert schließlich auch $\int_0^\infty (g(s))^2\,ds$. Insbesondere ist demnach für jede stetige Funktion $u(s)$, für die das Integral $\int_0^\infty (u(s))^2 ds$ konvergiert, $\int_0^\infty K(s,t)\,u(t)\,dt$ gleichfalls quadratisch integrierbar, und hieraus ist noch zu schließen, daß, wenn $K'(s,t)$ einen zweiten beschränkten Kern bedeutet, der aus K', K durch *Zusammensetzung* entstehende Kern

$$K'K(s,t) = \int_0^\infty K'(s,r)\,K(t,r)\,dr$$

wiederum beschränkt ist.

Um den Satz über die Auflösung der inhomogenen Integralgleichung, den wir zu beweisen gedenken, möglichst einfach aussprechen zu können, benutzen wir die folgende Bezeichnung. Wir sagen, die homogene Integralgleichung

$$\varphi(s) + \int_0^\infty K(t,s)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

mit dem transponierten Kern $K(t,s)$ *gestatte eine näherungsweise Auflösung*, wenn eine Reihe stetiger Funktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... angegeben werden kann, so daß gleichmäßig für alle stetigen Funktionen $v(s)$, deren quadratisches Integral unterhalb 1 liegt,

$$\int_0^\infty \varphi_n(s)\,v(s)\,ds + \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty K(t,s)\,\varphi_n(t)\,v(s)\,ds\,dt$$

mit wachsendem n gegen 0 konvergiert, ohne daß in demselben Sinne $\int_0^\infty \varphi_n(s)\,v(s)\,ds$ gegen 0 strebte.

Satz: *Für jede im allgemeinen stetige, quadratisch integrierbare Funktion $f(s)$ besitzt die Integralgleichung mit dem beschränkten Kern $K(s,t)$*

$$f(s) = \varphi(s) + \int\limits_0^\infty K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

sicher dann eine Lösung $\varphi(s)$ von der gleichen Beschaffenheit, wenn die homogene transponierte Integralgleichung näherungsweise nicht auflösbar ist.

Beweis: Setzen wir

$$(x, y) + C(x, y) = A(x, y),$$

so gibt es eine positive Zahl m derart, daß identisch in den Variablen x_p

$$AA'(x, x) \geqq m \cdot (x, x) \tag{7}$$

wird. Denn andernfalls gäbe es zu jeder positiven Zahl ε endlichviele Werte $x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}, \cdots, x_n^{(\varepsilon)}$, so daß, wenn man noch $x_{n+1}^{(\varepsilon)} = x_{n+2}^{(\varepsilon)} = \cdots = 0$ setzte,

$$(x^{(\varepsilon)}, x^{(\varepsilon)}) = 1, \quad AA'(x^{(\varepsilon)}, x^{(\varepsilon)}) \leqq \varepsilon$$

und folglich identisch in y

$$|A'(x^{(\varepsilon)}, y)| \leqq \sqrt{\varepsilon \cdot (y, y)}$$

ausfiele. Bildeten wir dann die Funktion

$$\varphi_\varepsilon(s) = x_1^{(\varepsilon)}\Phi_1(s) + \cdots + x_n^{(\varepsilon)}\Phi_n(s),$$

so würde sich für alle stetigen Funktionen $v(s)$, deren quadratisches Integral 1 nicht übersteigt, die Ungleichung

$$\left|\int\limits_0^\infty \varphi_\varepsilon(s)\,v(s)\,ds + \int\limits_0^\infty\!\!\int\limits_0^\infty K(t,s)\,\varphi_\varepsilon(t)\,v(s)\,ds\,dt\right| \leqq \sqrt{\varepsilon}$$

ergeben — im Gegensatz zu unserer Voraussetzung. Nach dem Satze von Herrn Toeplitz existiert daher eine beschränkte Bilinearform $B(x, y)$, so daß

$$AB(x, y) = (x, y)$$

wird. Setzen wir in $B(x, y)$ speziell

$$x_p = K_p(s), \quad y_p = \int\limits_0^\infty f(s)\,\Phi_p(s)\,ds = \alpha_p,$$

so geht eine Funktion hervor, die sich wegen des Satzes von der reihen- und kolonnenweisen Summation in der Form

$$\psi(s) = \beta_1 K_1(s) + \beta_2 K_2(s) + \cdots$$

schreiben läßt und welche danach im allgemeinen stetig und zudem im Intervall $0 \ldots \infty$ quadratisch integrierbar ist. Man findet

$$\int\limits_0^\infty \psi(s)\,\Phi_p(s)\,ds = \sum_{(q)} c_{pq}\,\beta_q$$

und folglich

$$\int_0^\infty K(s,t)\,\psi(t)\,dt = \sum_{(p)}\sum_{(q)} c_{pq} K_p(s)\,\beta_q$$
$$= C(K(s),\beta) = CB(K(s),\alpha).$$

Daher wird

$$\psi(s) + \int_0^\infty K(s,t)\,\psi(t)\,dt = B(K(s),\alpha) + CB(K(s),\alpha)$$
$$= AB(K(s),\alpha) = (K(s),\alpha) - \int_0^\infty K(s,t)\,f(t)\,dt.$$

Führen wir die Funktion

$$\varphi(s) = f(s) - \psi(s)$$

ein, so gilt nach der letzten Gleichung

$$\psi(s) = \int_0^\infty K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

und damit erweist sich $\varphi(s)$ als Lösung der inhomogenen Gleichung. Diese Funktion ist in der Tat von der im Satze behaupteten Beschaffenheit.*)

Führen wir in die oben behandelte Integralgleichung einen Parameter λ ein, indem wir schreiben

$$(8)\qquad f(s) = \varphi(s) - \lambda\int_0^\infty K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

so erhebt sich die Frage, für welche Werte von λ der Fall eintritt, daß die zugehörige homogene, transponierte Integralgleichung eine näherungs-

---

*) Vergl. hierzu Hilbert, 5. Mitt., pag. 447 f. — Indem man die von E. Schmidt (Rendiconti di Palermo 1908, XXV, pag. 74) bewiesenen Sätze über Auflösbarkeit linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten heranzieht, erkennt man, daß *die betreffs des Kerns $K(s,t)$ gemachte dritte Annahme für die Gültigkeit des oben bewiesenen Satzes gänzlich entbehrt werden kann.* Denn unter Beibehaltung der im Text benutzten Bezeichnungen gewinnen wir aus

$$|K_1(s)\,K_1(t) + \cdots + K_n(s)\,K_n(t)| \leqq k(s)\,k(t)$$

durch Multiplikation mit $|\Phi_p(s)\,\Phi_p(t)|$ und Integration nach s und t die für alle Indices p, n gültige Ungleichung

$$\sum_{q=1}^{n}\left(\int_0^\infty K_q(s)\,\Phi_p(s)\,ds\right)^2 \leqq \left(\int_0^\infty k(s)\,|\Phi_p(s)|\,ds\right)^2,$$

und mithin konvergiert für jedes p die Quadratsumme

$$c_{p1}^2 + c_{p2}^2 + \cdots.$$

weise Lösung zuläßt — diese Werte λ bilden das *Spektrum* des Kerns $K(s, t)$ —, und weiter, ob sich Genaueres über das Verhalten der homogenen Gleichung für solche λ-Werte ausmachen läßt. Um darauf Antwort zu geben, machen wir noch die Annahme, daß *der beschränkte Kern* $K(s, t)$ *symmetrisch* sei, d. h. daß für alle Werte s, t, für die $K(s, t)$ definiert ist, $K(t, s) = K(s, t)$ ausfällt. Alsdann gilt auch für die Koeffizienten der zugehörigen Bilinearform c_{pq}, die wir von jetzt ab mit k_{pq} bezeichnen wollen, die Symmetriebedingung $k_{pq} = k_{qp}$, wie ich in meiner Dissertation ausführlich gezeigt habe.*) Sind $u(s)$, $v(s)$ irgend zwei im allgemeinen stetige Funktionen, die im Intervall $0 \ldots \infty$ quadratisch integrierbar sind, so ist, wie wir wissen, $\int\limits_0^\infty K(s, t) v(t) dt$ gleichfalls quadratisch integrierbar, und es wird daher, wenn wir

$$\int\limits_0^\infty u(s)\,\Phi_p(s)\,ds = x_p, \qquad \int\limits_0^\infty v(s)\,\Phi_p(s)\,ds = y_p$$

setzen,

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(s, t)\,u(s)\,v(t)\,dt\,ds = \sum_{(p)} x_p \Big(\int\limits_0^\infty \sum_{(q)} y_q K_q(s) \cdot \Phi_p(s) ds\Big)$$
$$= \sum_{(p)} \sum_{(q)} k_{pq}\, x_p\, y_q = K(x, y).$$

Wandeln wir entsprechend das zweifache Integral, in anderer Reihenfolge der Integration genommen, um und benutzen den Satz von der reihen- und kolonnenweisen Summation, so erkennen wir:

Für einen beschränkten symmetrischen Kern existieren im Sinne der sukzessiven Integration die doppelten Integrale

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(s, t)\,u(s)\,v(t)\,dt\,ds = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(s, t)\,v(s)\,u(t)\,dt\,ds,$$

falls $u(s)$, $v(s)$ *irgendwelche im allgemeinen stetige Funktionen bezeichnen, für die*

$$\int\limits_0^\infty (u(s))^2 ds \leq 1, \qquad \int\limits_0^\infty (v(s))^2 ds \leq 1$$

ist, und bleiben ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen, von der Wahl der Funktionen $u(s)$, $v(s)$ *unabhängigen Grenze* M.

Zu jeder symmetrischen beschränkten Bilinearform

$$K(x, y) = \sum_{(p,q)} k_{pq}\, x_p\, y_q$$

---

*) Diss., pag. 35 ff.

gehört eine beschränkte *quadratische Form* der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots$

$$K(x) = K(x, x) = \underset{n=\infty}{L} \sum_{\substack{p=1,2,\cdots,n \\ q=1,2,\cdots,n}} k_{pq} x_p x_q,$$

und umgekehrt erhält man aus $K(x)$ die Bilinearform zurück, indem man

$$K\left(\frac{x+y}{2}\right) - K\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

bildet („*Polarisation*“), wobei unter $K\left(\frac{x+y}{2}\right)$ der Wert der Form $K(\xi)$ für die Argumentwerte $\xi_p = \frac{x_p + y_p}{2}$ verstanden wird.

Um die Theorie der Integralgleichung (8) für Werte λ, die dem Spektrum angehören, behandeln zu können, müssen wir uns mit einigen, die Theorie der *orthogonalen Transformation einer quadratischen Form* betreffenden Resultaten bekannt machen.

Das System der linearen Formen

$$x_p' = o_{p1} x_1 + o_{p2} x_2 + \cdots \qquad (p = 1, 2, \cdots) \tag{9}$$

definiert eine orthogonale Substitution, falls für alle p, q

$$\sum_{r=1,2,\cdots} o_{pr} o_{qr} = \delta_{pq},$$

$$\sum_{r=1,2,\cdots} o_{rp} o_{rq} = \delta_{pq}$$

gilt. Sind dann umgekehrt x_p' irgendwelche Zahlen, deren Quadratsumme $\leqq 1$ ist, so genügen die aus

$$x_p = o_{1p} x_1' + o_{2p} x_2' + \cdots$$

berechneten Zahlen x_p den Gleichungen (9). Ferner folgt aus der Definition, daß

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots = x_1^2 + x_2^2 + \cdots$$

ist, zunächst identisch in $x_1, x_2, \ldots x_n$, falls $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = 0$ gesetzt wird, dann aber auch, wie leicht zu sehen, für alle Werte $x_1, x_2, \ldots$, die dem Bereich $(x, x) \leqq 1$ angehören, (auf welchen die unendlichvielen Variablen stets beschränkt bleiben sollen,) oder noch allgemeiner

$$(x', y') = (x, y),$$

falls die y_p' durch dieselbe Transformation (9) aus den y_p hervorgehen.

Ist $u(x)$ eine stetige Funktion im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$, $f(x)$ eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung, und teilen wir das Intervall $0 \ldots 1$ durch die Punkte $x_0 = 0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = 1$ irgendwie in n Teilintervalle, bezeichnen ferner mit $\Delta_i f$ die Differenz der Funktion $f(x)$ im $(i+1)^{\text{ten}}$ Intervall,

$$\Delta_i f = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

mit ε die Länge des größten unter jenen Teilintervallen, so existiert der Limes

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\left[\sum_{i=0,1,\cdots,n-1} u(x_i)\,\Delta_i f\right],$$

den wir als Verallgemeinerung des gewöhnlichen Integralbegriffs mit $\int\limits_0^1 u(x)\,df(x)$ bezeichnen werden.

Verstehen wir weiter mit Herrn Hellinger*) unter $f(x)$, $f_1(x)$ stetige Funktionen und unter $g(x)$ eine stetige, monoton wachsende**) Funktion im Intervall $0\ldots 1$, die von der Beschaffenheit sind, daß es zwei stetige, monoton wachsende Funktionen $h(x)$, $h_1(x)$ gibt, welche für jedes Teilintervall von $0\ldots 1$ die Ungleichungen

$$(\Delta f)^2 \leqq \Delta g \cdot \Delta h$$
$$(\Delta f_1)^2 \leqq \Delta g \cdot \Delta h_1$$

befriedigen [unter Δf usw. die Differenz der Funktion $f(x)$ für jenes Intervall verstanden], so existiert in demselben Sinne wie oben der Grenzwert***)

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\sum_{i=0,1,\cdots,n-1}\frac{\Delta_i f\cdot\Delta_i f_1}{\Delta_i g} = \int\limits_0^1 \frac{df\,df_1}{dg}.$$

Die Übertragung der beiden auseinandergesetzten Integralbegriffe auf ein unendliches Intervall geschieht wie bei dem gewöhnlichen Integral.

Nun sei $\varrho(\mu)$ eine für alle reellen μ definierte stetige, monoton wachsende Funktion, die in der Umgebung der Stelle $\mu = 0$ konstant ist, $\varrho_1(\mu)$, $\varrho_2(\mu)$, ... stetige Funktionen, die (in allen Intervallen, in denen sich $\varrho(\mu)$ nicht ändert, gleichfalls konstant bleiben und) den Bedingungen

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varrho_p(\mu)\,d\varrho_q(\mu)}{d\varrho(\mu)} = \delta_{pq} \tag{10}$$

genügen, ferner

$$\varrho(0) = \varrho_1(0) = \varrho_2(0) = \cdots = 0:$$

alsdann sagen wir mit Herrn Hellinger, die Funktionen $\varrho_1(\mu)$, $\varrho_2(\mu)$, ...

---

*) Hellinger, Orthogonalinvarianten quadratischer Formen usw., Inauguraldissertation (Göttingen 1907), pag. 25 ff.

**) Durch diesen Ausdruck soll ein streckenweises Konstantbleiben von $g(x)$ nicht ausgeschlossen werden.

***) Ist $\Delta_i g = 0$, so gilt auch $\Delta_i f = \Delta_i f_1 = 0$; unter $\dfrac{\Delta_i f\cdot\Delta_i f_1}{\Delta_i g}$ soll alsdann 0 verstanden werden.

definierten *ein differentielles Orthogonalsystem mit der Basis* $\varrho(\mu)$. Dasselbe heißt *vollständig*, wenn für irgend zwei stetige Funktionen $f(\mu)$, $g(\mu)$, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(d f(\mu))^2}{d\varrho(\mu)}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(d g(\mu))^2}{d\varrho(\mu)}$$

existieren, die Vollständigkeitsrelation

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df\,dg}{d\varrho}=\sum_{(p)}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df\,d\varrho_p}{d\varrho}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dg\,d\varrho_p}{d\varrho}\right]$$

gilt. Insbesondere ist dann für stetige Funktionen $u(\mu)$, $v(\mu)$, für welche die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(u(\mu))^2 d\varrho(\mu), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}(v(\mu))^2 d\varrho(\mu)$$

konvergieren,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u(\mu)v(\mu)d\varrho(\mu)=\sum_{(p)}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\mu)d\varrho_p(\mu)\int_{-\infty}^{+\infty}v(\mu)d\varrho_p(\mu)$$

also beispielsweise

$$(\varrho_1(\mu))^2+(\varrho_2(\mu))^2+\cdots=|\varrho(\mu)|.$$

Wegen (10) ist identisch in $x_1, \ldots x_n$, falls man $x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=0$ setzt,

$$(x, x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(d\sum_{(p)}\varrho_p(\mu)x_p)^2}{d\varrho(\mu)}. \tag{11}$$

Herr Hellinger hat aber gezeigt*), daß, wenn $x_1, x_2, \ldots$ irgendwelche Werte mit konvergenter Quadratsumme sind, $\sum_{(p)}\varrho_p(\mu)x_p$ eine stetige Funktion von μ *von beschränkter Schwankung* wird, und daß auch für solche Werte der Variablen x die Gleichung (11) erfüllt bleibt, und wiederum allgemeiner

$$(x, y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dX(\mu)\,dY(\mu)}{d\varrho(\mu)}, \tag{11'}$$

falls

$$X(\mu)=\sum_{(p)}\varrho_p(\mu)x_p, \qquad Y(\mu)=\sum_{(p)}\varrho_p(\mu)y_p$$

gesetzt wird.

Da $\varrho(\mu)$ in der Umgebung von $\mu=0$ konstant bleibt, können wir bilden

*) l. c. pag. 56 f. und pag. 27.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\int_0^\mu \frac{d\varrho_p(\nu)}{\nu}\cdot d\varrho_q(\mu)}{d\varrho(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p(\mu)\cdot d\int_0^\mu \frac{d\varrho_q(\nu)}{\nu}}{d\varrho(\mu)}.$$

Diese Integrale, die wir kürzer durch $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p d\varrho_q}{\mu d\varrho}$ bezeichnen, verwenden wir in der folgenden Weise zur Bildung einer, wie man leicht sieht, *beschränkten* quadratischen Form $K_0(x)$ der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots$:

$$K_0(x) = \sum_{(p,q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p d\varrho_q}{\mu d\varrho} \cdot x_p x_q.$$

Die auf solche Art aus dem vollständigen differentiellen Orthogonalsystem $\varrho_p(\mu)$ mit der Basis $\varrho(\mu)$ gewonnene Form möge eine *Elementarform* genannt werden.

Der durch die Entwicklungen von Hilbert und Hellinger bewiesene Satz über die orthogonale Transformation ist nun dieser*). Ist $K(x)$ irgend eine beschränkte quadratische Form, so gibt es eine orthogonale Transformation, welche an Stelle der Variablen x_p die Variablen x'_p, x''_p; $x_p^{(1)}$, $x_p^{(2)}$, $x_p^{(3)}, \ldots$ substituiert:

$$x'_p = \sum_{(q)} l'_{pq} x_q, \qquad x''_p = \sum_{(q)} l''_{pq} x_q,$$

$$x_p^{(h)} = \sum_{(q)} l_{pq}^{(h)} x_q \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$[p = 1, 2, \ldots]$$

und durch die $K(x)$ in die folgende Form gebracht wird:

$$K(x) = \sum_{(p)} \frac{x_p'^2}{\lambda_p} + \sum_{(h)} K^{(h)}(x^{(h)}).$$

Dabei sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ gewisse von 0 verschiedene Zahlen, die sogenannten *Eigenwerte*, welche das *Punktspektrum* der quadratischen Form ausmachen, jede der Formen $K^{(h)}(x^{(h)})$ aber eine Elementarform der Variablen $x_p^{(h)}$:

$$K^{(h)}(x^{(h)}) = \sum_{(p,q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p^{(h)}(\mu)\, d\varrho_q^{(h)}(\mu)}{d\varrho^{(h)}(\mu)} x_p^{(h)} x_q^{(h)}.$$

Diejenigen Werte μ, in deren Umgebung irgend eine der Basisfunktionen $\varrho^{(h)}(\mu)$ nicht konstant ist, bilden das *Streckenspektrum* von $K(x)$. Dem oben

*) Hilbert, 4. Mitt., pag. 198; Hellinger, Diss., pag. 60

definierten Spektrum gehören dann das Streckenspektrum, das Punktspektrum und die Häufungspunkte des Punktspektrums an.

Wir kehren zu dem Kern $K(s, t)$ zurück und nehmen zunächst der Einfachheit halber an, daß die aus ihm berechnete quadratische Form $K(x)$ von solcher Art ist, daß sie durch eine orthogonale Transformation der Variabeln x_p in die Variablen x'_p, ξ_p in eine Elementarform $K^*(\xi)$ der ξ_p umgewandelt wird:

$$x'_p = m_{p1}x_1 + m_{p2}x_2 + \cdots,$$
$$\xi_p = l_{p1}x_1 + l_{p2}x_2 + \cdots,$$

$$(12) \qquad K(x) = K^*(\xi) = \sum_{(p,q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p(\mu)\, d\varrho_q(\mu)}{\mu\, d\varrho(\mu)} \xi_p \xi_q.$$

Die $\varrho_p(\mu)$ definieren ein vollständiges differentielles Orthogonalsystem mit der Basis $\varrho(\mu)$, die m_{pq} und l_{pq} genügen den Bedingungen

$$(13) \qquad \sum_{(r)} m_{pr}m_{qr} = \sum_{(r)} l_{pr}l_{qr} = \sum_{(r)} m_{rp}m_{rq} + \sum_{(r)} l_{rp}l_{rq} = \delta_{pq},$$
$$\sum_{(r)} m_{pr}l_{qr} = 0.$$

Indem wir die früheren Bezeichnungen wieder aufnehmen, setzen wir

$$k'_p(s) = x'_p(K(s)) = m_{p1}K_1(s) + m_{p2}K_2(s) + \cdots,$$
$$k_p(s) = \xi_p(K(s)) = l_{p1}K_1(s) + l_{p2}K_2(s) + \cdots.$$

Diese Funktionen sind im allgemeinen stetig, und es ist

$$(14) \qquad \sum_{(p)} (k_p(s))^2 + \sum_{(p)} (k'_p(s))^2 = \sum_{(p)} (K_p(s))^2.$$

Die $k'_p(s)$, $k_p(s)$ definierenden unendlichen Reihen dürfen nach Multiplikation mit $\Phi_q(s)$ gliedweise integriert werden: so ergibt sich

$$\int_0^\infty k'_p(s)\Phi_q(s)\,ds = m_{p1}k_{q1} + m_{p2}k_{q2} + \cdots,$$
$$\int_0^\infty k_p(s)\Phi_q(s)\,ds = l_{p1}k_{q1} + l_{p2}k_{q2} + \cdots.$$

Hieraus gewinnen wir mittels der Beziehungen (12) und (13) (unter Zuhilfenahme des Satzes von der kolonnen- und reihenweisen Summation quadratischer Formen) die Gleichungen:

$$\int_0^\infty k_p'(s)\,\Phi_q(s)\,ds = 0,$$

$$\int_0^\infty k_p(s)\,\Phi_q(s)\,ds = \sum_{(r)} l_{rq} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p\,d\varrho_r}{\mu\,d\varrho}.$$

Da nach früheren Auseinandersetzungen die Integrale $\int_0^\infty (k_p'(s))^2 ds$, $\int_0^\infty (k_p(s))^2 ds$ existieren, folgt aus diesen Rechnungen

$$k_p'(s) = 0, \tag{15}$$

$$\int_0^\infty (k_p(s))^2 ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d\varrho_p)^2}{\mu^2 d\varrho}.$$

Wir führen ferner die Funktionen

$$\mathsf{A}(s;\lambda) = k_1(s)\int_0^\lambda \mu\,d\varrho_1(\mu) + k_2(s)\int_0^\lambda \mu\,d\varrho_2(\mu) + \cdots,$$

$$\mathsf{B}(s;\lambda) = k_1(s)\,\varrho_1(\lambda) + k_2(s)\,\varrho_2(\lambda) + \cdots$$

ein. Diese beiden Funktionen sind für jedes Wertepaar (s,λ), falls $s \neq s_i$ ist, stetige Funktionen; es existieren die Integrale $\int_0^\infty (\mathsf{A}(s;\lambda))^2 ds$, $\int_0^\infty (\mathsf{B}(s;\lambda))^2 ds$. Als Funktionen von λ sind A und B nach den Hellingerschen Resultaten von beschränkter Schwankung, und es existiert außerdem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d_\mu \mathsf{B}(s;\mu))^2}{d\varrho(\mu)} = \sum_{(p)} (k_p(s))^2.$$

Die letzte Summe stimmt aber wegen (14) und (15) mit

$$\sum_{(p)} (K_p(s))^2 = KK(s,s)$$

überein, und es gilt infolgedessen etwas allgemeiner

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\mu \mathsf{B}(s;\mu)\,d_\mu \mathsf{B}(t;\mu)}{d\varrho(\mu)} = KK(s,t). \tag{16}$$

Die Funktionen $\mathsf{A}(s;\lambda)$ und $\mathsf{B}(s;\lambda)$ stehen in einem einfachen Zusammenhang miteinander. Es ist nämlich

$$\int_0^\lambda \mu\,d\varrho_p(\mu) = \lambda\varrho_p(\lambda) - \int_0^\lambda \varrho_p(\mu)\,d\mu,$$

und folglich, da die Reihe

$$k_1(s)\,\varrho_1(\mu) + k_2(s)\,\varrho_2(\mu) + \cdots = \mathsf{B}(s;\mu)$$

für einen Wert $s \neq s_i$ gleichmäßig im Intervall $0 \leqq \mu \leqq \lambda$ konvergiert,

$$\mathsf{A}(s;\lambda) = \lambda\mathsf{B}(s;\lambda) - \int_0^\lambda \mathsf{B}(s;\mu)\,d\mu.$$

Diese Gleichung, die sich auch in der Form

$$\mathsf{A}(s;\lambda) = \int_0^\lambda \mu\, d_\mu \mathsf{B}(s;\mu) \tag{17}$$

schreiben läßt, hat zur Folge, daß sich für irgend eine stetige Funktion $f(\mu)$, für welche $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(df)^2}{d\varrho}$ existiert,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathsf{B}(s;\mu)\,df(\mu)}{d\varrho(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathsf{A}(s;\mu)\,df(\mu)}{\mu\, d\varrho(\mu)}$$

und auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d_\mu \mathsf{B}(s;\mu))^2}{d\varrho(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d_\mu \mathsf{A}(s;\mu))^2}{\mu^2 d\varrho(\mu)}$$

ergibt. (16) verwandelt sich demnach in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathsf{A}(s;\mu)\, d\mathsf{A}(t;\mu)}{\mu^2 d\varrho(\mu)} = KK(s,t).$$

Die Fourierkoeffizienten der Funktion $\mathsf{A}(s;\lambda)$ nach der Variabeln s dürfen durch gliedweise Integration berechnet werden; es ergibt sich so

$$\int_0^\infty \mathsf{A}(s;\lambda)\,\Phi_p(s)\,ds = \sum_{(q)}\sum_{(r)} \left[\int_0^\lambda \mu\, d\varrho_q(\mu) \cdot l_{rp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_q\, d\varrho_r}{\mu\, d\varrho}\right].$$

Durch Summationsvertauschung und wegen der Vollständigkeit der $\varrho_p(\mu)$ findet man

$$\int_0^\infty \mathsf{A}(s;\lambda)\,\Phi_p(s)\,ds = \sum_{(q)} l_{qp}\varrho_q(\lambda). \tag{18}$$

Wir schließen hieraus noch

$$\int_0^\infty (\mathsf{A}(s;\lambda))^2 ds = (\varrho_1(\lambda))^2 + (\varrho_2(\lambda))^2 + \cdots = |\varrho(\lambda)|, \tag{19}$$

weiter aber

$$\int_0^\infty K(s,t)\,\mathsf{A}(t;\lambda)\,dt = \sum_{(p)}\sum_{(q)} l_{qp}\varrho_q(\lambda)K_p(s)$$
$$= \sum_{(q)}\sum_{(p)} \varrho_q(\lambda) l_{qp} K_p(s) - \sum_{(q)} \varrho_q(\lambda) k_q(s) = \mathsf{B}(s;\lambda).$$

Benutzen wir (17), so ergibt sich

$$\Delta_\lambda \mathsf{A}(s;\lambda) - \int_{(\Delta_\lambda)} \mu \cdot d_\mu \int_0^\infty K(s,t)\,\mathsf{A}(t;\mu)\,dt = 0. \tag{20}$$

Enthält das Intervall, auf welches sich das Differenzsymbol Δ_λ bezieht, und das auch selbst kurz mit Δ_λ bezeichnet werde, Teile des Streckenspektrums von $K(x)$, so ist, wie (19) zeigt, $\Delta_\lambda \mathsf{A}(s;\lambda)$ nicht identisch in s gleich Null. Den Inhalt der Gleichung (20) dürfen wir also dahin aussprechen, daß sich für einen Wert λ, der dem Streckenspektrum angehört, das *„in s nicht identisch verschwindende Differential“* $d_\lambda \mathsf{A}(s;\lambda)$ *als eine Lösung der homogenen Gleichung ergibt.* Dieselbe hat hingegen für keinen Wert von λ eine *eigentliche* Lösung, d. h. es gibt keine im allgemeinen stetige, quadratisch integrierbare Funktion $\varphi(s)$, für welche

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^\infty K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

wird. Denn dies würde eine Lösung $x_1, x_2, \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme der unendlich vielen linearen Gleichungen

$$x_p - \lambda \sum_{(q)} k_{pq} x_q = 0$$
$$(p = 1, 2, \ldots)$$

zur Folge haben, und eine solche existiert nach Hilbert*) nur für Werte λ, die dem Punktspektrum der quadratischen Form $K(x)$ angehören. Ein Punktspektrum ist aber in unserm Fall überhaupt nicht vorhanden.

Bezeichnet jetzt $g(s)$ eine beliebige im allgemeinen stetige, quadratisch integrierbare Funktion, so hat

$$f(s) = \int_0^\infty K(s,t)\,g(t)\,dt$$

den gleichen Charakter, und es ist nach dem allgemeinen Satz auf S. 286:

$$\int_0^\infty \mathsf{A}(s;\lambda) f(s)\,ds = \int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,g(s)\,ds.$$

---

*) Hilbert, 4. Mitt., pag. 199.

Wir setzen

$$\int_0^\infty g(s)\,\Phi_p(s)\,ds = \bar{a}_p,$$

$$l_{p1}\bar{a}_1 + l_{p2}\bar{a}_2 + \cdots = a_p.$$

Da entsprechend der Formel (18)

$$\sum_{(q)} l_{pq}\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,\Phi_q(s)\,ds = \int_0^\lambda \frac{d\varrho_p(\mu)}{\mu},$$

$$\sum_{(q)} m_{pq}\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,\Phi_q(s)\,ds = 0$$

wird, folgt

$$\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,g(s)\,ds = \sum_{(p)} \bar{a}_p\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,\Phi_p(s)\,ds$$

$$= \sum_{(p)}\Big\{\sum_{(q)} l_{pq}\bar{a}_q \cdot \sum_{(q)} l_{pq}\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,\Phi_q(s)\,ds\Big\}$$

$$+ \sum_{(p)}\Big\{\sum_{(q)} m_{pq}\bar{a}_q \cdot \sum_{(q)} m_{pq}\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,\Phi_q(s)\,ds\Big\} = \sum_{(p)} a_p\int_0^\lambda \frac{d\varrho_p(\mu)}{\mu}.$$

Setzen wir nun in der Beziehung (11′)

$$x_p = a_p, \qquad y_p = k_p(s),$$

so wird

$$X(\lambda) = a_1\varrho_1(\lambda) + a_2\varrho_2(\lambda) + \cdots,$$
$$Y(\lambda) = \mathsf{B}(s;\lambda),$$

mithin

$$\Delta X(\lambda) = \int_{(\Delta)} \mu \cdot d_\mu \int_0^\infty \mathsf{A}(s;\mu)\,f(s)\,ds.$$

Da aber

$$a_1k_1(s) + a_2k_2(s) + \cdots = f(s)$$

wird, geht (11′) über in

$$(21)\qquad f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\mu \mathsf{B}(s;\mu)\,dX(\mu)}{d\varrho(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu\,\frac{d\mathsf{B}(s;\mu)\cdot d\int_0^\infty \mathsf{A}(t;\mu)\,f(t)\,dt}{d\varrho(\mu)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\mu \mathsf{A}(s;\mu)\cdot d_\mu\int_0^\infty \mathsf{A}(t;\mu)\,f(t)\,dt}{d\varrho(\mu)}.$$

Diese Integraldarstellung, welche eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Fourierschen Integraltheorems ist, gilt demnach für jede Funktion $f(s)$, die sich in der Form $\int_0^\infty K(s,t)\,g(t)\,dt$ mittels einer beliebigen, im allgemeinen stetigen, quadratisch integrierbaren Funktion $g(s)$ darstellen läßt.

Wir erwähnen noch die folgende leicht zu beweisende Eigenschaft der Funktion $\mathsf{A}(s;\lambda)$. Für irgend zwei stetige Funktionen $f(\mu)$, $g(\mu)$, für die $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(df)^2}{d\varrho}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(dg)^2}{d\varrho}$ existieren, gilt, falls

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(\mu)\cdot d_\mu \mathsf{A}(s;\mu)}{\mu\, d\varrho(\mu)} = \varphi(s), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dg(\mu)\cdot d_\mu \mathsf{A}(s;\mu)}{\mu\, d\varrho(\mu)} = \psi(s)$$

gesetzt wird, die „Orthogonalitätsrelation"

$$\int_0^\infty \varphi(s)\,\psi(s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(\mu)\cdot dg(\mu)}{\mu^2\, d\varrho(\mu)}. \tag{22}$$

Wir gehen jetzt auf die Frage ein, wieweit das Streckenspektrum und die Funktion $\mathsf{A}(s;\lambda)$ durch den Kern $K(s,t)$ bestimmt sind. Es sei μ_0 irgend ein Wert, welcher dem Streckenspektrum nicht angehört; da das Streckenspektrum abgeschlossen ist, können wir dann ein Intervall i der Variablen μ

$$|\mu-\mu_0| \leqq h$$

angeben, das gleichfalls einschließlich seiner Endpunkte außerhalb des Streckenspektrums gelegen ist. Es liege ferner eine für alle $s \geqq 0$ und alle μ des Intervalls i definierte Funktion $\mathsf{A}^*(s;\mu)$ vor, welche stetig in (s,μ) ist, falls $s \neq s_i$, und von solcher Art, daß $\int_0^\infty (\mathsf{A}^*(s;\mu))^2\,ds$ konvergiert und eine stetige Funktion von μ vorstellt. Endlich sei für jedes Teilintervall Δ_μ von i

$$\Delta_\mu \mathsf{A}^*(s;\mu) = \int_{(\Delta_\mu)} \nu\cdot d_\nu \int_0^\infty K(s,t)\,\mathsf{A}^*(t;\nu)\,dt.\text{*)}$$

---

*) Dabei braucht nicht angenommen zu werden, daß $\mathsf{B}^*(s;\mu)$ in μ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, falls man nur dem Integral

$$\int_{(\Delta)} \nu\cdot d\mathsf{B}^*(s;\nu)$$

die aus (23) hervorgehende Bedeutung beilegt.

Aus den Voraussetzungen folgt, daß

$$\underset{\mu'=\mu}{L}\int_0^\infty (\mathsf{A}^*(s;\mu) - \mathsf{A}^*(s;\mu'))^2 ds = 0$$

und daher auch

$$\mathsf{B}^*(s;\mu) = \int_0^\infty K(s,t)\,\mathsf{A}^*(t;\mu)\,dt$$

eine stetige Funktion von s und μ ist, falls $s \neq s_i$. Es gilt dann also

$$\Delta\mathsf{A}^*(s;\mu) = \Delta(\mu\mathsf{B}^*(s;\mu)) - \int_{(\Delta)} \mathsf{B}^*(s;\nu)\,d\nu. \tag{23}$$

Bedeutet $f(s)$ irgend eine im allgemeinen stetige, quadratisch integrierbare Funktion, so ist leicht einzusehen, daß

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mu_0}^{\mu} \mathsf{B}^*(s;\nu)\,d\nu\right) f(s)\,ds = \int_{\mu_0}^{\mu}\left(\int_0^\infty \mathsf{B}^*(s;\nu) f(s)\,ds\right) d\nu$$

wird, folglich

$$\left[\int_0^\infty \mathsf{A}^*(s;\mu) f(s)\,ds\right]_{\mu_0}^{\mu} = \left[\mu\cdot\int_0^\infty \mathsf{B}^*(s;\mu) f(s)\,ds\right]_{\mu_0}^{\mu} - \int_{\mu_0}^{\mu} d\nu \int_0^\infty \mathsf{B}^*(s;\nu) f(s)\,ds.$$

Es gilt aber nach früherem die Beziehung

$$\int_0^\infty \Delta_\mu \mathsf{A}^*(s;\mu)\cdot\Delta_\lambda \mathsf{B}(s;\lambda)\,ds = \int_0^\infty \Delta_\mu \mathsf{B}^*(s;\mu)\cdot\Delta_\lambda \mathsf{A}(s;\lambda)\,ds.$$

Wir wollen dabei unter Δ_μ ein Intervall $\mu_0\mu$ verstehen, das ganz in $\mathfrak{i}$ liegt, und ferner sei $\Delta_\lambda = (\lambda_0\lambda)$; hierin denken wir uns λ gleichfalls in einem Intervall $\mathfrak{i}'$: $|\lambda - \lambda_0| \leqq h'$ veränderlich, das von $\mathfrak{i}$ vollständig getrennt liegt. Indem wir dann

$$\int_0^\infty \Delta_\mu \mathsf{B}^*(s;\mu)\cdot\Delta_\lambda \mathsf{B}(s;\lambda)\,ds = V(\lambda,\mu)$$

schreiben, liefern die beiden letzten Gleichungen

$$(\mu-\lambda)\cdot V(\lambda,\mu) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} V(\lambda,\mu)\,d\lambda = \int_{\mu_0}^{\mu} V(\lambda,\mu)\,d\mu.$$

Bezeichnet μ' einen Wert, den wir gegen μ konvergieren lassen, δ das Intervall $\mu\mu'$, bezw. das auf dieses Intervall sich beziehende Differenzsymbol, so kommt

$$(\mu-\lambda)\frac{\delta V}{\delta\mu} + \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\delta V}{\delta\mu}\,d\lambda = V(\lambda,\mu^*) - V(\lambda,\mu'), \tag{24}$$

wenn wir unter μ^* einen (von λ abhängigen) Punkt des Intervalls $\mu\mu'$ verstehen. Es ist nun leicht einzusehen, daß zu einer beliebigen positiven Größe ε eine andere σ so bestimmt werden kann, daß für alle λ des Intervalls i' und alle Werte μ_1, μ_2 des Intervalls i, die die Ungleichung $|\mu_1 - \mu_2| < \sigma$ erfüllen,

$$|V(\lambda, \mu_1) - V(\lambda, \mu_2)| < \varepsilon$$

wird. Wir wenden daher den folgenden Hilfssatz auf (24) an:

Ist $e(x)$ irgend eine stetige, durchaus positive Funktion im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$, $f_1(x), f_2(x), \cdots$ eine Folge stetiger Funktionen, für welche

$$\varepsilon_i(x) = e(x) f_i(x) + \int_0^x f_i(\xi)\, d\xi$$

mit wachsendem i gleichmäßig im Intervall $0 \cdots 1$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert auch die Folge $f_1(x), f_2(x), \cdots$ gleichmäßig gegen 0.

So erschließen wir die Limesgleichung

$$\underset{\mu'=\mu}{L} \frac{\delta V}{\delta \mu} = 0, \quad \text{d. i.} \quad \frac{\partial V(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = 0.$$

Da aber $V(\lambda, \mu_0) = 0$ ist, wird notwendig identisch in λ, μ für die in Betracht kommenden Bereiche

$$V(\lambda, \mu) = \int_0^\infty \Delta_\mu \mathsf{B}^*(s; \mu) \cdot \Delta_\lambda \mathsf{B}(s; \lambda)\, ds = 0,$$

mithin auch

$$\int_0^\infty \Delta_\mu \mathsf{B}^*(s; \mu) \cdot \Delta_\lambda \mathsf{A}(s; \lambda)\, ds = 0. \tag{25}$$

Wir haben noch den Beweis des angewendeten Hilfssatzes nachzuholen. Ist für eine stetige Funktion $f(x)$

$$\left| e(x) f(x) + \int_0^x f(\xi)\, d\xi \right| < \varepsilon$$

und bedeutet A das Maximum von $\frac{1}{e(x)} = \mathsf{E}(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$, so gilt, wenn wir die Funktion

$$\int_0^x f(\xi)\, d\xi = g(x)$$

einführen,

$$\left| \mathsf{E}(x)\, g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \right| < \varepsilon A.$$

Nun ist

$$e^{\int_0^x \mathsf{E}(\xi)\, d\xi} \left(\mathsf{E}(x) g(x) + \frac{dg}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(e^{\int_0^x \mathsf{E}(\xi)\, d\xi} \cdot g(x) \right),$$

also

$$\left|\frac{d}{dx}\left(e^{\int_0^x \mathsf{E}(\xi)\,d\xi} g(x)\right)\right| < \varepsilon A \cdot e^{Ax},$$

$$|g(x)| \leq \varepsilon\,(e^{Ax} - 1).$$

Weiter folgt dann

$$\left|\frac{f(x)}{\mathsf{E}(x)}\right| < \varepsilon \cdot e^{Ax}, \quad |f(x)| < \varepsilon A \cdot e^{Ax},$$

und damit ist jener Hilfssatz bewiesen.

Da für $\Delta_\mu \mathsf{B}^*(s;\mu)$ die Darstellung gilt

$$\Delta_\mu \mathsf{B}^*(s;\mu) = \int_0^\infty K(s,t)\,\Delta_\mu \mathsf{A}^*(t;\mu)\,dt,$$

dürfen wir diese Funktion in dem Integraltheorem (21) an Stelle von $f(s)$ einführen, und weil für jedes Teilintervall von $\mathfrak{i}$

$$\Delta_\mu \mathsf{A}(s;\mu) = 0$$

ist, erhalten wir aus dieser Integraldarstellung unter Berücksichtigung von (25)

$$\Delta_\mu \mathsf{B}^*(s;\mu) = 0$$

und folglich [s. Gleichung (23)]

$$\Delta_\mu \mathsf{A}^*(s;\mu) = 0.$$

Zufolge der letzten, für jedes Teilintervall von $\mathfrak{i}$ gültigen Gleichung ist demnach $\mathsf{A}^*(s;\mu)$ mit Bezug auf die Variable μ eine Konstante. Damit ist gezeigt, daß *für Werte λ, die dem Streckenspektrum nicht angehören, der homogenen Integralgleichung* in dem erörterten Sinne *durch ein nichtverschwindendes Differential auf keine Weise genügt werden kann,* und auf solche Art zugleich eine charakteristische Eigenschaft des Streckenspektrums gewonnen, die erkennen läßt, daß dasselbe durch den Kern $K(s,t)$ allein völlig bestimmt ist.

Hätten wir in der obigen Deduktion angenommen, daß μ_0 dem Streckenspektrum angehört, so hätte sich die folgende Darstellung der Funktion $\mathsf{A}^*(s;\lambda)$ ergeben [bei welcher $\mathsf{A}^*(s;0) = 0$ angenommen ist]

$$\mathsf{A}^*(s;\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d_\mu \mathsf{A}(s;\mu)\cdot dH(\mu)}{d\varrho(\mu)},$$

in der $H(\mu)$ eine gewisse stetige Funktion von beschränkter Schwankung bezeichnet, für die $\frac{(dH(\mu))^2}{d\varrho(\mu)}$ in jedem endlichen Intervall integrierbar ist. Diese Gleichung besagt, daß *bis auf einen von s unabhängigen Faktor das*

Differential $d_\lambda \mathsf{A}(s;\lambda)$ *das einzige ist, welches der homogenen Integralgleichung für den Wert* λ *des Streckenspektrums genügt.*

Zur Bestimmung der Funktion $\mathsf{A}(s;\lambda)$ haben wir im vorstehenden ein System orthogonaler Funktionen $\Phi_p(s)$ von besonderer Art benutzt. Bezeichnet hingegen $\Phi_p'(s)$ $(p = 1, 2, \cdots)$ ein beliebiges vollständiges Orthogonalsystem für das Intervall $0 \cdots \infty$, so erkennt man leicht, daß die quadratische Form $K'(x)$ mit den Koeffizienten

$$k'_{pq} = \int_0^\infty \int_0^\infty K(s,t)\, \Phi_p'(s)\, \Phi_q'(t)\, ds\, dt$$

in $K(x)$ orthogonal transformierbar ist; folglich ist eine orthogonale Transformation der Variablen x_p in die Variablen x_p', ξ_p angebbar — ihre Koeffizienten mögen mit m'_{pq}, bzw. l'_{pq} bezeichnet sein —, so daß

$$K'(x) = \sum_{(p,q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p \cdot d\varrho_q}{\mu\, d\varrho}\, \xi_p\, \xi_q$$

wird, und zwar stellt sich

$$l'_{p1} K_1'(s) + l'_{p2} K_2'(s) + \cdots = l_{p1} K_1(s) + l_{p2} K_2(s) + \cdots$$

heraus, wenn unter $K_p'(s)$ das Integral

$$\int_0^\infty K(s,t)\, \Phi_p'(t)\, dt$$

verstanden wird; d. h. die Funktionen $k_p(s)$ und mithin auch $\mathsf{A}(s;\lambda)$ sind von der Wahl des vollständigen Orthogonalsystems $\Phi_p'(s)$ vollständig unabhängig, und ein beliebiges solches, mag es nun zu der Funktion $k(s)$ passen oder nicht, ist zu ihrer Berechnung geeignet.

Besondere Hervorhebung verdient der Fall, daß das Streckenspektrum aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl von Intervallen besteht, die Funktion $|\varrho(\lambda)|$ mit der Gesamtlänge der zwischen 0 und λ gelegenen Intervalle des Streckenspektrums identisch wird und schließlich $\mathsf{A}(s;\lambda)$ für jeden Wert von λ, der *dem Innern* des Streckenspektrums angehört, nach λ stetig differenzierbar ist

$$\frac{\partial \mathsf{A}(s,\lambda)}{\partial \lambda} = \mathsf{P}(s;\lambda):$$

alsdann nenne ich den Kern $K(s,t)$ *regulär.**) Hat unter diesen Umständen die Funktion $f(s)$, welche in die Form

$$\int_0^\infty K(s,t)\, g(t)\, dt$$

*) Diesen Fall, der bisher in den Anwendungen allein auftritt, habe ich in meiner Dissertation ohne Heranziehung des Hellingerschen Integralbegriffs behandelt.

gebracht werden kann, außerdem noch die Eigenschaft, daß das Integral

$$\int_0^\infty \mathsf{P}(s; \lambda) f(s)\, ds$$

gleichmäßig in der Umgebung jedes im Innern des Spektrums gelegenen Wertes von λ konvergiert, so verwandelt sich die Integraldarstellung (21) in

$$f(s) = \int_{(\mathsf{M})} \mathsf{P}(s; \mu) \int_0^\infty \mathsf{P}(t; \mu) f(t)\, dt\, d\mu,$$

in welcher M das Streckenspektrum bezeichnet. Konvergiert auch noch

$$\int_0^\infty K(s, t)\, \mathsf{P}(t; \lambda)\, dt$$

gleichmäßig in der Variablen λ, falls wir diese auf die Umgebung eines inneren Punktes des Streckenspektrums beschränken, so ist offenbar $\mathsf{P}(s; \lambda)$ eine Eigenfunktion des Kerns $K(s, t)$ im gewöhnlichen Sinne.

Die bisherigen Entwicklungen waren von der Voraussetzung beherrscht, daß die aus $K(s, t)$ entspringende quadratische Form in eine Elementarform orthogonal transformierbar sei. In dem allgemeineren Falle eines beliebigen beschränkten Kernes erhalten wir statt (21) eine Darstellung der Funktion $f(s)$ von folgender Art:

$$f(s) = \sum_{(p)} \varphi_p(s) \int_0^\infty f(t) \varphi_p(t)\, dt + \sum_{(h)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\mu \mathsf{A}^{(h)}(s; \mu) \cdot d_\mu \int_0^\infty \mathsf{A}^{(h)}(t; \mu) f(t)\, dt}{d\varrho^{(h)}(\mu)}.$$

Dabei bilden die $\varphi_p(s)$, welche Eigenfunktionen des Kerns $K(s, t)$ sind (und zwar für diejenigen Eigenwerte, die das Punktspektrum ausmachen), ein System orthogonaler Funktionen für das Intervall $0 \cdots \infty$; $\mathsf{A}^{(h)}(s; \mu)$ sind Funktionen von der Beschaffenheit des oben benutzten $\mathsf{A}(s; \mu)$, und es bestehen die Relationen

$$\int_0^\infty \mathsf{A}^{(h)}(s; \mu)\, \mathsf{A}^{(i)}(s; \mu)\, ds = 0 \qquad (h \neq i),$$

$$\int_0^\infty \mathsf{A}^{(h)}(s; \mu)\, \varphi_p(s)\, ds = 0$$

II. Teil.

Beispiele singulärer Kerne.

Ist $K(s, t)$ ein beschränkter Kern, für den das Doppelintegral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (K(s,t))^2\, ds\, dt$$

existiert, so gilt ohne Abänderungen die von Herrn Hilbert in seiner fünften Mitteilung entwickelte Theorie der Integralgleichungen. Wenn wir daher im folgenden einige Beispiele für die oben dargestellte allgemeinere Theorie besprechen wollen, können wir uns auf solche Kerne beschränken, für welche jenes Doppelintegral nicht konvergiert.

Als ersten derartigen singulären Kern nenne ich den folgenden

$$(26)\qquad K(s,t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,(s+t)\cdot e^{-\left|\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2\right|} \qquad \left(-\infty < {s \atop t} < +\infty\right),$$

welcher sich mit elementaren Hilfsmitteln (insbesondere ohne Heranziehung der Theorie der unendlichvielen Variablen) behandeln läßt. Er steht in naher Beziehung zu den sog. *Hermiteschen Polynomen*, die man am einfachsten durch die Gleichungen

$$\mathfrak{P}_p(s) = (-1)^p e^{\frac{1}{2}s^2}\cdot\frac{d^p}{ds^p}\left(e^{-\frac{1}{2}s^2}\right)$$

$$(p = 0, 1, 2, \cdots)$$

definiert, aus denen sich mit großer Leichtigkeit die wesentlichen Eigenschaften dieser Polynome ergeben. Es folgt nämlich aus ihnen

$$\frac{d}{ds}\left((-1)^p e^{-\frac{1}{2}s^2}\,\mathfrak{P}_p(s)\right) = (-1)^{p+1} e^{-\frac{1}{2}s^2}\,\mathfrak{P}_{p+1}(s)$$

und daraus die Rekursionsformel

$$(27)\qquad \mathfrak{P}_{p+1}(s) = s\cdot\mathfrak{P}_p(s) - \frac{d\mathfrak{P}_p(s)}{ds}.$$

Ferner wird

$$\mathfrak{P}_{p+1}(s) = (-1)^p e^{\frac{1}{2}s^2}\frac{d^p}{ds^p}\left(se^{-\frac{1}{2}s^2}\right)$$
$$= s\,\mathfrak{P}_p(s) - p\,\mathfrak{P}_{p-1}(s),$$

und aus der Kombination dieser Gleichung mit der vorigen schließen wir die einfache Beziehung

$$(27')\qquad \frac{d\mathfrak{P}_p(s)}{ds} = p\,\mathfrak{P}_{p-1}(s).$$

Da $(-1)^p e^{-\frac{1}{2}s^2}\,\mathfrak{P}_p(s)$ der p^{te} Differentialquotient von $e^{-\frac{1}{2}s^2}$ ist, folgt durch mehrmalige Anwendung der partiellen Integration, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2}\,\mathfrak{P}(s)\,\mathfrak{P}_p(s)\,ds = 0$$

wird für jedes Polynom $\mathfrak{P}(s)$ von niedrigerem als p^{tem} Grade, insbesondere also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2}\,\mathfrak{P}_p(s)\,\mathfrak{P}_q(s)\,ds = 0 \qquad (p \neq q).$$

Indem man nun noch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2}\,(\mathfrak{P}_p(s))^2\,ds$$

berechnet, erkennt man, daß die Funktionen

$$\Phi_p(s) = \frac{e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\cdot\mathfrak{P}_p(s)}{\sqrt[4]{2\pi}\cdot\sqrt{p!}} \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots)$$

ein System orthogonaler Funktionen für das Intervall $-\infty \cdots +\infty$ bilden.

Wir berechnen unter Heranziehung des besonderen, oben definierten Kernes $K(s, t)$ die Integrale (indem wir zunächst noch $s > 0$ voraussetzen)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t)\,\Phi_p(t)\,dt = \frac{1}{2}\Big[-e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2}\cdot\int_{-\infty}^{-s} e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2}\Phi_p(t)\,dt$$

$$+\,e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\cdot\int_{-s}^{+s} e^{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\Phi_p(t)\,dt + e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2}\int_{s}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2}\Phi_p(t)\,dt\Big].$$

Für ein gerades p ist $\Phi_p(s)$ eine gerade, für ungerades p eine ungerade Funktion von s; darum wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(s,t)\,\Phi_p(t)\,dt = e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\int_{0}^{s} e^{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\Phi_p(t)\,dt \qquad [p \equiv 0 \pmod{2}]$$

$$= e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2}\int_{s}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2}\Phi_p(t)\,dt \qquad [p \equiv 1 \pmod{2}].$$

Es gilt aber, wenn wir die Definitionsgleichungen und oben aufgestellten Rekursionsformeln heranziehen,

$$\int_0^s e^{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\Phi_p(t)\,dt = \int_0^s \frac{\mathfrak{P}_p(t)}{\sqrt[4]{2\pi}\cdot\sqrt{p!}}\,dt = \frac{\mathfrak{P}_{p+1}(s)}{(p+1)\sqrt[4]{2\pi}\cdot\sqrt{p!}} = \frac{e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2}\Phi_{p+1}(s)}{\sqrt{p+1}}$$

für $p \equiv 0\ (2)$,

$$\int_s^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2}\Phi_p(t)\,dt = \frac{(-1)^p}{\sqrt[4]{2\pi}\cdot\sqrt{p!}}\int_s^{\infty}\frac{d^p}{dt^p}\left(e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)dt$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt[4]{2\pi}\cdot\sqrt{p!}}\cdot\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}\left(e^{-\frac{1}{2}s^2}\right) = \frac{e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\Phi_{p-1}(s)}{\sqrt{p}}$$

für $p \equiv 1\ (2)$.

Wir erhalten damit die Gleichungen, welche für das Folgende die Grundlage bilden,

(28) $$\int_{-\infty}^{+\infty} K(s,t)\,\Phi_p(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{p+1}}\,\Phi_{p+1}(s) \qquad p \equiv 0\ (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\,\Phi_{p-1}(s) \qquad p \equiv 1\ (2).$$

Da $\int_{-\infty}^{+\infty} (K(s,t))^2\,dt \leqq 2$ ist, folgt hieraus für alle p

$$|\Phi_p(s)| \leqq \sqrt{2(p+1)}, \qquad |\mathfrak{P}_p(s)| \leqq \sqrt{8\pi}\, e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \sqrt{(p+1)!},$$

und mithin konvergiert die Reihe

(29) $$x(s) = \sqrt{\frac{2}{2+m}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{-m}{2+m}\right)^p \frac{\mathfrak{P}_{2p}(s)}{2^p p!},$$

wenn m eine der Zahlen $0, 1, 2, \cdots$ bedeutet, gleichmäßig in jedem endlichen Intervall der Variablen s, und dasselbe gilt, wie man leicht sieht, auch für die durch gliedweise Derivation aus (29) erhaltene Reihe, welche folglich die Ableitung $x'(s)$ darstellt. Indem man von den Rekursionsformeln (27), (27′) Gebrauch macht, gewinnt man daraus die Gleichung

$$x'(s) = -\frac{ms}{2}\,x(s);$$

also wird, da $x(0) = 1$ ist,

$$x(s) = e^{-m\left(\frac{s}{2}\right)^2}.$$

Die aus (29) durch Multiplikation mit $e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}$ hervorgehende Entwicklung von $e^{-(m+1)\left(\frac{s}{2}\right)^2}$ nach den Funktionen $\Phi_{2p}(s)$ konvergiert *gleichmäßig im ganzen unendlichen Intervall* $-\infty \cdots +\infty$, und da man nach dem Weierstraßschen Satz über die näherungsweise Darstellung jeder stetigen Funktion (in einem endlichen Intervall) durch Polynome schließen kann, daß jede gerade, stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion gleichmäßig im Intervall $-\infty < s < +\infty$ durch Linearkombination der Funktionen $e^{-(m+1)\left(\frac{s}{2}\right)^2}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ angenähert werden kann, ergibt sich aus diesen Entwicklungen der Satz, daß zu jeder positiven Zahl ε und jeder stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktion $f(s)$ ein Polynom $\mathfrak{P}(s)$ derart existiert, daß

$$|f(s) - e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\mathfrak{P}(s)| < \varepsilon(1 + |s|)$$

wird.*)

*) Die genauere Ausführung s. in meiner Diss., pag. 58 ff.

Ist jetzt $h(s)$ eine stetige Funktion, die *außerhalb eines gewissen endlichen Intervalls verschwindet*, und setzen wir $e^{\frac{s^2}{8}}h(s) = h^*(\sigma)$, indem σ den Wert $\frac{s}{\sqrt{2}}$ bedeutet, so wählen wir das Polynom $\mathfrak{P}^*(\sigma)$ so, daß

$$|h^*(\sigma) - e^{-\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}\mathfrak{P}^*(\sigma)| < \varepsilon\,(1 + |\sigma|)$$

ausfällt, daher, wenn $\mathfrak{P}(s) = \mathfrak{P}^*\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ gesetzt ist,

$$|h(s) - e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\mathfrak{P}(s)| < \varepsilon\cdot e^{-\frac{s^2}{8}}(1 + |s|),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(h(s) - e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\mathfrak{P}(s))^2\,ds < (7\varepsilon)^2$$

wird. Da jede stetige, quadratisch integrierbare Funktion $g(s)$ durch eine Funktion von der Natur $h(s)$ so angenähert werden kann, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(g(s) - h(s))^2\,ds < \varepsilon^2$$

wird, ist durch diese Ungleichung *die Vollständigkeit des Systems der Hermiteschen Orthogonalfunktionen $\Phi_p(s)$ auf direktem Wege bewiesen.*

Wenden wir daher auf das Integral

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}K(s,t)\,g(t)\,dt, \tag{30}$$

in dem $g(t)$ eine stetige, quadratisch integrierbare Funktion bedeutet, die Vollständigkeitsrelation an, so ergibt sich, falls wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,\Phi_p(t)\,dt = g_p$$

setzen, die absolut und gleichmäßig für alle s konvergente Entwicklung

$$f(s) = g_0\frac{\Phi_1(s)}{\sqrt{1}} + g_1\frac{\Phi_0(s)}{\sqrt{1}} + g_2\frac{\Phi_3(s)}{\sqrt{3}} + g_3\frac{\Phi_2(s)}{\sqrt{3}} + \cdots,$$

die wir wegen der von der Reihenfolge der Glieder unabhängigen Konvergenz auch in die Form setzen können

$$f(s) = c_0\Phi_0(s) + c_1\Phi_1(s) + c_2\Phi_2(s) + \cdots.$$

Integrieren wir diese Reihe nach Multiplikation mit $\Phi_p(s)$ in dem beliebigen endlichen Intervall $a \leqq s \leqq b$, so folgt

$$\left|\int_a^b f(s)\,\Phi_p(s)\,ds - \sum_{r=1}^{q}c_r\int_a^b\Phi_p(s)\,\Phi_r(s)\,ds\right|$$

$$\leqq\sqrt{c_{q+1}^2 + c_{q+2}^2 + \cdots}\sqrt{\int_a^b(\Phi_p(s))^2\,ds}.$$

Hieraus ist zu schließen (indem man a gegen $-\infty$, b gegen $+\infty$ konvergieren läßt)

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\Phi_p(s)\,ds - c_p\right| \leqq \sqrt{c_{q+1}^2 + c_{q+2}^2 + \cdots} \qquad \text{für } q \geqq p,$$

mithin, da die rechte Seite mit wachsendem q gegen 0 konvergiert,

$$c_p = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\Phi_p(s)\,ds.$$

Um unsere Untersuchung zu Ende zu führen, bleibt jetzt nur noch übrig, zu entscheiden, wann sich eine Funktion $f(s)$ in der Form (30) darstellen läßt. Setzen wir voraus, daß $f(s)$ einmal stetig differenzierbar ist, und, unter $f'(s)$ die Ableitung von $f(s)$ verstanden, die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (sf(s))^2\,ds, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (f'(s))^2\,ds$$

existieren, so folgt daraus für beliebiges $\omega > 1$

$$\int_1^{\omega} \left|\frac{d}{ds}\left(\frac{f(s)}{s}\right)\right| ds \leqq \int_1^{\omega} \left|\frac{f'(s)}{s}\right| ds + \int_1^{\omega} \frac{|f(s)|}{s^2}\,ds$$

$$\leqq \sqrt{\int_1^{\infty} (f'(s))^2\,ds} + \sqrt{\frac{1}{5}}\sqrt{\int_1^{\infty} (sf(s))^2\,ds};$$

mithin konvergiert das Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{d}{ds}\left(\frac{f(s)}{s}\right) ds,$$

d. h. $\frac{f(s)}{s}$ nähert sich, wenn s gegen $+\infty$ konvergiert, einer bestimmten Grenze, und es muß daher

$$\underset{s=\pm\infty}{L} \frac{f(s)}{s} = 0$$

sein. Beachten wir dies, so erschließen wir nunmehr durch eine leichte Rechnung, daß die Funktion

$$g(s) = \frac{s}{2} f(s) + f'(-s)$$

die Integralgleichung (30) befriedigt. Das Resultat dieser ganzen Untersuchung ist also der Satz:

Jede einmal stetig differenzierbare Funktion $f(s)$, für welche $sf(s)$ und $f'(s)$ quadratisch integrierbar sind, ist in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Hermiteschen Orthogonalfunktionen $\Phi_p(s)$ zu entwickeln:

$$f(s) = c_0 \Phi_0(s) + c_1 \Phi_1(s) + c_2 \Phi_2(s) + \cdots,$$

deren Koeffizienten durch

$$c_p = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, \Phi_p(s)\, ds$$

*gegeben werden.**)

Die Relationen (28) zeigen übrigens noch, daß

$$\varphi_0(s) = \frac{\Phi_0(s) + \Phi_1(s)}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_1(s) = \frac{\Phi_0(s) - \Phi_1(s)}{\sqrt{2}},$$
$$\varphi_2(s) = \frac{\Phi_2(s) + \Phi_3(s)}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_3(s) = \frac{\Phi_2(s) - \Phi_3(s)}{\sqrt{2}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$ sind, die zu den Eigenwerten

$$\frac{1}{\sqrt{1}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{1}}; \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}; \cdots$$

gehören. Es gibt auch keine weiteren Eigenfunktionen; denn jede solche müßte zu allen $\varphi_p(s)$ orthogonal sein, was nicht möglich ist, da diese bereits ein *vollständiges* System orthogonaler Funktionen bilden. Ein Streckenspektrum ist bei dem hier behandelten Kern überhaupt nicht vorhanden.

Zu interessanten Ergebnissen gelangt man, wenn man in ähnlicher Weise, wie soeben die Hermiteschen, die *Laguerreschen Polynome*

$$P_p(s) = e^{2s} \frac{d^p}{ds^p}(e^{-2s} s^p) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

untersucht. Für sie gewinnen wir leicht aus der Definitionsgleichung die Rekursionsformeln

$$P_p(s) = s \frac{dP_{p-1}(s)}{ds} - (2s - p) P_{p-1}(s),$$
$$\frac{dP_p(s)}{ds} = p\left(\frac{dP_{p-1}(s)}{ds} - 2P_{p-1}(s)\right).$$

Auch erkennen wir, daß die Funktionen

$$\Lambda_p(s) = \sqrt{2}\, \frac{e^{-s} P_p(s)}{p!} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots) \tag{31}$$

ein Orthogonalsystem für das Intervall $0 \cdots \infty$ bilden. Aus dem im vorigen Abschnitt gewonnenen Resultat, daß jede stetige, außerhalb eines

---

*) Vgl. hierzu W. Myller-Lebedeff, Theorie der Integralgleichungen in Anwendung usw. (Inauguraldissertation, abgedr. in Math. Ann. Bd. 64.)

endlichen Intervalls verschwindende Funktion $h(s)$ für alle $s \geq 0$ durch lineare Kombination der dort benutzten $e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\mathfrak{P}_{2p}(s)$ bis auf einen Fehler $\varepsilon \cdot e^{-\frac{s^2}{8}}$ angenähert werden kann (indem man nämlich $h(-s) = h(s)$ setzt), wird erkennbar, daß die in (31) eingeführten *Laguerreschen Orthogonalfunktionen* $\Lambda_p(s)$ gleichfalls ein vollständiges System bilden. Die zweite der aufgestellten Rekursionsformeln läßt sich, da $P_p(0) = p\,P_{p-1}(0)$ ist, in der Form schreiben

$$P_p(s) - p P_{p-1}(s) = -2p \cdot \int_0^s P_{p-1}(t)\,dt$$

oder

$$\Lambda_{p+1}(s) - \Lambda_p(s) = -2e^{-s} \int_0^s e^t \Lambda_p(t)\,dt. \tag{32}$$

Aus dieser Beziehung läßt sich durch Anwendung der Vollständigkeitsrelation eine Bedingung ableiten, unter der eine stetige Funktion $f(s)$ nach den Differenzen $\Lambda_1(s) - \Lambda_0(s)$, $\Lambda_2(s) - \Lambda_1(s), \cdots$ der Laguerreschen Orthogonalfunktionen entwickelbar ist.

Mit derselben Leichtigkeit wie (32) erhält man die analoge Formel

$$\Lambda_p(s) - \Lambda_{p-1}(s) = 2e^s \int_s^\infty e^{-t} \Lambda_p(t)\,dt;$$

addieren wir sie zu (32), so folgt

$$\int_0^\infty e^{-|s-t|} \Lambda_p(t)\,dt = -\frac{1}{2}\Lambda_{p-1}(s) + \Lambda_p(s) - \frac{1}{2}\Lambda_{p+1}(s), \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

$$\int_0^\infty e^{-|s-t|} \Lambda_0(t)\,dt = \Lambda_0(s) - \frac{1}{2}\Lambda_1(s)\cdot$$

Betrachten wir also den symmetrischen Kern

$$K(s,t) = \frac{1}{2} e^{-|s-t|} \qquad \left(0 \leq {s \atop t} < \infty\right)$$

für den sich

$$(k(s))^2 = \int_0^\infty (K(s,t))^2\,dt = \frac{1}{4}$$

ergibt, und ordnen ihm die quadratische Form $K(x)$ mit den Koeffizienten

$$k_{pq} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-|s-t|} \Lambda_{p-1}(s) \Lambda_{q-1}(t)\,ds\,dt \quad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

zu, so wird

$$k_{pq} = 0, \quad \text{falls} \quad p \neq q-1,\ q,\ q+1;$$
$$k_{pp} = \frac{1}{2}; \qquad k_{p,p-1} = k_{p,p+1} = -\frac{1}{4},$$

mithin

$$(33) \qquad \begin{aligned} K(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \cdots \\ -\frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2x_3 - \cdots \end{aligned}$$

Der Kern $\frac{1}{2}e^{-|s-t|}$ *ist demnach ein beschränkter Kern.* Die durch (33) erklärte quadratische Form läßt sich aber in folgender Gestalt schreiben*)

$$(34) \qquad K(x) = \sum_{(p,q)} \int_1^\infty \frac{\psi_p(\mu)\psi_q(\mu)}{\mu} d\mu \cdot x_p x_q,$$

falls wir unter $\psi_p(\lambda)$ diese Funktionen verstehen:

$$\psi_p(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin^2 r}{\sqrt{\sin 2r}} \sin 2pr;$$

dabei bezeichnet r den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Wert von $\operatorname{arc}\sin\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $(\lambda \geqq 1)$. Die $\psi_p(\lambda)$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem für das Intervall $1 \leqq \lambda < \infty$. Indem wir

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda) &= 0 \quad (\lambda < 1), \qquad & \varrho_p(\lambda) &= 0 & (\lambda < 1), \\ &= \lambda - 1 \quad (\lambda \geqq 1), & &= \int_1^\lambda \psi_p(\mu)\,d\mu & (\lambda \geqq 1) \end{aligned}$$

setzen, erkennen wir, daß $K(x)$ eine Elementarform ist, deren Streckenspektrum aus dem einzigen Intervall $1 \leqq \lambda < \infty$ besteht und deren Basisfunktion das eben angegebene $\varrho(\lambda)$ ist.

Um nun diese Darstellung der quadratischen Form (33) für den Kern $\frac{1}{2}e^{-|s-t|}$ nutzbar zu machen, müssen wir zunächst die Funktion $\mathsf{A}(s;\lambda)$ unserer allgemeinen Theorie bestimmen. Dazu bemerken wir zunächst, daß aus der Integralgleichung

$$(35) \qquad f(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-|s-t|} g(t)\,dt$$

die Differentialbeziehung

$$g(s) = f(s) - \frac{d^2 f(s)}{ds^2}$$

folgt. Damit diese Funktion $g(s)$ die Integralgleichung (35) löst, muß

*) Diese Darstellung ist in etwas anderer Form schon von Hilbert, 4. Mitt., pag. 208 gegeben worden.

$$f'(0) = f(0), \qquad \underset{s=\infty}{L}\, e^{-s}(f(s) + f'(s)) = 0$$

sein.*) Nehmen wir provisorisch an, daß $\mathsf{A}(s;\lambda)$ nach λ differenzierbar ist:

$$\frac{\partial \mathsf{A}(s;\lambda)}{\partial \lambda} = \mathsf{P}(s;\lambda) \qquad (\lambda > 1),$$

und $\int\limits_0^\infty K(s,t)\mathsf{P}(t;\lambda)dt$ gleichmäßig in λ konvergiert, so ist $\mathsf{P}(s;\lambda)$ Eigenfunktion des Kernes $\frac{1}{2}e^{-|s-t|}$ für den Eigenwert λ, und folglich

$$\frac{\partial^2 \mathsf{P}(s;\lambda)}{\partial s^2} + (\lambda - 1)\mathsf{P}(s;\lambda) = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \mathsf{P}(s;\lambda)}{\partial s} - \mathsf{P}(s;\lambda)\right]_{s=0} = 0.$$

Es muß dann also

$$\mathsf{P}(s;\lambda) = a(\lambda)\left\{\sqrt{\lambda-1}\cdot\cos\left(s\sqrt{\lambda-1}\right) + \sin\left(s\sqrt{\lambda-1}\right)\right\}$$

sein, wobei $a(\lambda)$ eine gewisse Funktion von λ ist. Diese bestimmen wir so, daß

$$\int\limits_0^\infty \mathsf{P}(s;\lambda)\,\mathsf{A}_0(s)\,ds = \psi_1(\lambda)$$

wird. Da aber

$$\sqrt{2}\int\limits_0^\infty \left\{\sqrt{\lambda-1}\cos\left(s\sqrt{\lambda-1}\right) + \sin\left(s\sqrt{\lambda-1}\right)\right\}e^{-s}ds = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\lambda-1}}{\lambda},$$

$$\psi_1(\lambda) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt[4]{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda^3}}$$

ist, ergibt sich

$$a(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}\cdot\sqrt[4]{\lambda-1}}.$$

Wir setzen nunmehr

$$\overline{\mathsf{P}}(s;\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt[4]{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(s\sqrt{\lambda-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt[4]{\lambda-1}}\sin\left(s\sqrt{\lambda-1}\right)\right\},$$

$$\overline{\mathsf{A}}(s;\lambda) = \int\limits_1^\lambda \overline{\mathsf{P}}(s;\mu)\,d\mu \qquad (\text{für } \lambda \geqq 1).$$

Es ist dann durch die vorigen Überlegungen wahrscheinlich gemacht, daß

(36) $$\mathsf{A}(s;\lambda) = \overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)$$

wird. Wir müssen prüfen, ob dieses zutrifft.

Zunächst besteht sicherlich die Beziehung

---

*) Der Akzent bedeutet hier Differentiation nach dem Argument s.

$$\overline{\mathsf{P}}(s;\lambda)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty e^{-|s-t|}\,\overline{\mathsf{P}}(t;\lambda)\,dt \qquad (\lambda\geqq 1).$$

Da ferner (durch einmalige partielle Integration) leicht zu erkennen ist, daß $\overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)$ für $s=\infty$ Null wird mindestens wie $\frac{1}{s}$, also eine im Intervall $0\leqq s<\infty$ quadratisch integrierbare Funktion ist, erhalten wir hieraus die Entwicklung

$$\overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)=\sum_{p=1,2,\cdots}\Big[k_p(s)\int\limits_1^\lambda \mu\overline{\psi}_p(\mu)\,d\mu\Big], \tag{37}$$

in welcher

$$\begin{aligned} k_p(s)&=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-|s-t|}\,\mathsf{\Lambda}_{p-1}(t)\,dt,\\ \psi_p(\lambda)&=\int\limits_0^\infty \overline{\mathsf{P}}(t;\lambda)\,\mathsf{\Lambda}_{p-1}(t)\,dt \end{aligned} \tag{38}$$

gesetzt wurde, und aus ihr die Fourierkoeffizienten von $\overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)$

$$\int\limits_0^\infty \overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)\,\mathsf{\Lambda}_{p-1}(s)\,ds=\sum_{(q)}k_{pq}\int\limits_1^\lambda \mu\overline{\psi}_q(\mu)\,d\mu.$$

Andererseits ist aber wegen (38)

$$\int\limits_0^\infty \overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)\,\mathsf{\Lambda}_{p-1}(s)\,ds=\int\limits_1^\lambda \overline{\psi}_p(\mu)\,d\mu.$$

Für $p=1$ wird

$$\begin{aligned}\int\limits_1^\lambda \overline{\psi}_1(\mu)\,d\mu=\int\limits_1^\lambda \psi_1(\mu)\,d\mu&=\sum_{(q)}\int\limits_1^\infty \frac{\psi_1(\mu)\psi_q(\mu)}{\mu}\,d\mu\int\limits_1^\lambda \mu\psi_q(\mu)\,d\mu\\ &=\sum_{(q)}k_{1q}\int\limits_1^\lambda \mu\psi_q(\mu)\,d\mu;\end{aligned}$$

mithin kommt

$$\sum_{(q)}\Big[k_{1q}\int\limits_1^\lambda \mu(\psi_q(\mu)-\overline{\psi}_q(\mu))\,d\mu\Big]=0.$$

Da nun $\psi_1(\mu)-\overline{\psi}_1(\mu)=0$, $k_{1q}=0$ für $q>2$, hingegen $k_{12}\neq 0$ ist, folgt hieraus

$$\psi_2(\lambda)=\overline{\psi}_2(\lambda).$$

Dies zeigt wiederum, daß

$$\sum_{(q)}\Big[k_{2q}\int\limits_1^\lambda \mu(\psi_q(\mu)-\overline{\psi}_q(\mu))\,d\mu\Big]=0$$

sein muß, mithin

$$\psi_3(\lambda) = \bar{\psi}_3(\lambda)$$

und so fort. Damit aber verwandelt sich (37) in die zu beweisende Gleichung

$$\bar{\mathsf{A}}(s;\lambda) - \sum_{(p)}\left[k_p(s)\int_1^\lambda \mu\psi_p(\mu)\,d\mu\right] = \mathsf{A}(s;\lambda).$$

Nach diesen Rechnungen können wir das folgende, dem Fourierschen analoge Integraltheorem aufstellen

$$(39)\qquad \begin{aligned} f(s) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty & \frac{\sqrt{\lambda-1}\cos\left(s\sqrt{\lambda-1}\right)+\sin s\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}\sqrt[4]{\lambda-1}} \\ & \cdot\int_0^\infty f(t)\,\frac{\sqrt{\lambda-1}\cos\left(t\sqrt{\lambda-1}\right)+\sin\left(t\sqrt{\lambda-1}\right)}{\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt[4]{\lambda-1}}\,dt\,d\lambda\,. \end{aligned}$$

Es ist gültig, falls für die als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzte Funktion $f(s)$ die Integrale

$$\int_0^\infty (f(s))^2\,ds,\qquad \int_0^\infty (f''(s))^2\,ds,\qquad \int_0^\infty |f''(s)|\,ds$$

existieren, $\underset{s=\infty}{L}\, f(s) = \underset{s=\infty}{L}\, f'(s) = 0$ und $f'(0) = f(0)$ ist. Denn unter diesen Umständen konvergiert das innere Integral in (39) gleichmäßig in der Umgebung jeder Zahl $\lambda > 1$, wie sich durch zweimalige Anwendung der partiellen Integration ergibt. Die angeführten Bedingungen sind insbesondere dann erfüllt, wenn $f(s)$ für $s = \infty$ in normaler Weise von höherer als $\frac{1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung verschwindet, d. h. wenn es eine positive Zahl ε gibt, so daß

$$s^{\frac{1}{2}+\varepsilon}f(s),\qquad s^{\frac{3}{2}+\varepsilon}f'(s),\qquad s^{\frac{5}{2}+\varepsilon}f''(s)$$

für alle $s \geqq 0$ unterhalb einer endlichen Grenze bleiben.

Von $\frac{1}{2}e^{-|s-t|}$ gelangen wir durch Substitution leicht zu andern einfachen singulären Kernen. Setzen wir in dem Integral

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-|s-t|}\,U(s)\,U(t)\,ds\,dt,$$

in welchem $U(s)$ eine beliebige stetige Funktion mit der Eigenschaft $\int_0^\infty (U(s))^2\,ds = 1$ bedeuten möge,

$$e^{-2s} = \sigma,\qquad e^{-2t} = \tau,$$

so verwandelt es sich in das folgende

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 G(\sigma,\tau)\,u(\sigma)\,u(\tau)\,d\sigma\,d\tau,$$

wenn $G(\sigma,\tau)$ durch

$$(40)\qquad \begin{aligned} G(\sigma,\tau) &= \frac{1}{\sigma} \quad (\sigma \geqq \tau)\\ &= \frac{1}{\tau} \quad (\sigma \leqq \tau) \end{aligned}$$

definiert und

$$u(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{2\sigma}}\cdot U\left(\frac{1}{2}\,|\lg\sigma|\right)$$

gesetzt wird, so daß also auch

$$(41)\qquad \int_0^1 (u(\sigma))^2\,d\sigma = 1$$

ausfällt. Über den Kern (40), der wohl als der einfachste aller singulären bezeichnet werden darf, läßt sich demnach das Folgende aussagen:

Für alle stetigen Funktionen, die (41) erfüllen, ist

$$0 < \int_0^1\int_0^1 G(\sigma,\tau)\,u(\sigma)\,u(\tau)\,d\sigma\,d\tau \leqq 4.$$

Die inhomogene Integralgleichung

$$f(\sigma) = \varphi(\sigma) - \lambda\int_0^1 G(\sigma,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

hat für alle $\lambda < \frac{1}{4}$ eine Lösung $\varphi(\sigma)$, die stetig außer für $\sigma = 0$, in der Umgebung dieser Stelle aber quadratisch integrierbar ist (falls $f(\sigma)$ von der gleichen Beschaffenheit vorausgesetzt wird). Für Werte $\lambda > \frac{1}{4}$ hat die zugehörige homogene Integralgleichung Lösungen $\varphi_\lambda(\sigma)$, welche, mit $\sqrt{\sigma}$ multipliziert, an der Stelle $\sigma = 0$ endlich bleiben; es sind dies die Funktionen

$$\varphi_\lambda(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{\pi\sigma}}\,\frac{\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\cos\left(\left|\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\lg\sigma\right|\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\left|\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\lg\sigma\right|\right)}{\sqrt{\lambda}\,\sqrt[4]{\lambda-\frac{1}{4}}}.$$

Sie bilden die Grundfunktion eines Fouriertheorems:

$$f(\sigma) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \varphi_\lambda(\sigma)\int_0^1 f(\tau)\,\varphi_\lambda(\tau)\,d\tau\,d\lambda.$$

Damit beherrschen wir also den Kern $G(\sigma, \tau)$ in der vollkommensten Weise.

Durch eine leichte Modifikation erhalten wir übrigens auch das *gewöhnliche Fouriersche Integraltheorem.* Wir brauchen nämlich dazu statt des Kernes $\frac{1}{2} e^{-|s-t|}$ nur die beiden folgenden

$$\begin{array}{l|l} K_+(s,t) = e^{-s}\mathfrak{Cof}\, t \ (s \geqq t) & K_-(s,t) = e^{-s}\mathfrak{Sin}\, t \ (s \geqq t)^{*)} \\ \qquad\quad = e^{-t}\mathfrak{Cof}\, s \ (s < t) & \qquad\quad = e^{-t}\mathfrak{Sin}\, s \ (s < t) \end{array}$$

zugrunde zu legen, welche durch Übergang zu den quadratischen Formen mittels des Laguerreschen Orthogonalsystems $\Lambda_p(s)$ auf

$$K_+(x) = \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \cdots - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2x_3 - \cdots,$$

$$K_-(x) = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \cdots - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2x_3 - \cdots$$

führen. Diese lassen sich in eine der Darstellung (34) analoge Gestalt bringen und liefern dann das (in zwei Teile zerspaltene) Fouriersche Integraltheorem**)

$$f(s) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos(s\sqrt{\lambda-1})}{\sqrt[4]{\lambda-1}} \int_0^\infty f(t)\, \frac{\cos(t\sqrt{\lambda-1})}{\sqrt[4]{\lambda-1}}\, dt\, d\lambda,$$

$$f(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(s\sqrt{\lambda-1})}{\sqrt[4]{\lambda-1}} \int_0^\infty f(t)\, \frac{\sin(t\sqrt{\lambda-1})}{\sqrt[4]{\lambda-1}}\, dt\, d\lambda.$$

Gleichzeitig erhält man bei der Durchführung dieser Rechnung die Gleichungen

$$(42) \qquad \begin{aligned} \int_0^\infty \sin(s \operatorname{cotg} \varrho)\, \Lambda_p(s)\, ds &= \sqrt{2} \sin\varrho \cdot \cos(2p+1)\varrho, \\ \int_0^\infty \cos(s \operatorname{cotg} \varrho)\, \Lambda_p(s)\, ds &= \sqrt{2} \sin\varrho \cdot \sin(2p+1)\varrho. \end{aligned}$$

Nach einer von Herrn Hilbert gemachten Bemerkung kann man das Fouriertheorem noch von einem wesentlich anderen Gesichtspunkt auffassen, als bisher geschehen ist. Betrachten wir nämlich

*) $\mathfrak{Cof}\, s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$, $\quad \mathfrak{Sin}\, s = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$.

**) s. Dissertation pag. 65, 69. — Das Fouriersche und allgemeinere Integraltheoreme sind auch von Herrn E. Hilb („Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen", Math. Ann. Bd. 66, pag. 1—66) auf einem mehr indirekten Wege mit großem Erfolg untersucht worden.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)\quad \left(0 \leqq {s \atop t} < \infty\right)$$

als *Kern* einer Integralgleichung, so zeigt das Fouriersche Integraltheorem, das wir jetzt in der Form schreiben

$$(43)\qquad u(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(st)\int_0^\infty \cos(tr)\,u(r)\,dr\,dt,$$

daß dieser höchstens die beiden Eigenwerte $+1$, -1 besitzen kann. Es fragt sich, welche Eigenfunktionen zu jedem von ihnen gehören. *Eine* solche zu $+1$ gehörige Funktion wird durch die bekannte Integralbeziehung

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(st)\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = e^{-\frac{s^2}{2}}$$

geliefert. Um jedoch diese Frage systematisch zu entscheiden, beachte man zunächst die Formeln (42), welche besagen, daß die Funktionen

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(st)\,\Lambda_p(t)\,dt \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

ebenso wie die $\Lambda_p(s)$ selber ein vollständiges Orthogonalsystem bilden. Aus diesem Umstand folgt, wenn wir

$$\bar{u}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(st)\,u(t)\,dt$$

setzen, wie ich in meiner Dissertation gezeigt habe*), die „Orthogonalitätsrelation"

$$(44)\qquad \int_0^\infty \bar{u}(s)\bar{v}(s)\,ds = \int_0^\infty u(s)\,v(s)\,ds$$

für irgend zwei stetige, absolut und quadratisch im Intervall $0 \cdots \infty$ integrierbare Funktionen $u(s)$, $v(s)$. Vgl. hierzu übrigens Formel (22).

Der Bereich derjenigen stetigen Funktionen $u(s)$, für welche $\bar{u}(s)$ existiert und stetig ist, welche ferner dem Fouriertheorem (43) und den Limesgleichungen

$$\underset{a=\infty}{L}\int_0^\infty (\bar{u}_a(s) - \bar{u}(s))^2\,ds = 0,$$

$$\underset{a=\infty}{L}\int_0^\infty (u_a(s) - u(s))^2\,ds = 0$$

---

*) Diss., pag. 23 u. 31.

genügen — dabei ist

$$\bar{u}_a(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos(st)\, u(t)\, dt,$$

$$u_a(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos(st)\, \bar{u}(t)\, dt$$

gesetzt — möge mit $\mathfrak{U}$ bezeichnet werden. Jede endliche Linearkombination von Funktionen aus $\mathfrak{U}$ gehört wiederum diesem Bereich an, und falls $u(s)$ irgend eine Funktion aus $\mathfrak{U}$, ist auch $\bar{u}(s)$ in $\mathfrak{U}$ enthalten. Ferner gilt für irgend zwei Funktionen aus $\mathfrak{U}$ die Orthogonalitätsbeziehung (44), und jede stetige, absolut und quadratisch integrable Funktion, welche im Endlichen von beschränkter Schwankung ist, gehört dem Bereich $\mathfrak{U}$ an.

Schränken wir nun den Begriff der Funktion gänzlich auf den soeben definierten Bereich $\mathfrak{U}$ ein, verstehen insonderheit unter einer Eigenfunktion des Kernes $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)$ eine *in* $\mathfrak{U}$ *enthaltene* Funktion $\varphi(s)$, welche der Relation

$$\varphi(s) - \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(st)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

genügt, so zeigt sich*), daß der Kern $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)$ sich in allen wesentlichen Punkten verhält wie ein regulärer. Ihm kommen zwar die einzigen Eigenwerte $+1$, -1 zu, aber zu jedem von ihnen gehören unendlichviele Eigenfunktionen. Jede in $\mathfrak{U}$ enthaltene Funktion ist die Summe einer zu $+1$ und einer zu -1 gehörigen Eigenfunktion. Die inhomogene Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(st)\, \varphi(t)\, dt$$

hat, falls $\lambda \neq \pm 1$ ist, für jede zu $\mathfrak{U}$ gehörige Funktion $f(s)$ eine Lösung $\varphi(s)$ von der nämlichen Beschaffenheit. Für einen Eigenwert $\lambda = +1$ oder -1 ist sie jedoch nur dann (in demselben Sinne) lösbar, wenn $f(s)$ zu den sämtlichen zu λ gehörigen Eigenfunktionen orthogonal ist. Der Kern $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)$ ist offenbar nicht „beschränkt“, wohl aber liegt der Integrallimes

*) Diss., pag. 28 f.

$$\underset{\substack{a=\infty \\ b=\infty}}{L} \int_0^a \int_0^b \cos st\, u(s)\, u(t)\, ds\, dt,$$

der für alle stetigen, quadratisch integrierbaren Funktionen $u(s)$ existiert, unterhalb der Grenze $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, wenn $\int_0^\infty (u(s))^2 ds \leqq 1$ bleibt.

Die bisherigen, das Fouriersche Integraltheorem betreffenden Untersuchungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf die Besselschen Funktionen übertragen. Wir werden uns dazu der folgenden Verallgemeinerung der Laguerreschen Polynome bedienen:

(45) $$P_p^{(\alpha)}(s) = \frac{e^{2s}}{s^{2\alpha}} \frac{d^p}{ds^p} (e^{-2s} s^{p+2\alpha}),$$

in denen s im Intervall $0 \cdots \infty$ variabel ist, α aber eine beliebige reelle Zahl $> -\frac{1}{2}$ bedeutet und p die Reihe der ganzen nicht-negativen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ durchläuft. Aus dieser Definitionsgleichung gewinnt man die Rekursionsformel

(46) $$\frac{dP_p^{(\alpha)}(s)}{ds} = p\left(\frac{dP_{p-1}^{(\alpha)}(s)}{ds} - 2P_{p-1}^{(\alpha)}(s)\right),$$

und man beweist wie früher, daß die Funktionen

(47) $$\frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(p+1+2\alpha)}} e^{-s} s^\alpha P_p^{(\alpha)}(s) = \Lambda_p^{(\alpha)}(s)$$
$$p = 0, 1, 2, \ldots$$

für ein festes α ein vollständiges Orthogonalsystem für $0 \leqq s < \infty$ bilden.

Es ist offenbar

(48) $$-\frac{d^p}{ds^p}(e^{-2s} s^{p+2\alpha}) = \int_s^\infty \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} (e^{-2t} t^{p+1+2\alpha-1})\, dt.$$

Führen wir in diese Gleichung die Bezeichnungen (45), (47) ein, so verwandelt sie sich *unter der Voraussetzung* $\alpha > 0$, *die wir jetzt zunächst machen wollen*, in

(49) $$-\Lambda_p^{(\alpha)}(s) = \sqrt{2(p+1)}\, e^s s^{-\alpha} \int_s^\infty e^{-t} t^{\alpha-\frac{1}{2}} \Lambda_{p+1}^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}(t)\, dt.$$

Es folgt hieraus in bekannter Weise durch Anwendung der Vollständigkeitsrelation: Wenn $g(s)$ eine stetige, im Intervall $0 \cdots \infty$ quadratisch integrierbare Funktion bedeutet, für welche

$$\int_0^\infty g(t)\Lambda_0^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}(t)\,dt = 0,$$

d. h.

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-\frac{1}{2}}g(t)\,dt = 0 \tag{50}$$

ist, so läßt sich das Integral

$$f(s) = e^s s^{-\alpha}\int_s^\infty e^{-t}t^{\alpha-\frac{1}{2}}g(t)\,dt \tag{51}$$

in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den $\Lambda_p^{(\alpha)}(s)$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ entwickeln. Aus (51) folgt

$$g(s) = \frac{(s-\alpha)f(s) - sf'(s)}{\sqrt{s}}, \tag{52}$$

und diese Funktion ist umgekehrt eine Auflösung von (51), wenn

$$\underset{s=\infty}{L}\, e^{-s}s^{\alpha}f(s) = 0 \tag{53}$$

ist. Damit (50) gilt, ist gemäß (51) dann notwendig und hinreichend, daß

$$\underset{s=0}{L}\, s^{\alpha}f(s) = 0 \tag{53'}$$

wird. *Wenn demnach die Funktion* (52) *für* $s > 0$ *existiert und stetig, im Intervall* $0 \cdots \infty$ *aber quadratisch integrierbar ist und* (53), (53′) *erfüllt sind, läßt sich* $f(s)$ *in der angegebenen Weise entwickeln.* Diese Bedingungen lassen sich noch in der verschiedensten Weise spezialisieren.

Die Formel (48) liefert ein entsprechendes Ergebnis für $\alpha = 0$. Beachtet man nämlich, daß

$$s\cdot\frac{d^{p+1}}{ds^{p+1}}(e^{-2s}s^p) = -2\frac{d^p}{ds^p}(e^{-2s}s^{p+1})$$

ist, so geht (48) für $\alpha = 0$ über in

$$\Lambda_p^{(0)}(s) = \sqrt{2(p+1)}\, e^s\int_s^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\Lambda_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t)\,dt,$$

und *es ist demnach* $f(s)$ *nach den* $\Lambda_p^{(0)}(s)$ *entwickelbar, wenn*

$$\underset{s=\infty}{L}\, e^{-s}f(s) = 0 \quad \textit{und} \quad \sqrt{s}\,(f(s) - f'(s))$$

*stetig und quadratisch integrierbar ist.**)

Um ein analoges Resultat für $\alpha < 0$ zu erhalten, gehen wir von der Bemerkung aus, daß

---

*) Vgl. W. Myller-Lebedeff, l. c.

$$\frac{d^p}{ds^p}(e^{-2s}s^{p+2\alpha}\cdot s) = s\cdot\frac{d^p}{ds^p}(e^{-2s}s^{p+2\alpha}) + p\,\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}(e^{-2s}s^{p-1+2\alpha+1})$$

ist. Indem wir die Definitionsgleichung (45) heranziehen, wird

$$P_p^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(s) = P_p^{(\alpha)}(s) + p\,P_{p-1}^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(s),$$

und daher, wenn wir (46) benutzen,

$$-\frac{dP_p^{(\alpha)}(s)}{ds} = 2p\,P_{p-1}^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(s).$$

Integrieren wir diese Relation zwischen 0 und s, so folgt

$$P_p^{(\alpha)}(0) - P_p^{(\alpha)}(s) = 2p\int_0^s P_{p-1}^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(t)\,dt,$$

und wenn wir hierin die Bezeichnungen (47) einführen,

$$-\frac{\Lambda_p^{(\alpha)}(s)}{\sqrt{2p}} + \frac{1}{\sqrt{\Gamma(1+2\alpha)}}\sqrt{\frac{\Gamma(p+2\alpha+1)}{2p\,\Gamma(p+1)}}\cdot\Lambda_0^{(\alpha)}(s) = e^{-s}s^{\alpha}\int_0^s e^t t^{-\alpha-\frac{1}{2}}\,\Lambda_{p-1}^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(t)\,dt.$$

Nehmen wir nun an, daß $\alpha<0$ ist, so ist $e^t t^{-\alpha-\frac{1}{2}}$ an der Stelle $t=0$ quadratisch integrierbar. Außerdem ist dann

$$\frac{\Gamma(p+2\alpha+1)}{p\,\Gamma(p+1)} < p^{-1+2\alpha},$$

also konvergiert die Summe

$$\sum_{p=1,2,\ldots}\frac{\Gamma(p+2\alpha+1)}{p\,\Gamma(p+1)}$$

und mithin auch

$$\sum_{p=1,2,\ldots}\gamma_p\sqrt{\frac{\Gamma(p+2\alpha+1)}{p\,\Gamma(p+1)}},$$

wenn γ_p irgendwelche Zahlen mit konvergenter Quadratsumme sind. Eine mittels der stetigen, quadratisch integrierbaren Funktion $g(s)$ in der Form

$$f(s) = e^{-s}s^{\alpha}\int_0^s e^t t^{-\alpha-\frac{1}{2}}\,g(t)\,dt \tag{54}$$

darstellbare Funktion $f(s)$ ist demnach wiederum in eine gleichmäßig und absolut konvergente, nach den Funktionen $\Lambda_0^{(\alpha)}(s)$, $\Lambda_1^{(\alpha)}(s)$, $\Lambda_2^{(\alpha)}(s)$, ... fortschreitende Reihe entwickelbar. Aus (54) folgt

$$g(s) = \frac{(s-\alpha)f(s)+sf'(s)}{\sqrt{s}}, \tag{55}$$

und diese Funktion genügt in der Tat der Gleichung (54), wenn noch

$$\underset{s=0}{L}\, s^{-\alpha}f(s) = 0$$

ist. *Zur Entwickelbarkeit ist demnach die Existenz, Stetigkeit (für $s > 0$) und quadratische Integrierbarkeit der Funktion* (55) *und die Existenz des Limes* $\underset{s=0}{L}\, s^{-\alpha} f(s)$ *hinreichend.* Denn in diesem Fall kann man eine Konstante c so wählen, daß

$$\underset{s=0}{L}\, s^{-\alpha}\left(f(s) - c\Lambda_0^{(\alpha)}(s)\right) = 0$$

wird; dann aber ist nach unsern Überlegungen $f(s) - c\Lambda_0^{(\alpha)}(s)$, also auch $f(s)$ selbst entwickelbar. Damit ist der Fall $\alpha < 0$ gleichfalls erledigt und so eine, wie mir scheint, sehr durchsichtige und auch in ihrem Resultat vollständige Theorie der verallgemeinerten Laguerreschen Polynome gewonnen. Übrigens kann man noch, indem man sich statt des gewöhnlichen des Hellingerschen Integralbegriffs bedient, die im Vorstehenden auftretende Forderung der stetigen Differenzierbarkeit durch eine weniger einschneidende ersetzen.

Wir wenden uns jetzt zu der Darlegung des Zusammenhanges, der zwischen den eben untersuchten Laguerreschen Polynomen und dem für die Besselschen Funktionen gültigen Integraltheorem besteht. Bezeichnet, wie üblich, $J_\nu(x)$ die Besselsche Funktion mit dem reellen Index $\nu > -1$, so schreiben wir

$$\mathfrak{J}_\nu(x) = e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu\left(x e^{\frac{\pi i}{2}}\right).$$

Diese Funktion ist für positive Argumentwerte reell und genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2(\sqrt{x}\,\mathfrak{J}_\nu(x))}{dx^2} - \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right)\sqrt{x}\,\mathfrak{J}_\nu(x) = 0.$$

Wie bekannt ist, gibt es ein von $\mathfrak{J}_\nu(x)$ unabhängiges, gleichfalls in dem eben benutzten Sinne reelles Integral dieser Gleichung, das bei unbegrenzt wachsendem x gegen 0 konvergiert wie $\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$; wir bezeichnen es mit $\mathfrak{E}_\nu(x)$, wobei wir es so normiert annehmen, daß

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\mathfrak{E}_\nu(x)\right)\cdot\sqrt{x}\,\mathfrak{J}_\nu(x) - \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\mathfrak{J}_\nu(x)\right)\cdot\sqrt{x}\,\mathfrak{E}_\nu(x) = -1$$

wird: durch diese Festsetzungen ist $\mathfrak{E}_\nu(x)$ völlig bestimmt. Wir behandeln nunmehr die Theorie des folgenden Kerns

$$(56)\qquad \begin{aligned} K_\nu(s,t) &= \mathfrak{E}_\nu(s)\,\mathfrak{J}_\nu(t)\sqrt{st} \quad (s \geqq t) \\ &= \mathfrak{J}_\nu(s)\,\mathfrak{E}_\nu(t)\sqrt{st} \quad (s \leqq t) \end{aligned} \qquad \left(0 \leqq {s \atop t} < \infty\right),$$

von dem wir mittels des Orthogonalsystems $\Lambda_p^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}(s)$ zur quadratischen Form $K_\nu(x)$ übergehen. Wir betrachten zunächst die Integralgleichung 1. Art

$$(57)\qquad f(s)=\int_0^\infty K_\nu(s,t)\,g(t)\,dt.$$

Aus ihr folgt

$$g(s)=-\frac{d^2f(s)}{ds^2}+\left(1+\frac{4\nu^2-1}{4s^2}\right)f(s).$$

Damit diese Funktion aber wirklich der Gleichung (57) genügt, muß außerdem

$$(58)\qquad \underset{s=0}{L}\left[\sqrt{s}\,\mathfrak{J}_\nu(s)\frac{df(s)}{ds}-f(s)\frac{d}{ds}\left(\sqrt{s}\,\mathfrak{J}_\nu(s)\right)\right]=0,$$

$$(58')\qquad \underset{s=\infty}{L}\left[\sqrt{s}\,\mathfrak{E}_\nu(s)\frac{df(s)}{ds}-f(s)\frac{d}{ds}\left(\sqrt{s}\,\mathfrak{E}_\nu(s)\right)\right]=0$$

sein. — Ferner vervollständigen wir die für die Laguerreschen Funktionen aufgestellten Relationen durch die folgenden, aus der Definitionsgleichung leicht zu beweisenden Formeln

$$P_p^{(\alpha)}(s)=s\frac{dP_{p-1}^{(\alpha)}(s)}{ds}+(p+2\alpha-2s)\,P_{p-1}^{(\alpha)}(s),$$

$$P_p^{(\alpha)}(s)=[2(p+\alpha-s)-1]\,P_{p-1}^{(\alpha)}(s)-(p-1)(p+2\alpha-1)\,P_{p-2}^{(\alpha)}(s),$$

$$s\frac{d^2P_p^{(\alpha)}(s)}{ds^2}+(1+2\alpha-2s)\frac{dP_p^{(\alpha)}(s)}{ds}+2p\,P_p^{(\alpha)}(s)=0.$$

Wir führen die Rechnung der Einfachheit halber nur für den Fall $\nu=0$ durch und bestimmen also zunächst die Funktion

$$k_p(s)=\int_0^\infty K_0(s,t)\,\Lambda_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t)\,dt;$$

diese genügt notwendig der Gleichung

$$(59)\qquad \frac{d^2k_p(s)}{ds^2}-\left(1-\frac{1}{4s^2}\right)k_p(s)=-\Lambda_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s).$$

Man übersieht sofort, daß diese Differentialgleichung ein partikuläres Integral von der Form

$$\frac{2e^{-s}\sqrt{s}\,Q_{p+1}(s)}{p!\sqrt{p+1}}$$

besitzt, wo $Q_{p+1}(s)$ ein Polynom $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades ist, mithin

$$Q_{p+1}(s)=\alpha_0^{(p)}P_{p+1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)+\alpha_1^{(p)}P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)+\alpha_2^{(p)}P_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)+\cdots+\alpha_{p+1}^{(p)}P_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)$$

gesetzt werden darf. $Q_{p+1}(s)$ genügt der Gleichung

$$(60)\qquad L(Q_{p+1})\equiv s\,Q''_{p+1}+(1-2s)\,Q'_{p+1}-Q_{p+1}=-s\,P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)$$

$$=\frac{1}{2}\left[P_{p+1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)-2(p+1)\,P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)+p(p+1)\,P_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)\right].$$

Die aufgestellten Rekursionsformeln liefern

$$L(P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}) = -\frac{dP_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{ds} - (2p+1)\,P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Wenden wir noch zweimal die Rekursionsformel (46) an, so kommt daher

$$\begin{aligned} L(Q_{p+1}) = & -\alpha_0^{(p)}(2p+3)\,P_{p+1}^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \{2\alpha_0^{(p)}(p+1) - \alpha_1^{(p)}(2p+1)\}\,P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ & + \{2p(\alpha_0^{(p)}(p+1) + \alpha_1^{(p)}) - \alpha_2^{(p)}(2p-1)\}\,P_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ & - \{p(\alpha_0^{(p)}(p+1)+\alpha_1^{(p)})+\alpha_2^{(p)}\}\,\frac{dP_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{ds} + L(\alpha_3^{(p)}P_{p-2}^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \cdots + \alpha_{p+1}^{(p)}P_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}). \end{aligned}$$

Vergleicht man auf beiden Seiten von (60) die Koeffizienten der Potenzen s^{p+1}, s^p, s^{p-1}, so erhält man dadurch

$$\alpha_0^{(p)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2p+3}, \qquad \alpha_1^{(p)} = \frac{1}{2}\,\frac{(2p+2)^2}{(2p+1)(2p+3)}, \qquad \alpha_2^{(p)} = -\frac{1}{2}\,\frac{p(p+1)}{2p+1}.$$

Diese Größen erfüllen aber die Beziehung

$$p(\alpha_0^{(p)}(p+1) + \alpha_1^{(p)}) + \alpha_2^{(p)} = 0;$$

es muß infolgedessen

$$L(\alpha_3^{(p)}P_{p-2}^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \cdots + \alpha_{p+1}^{(p)}P_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}) = 0$$

sein, eine Gleichung, die gewiß erfüllt ist, wenn

$$\alpha_3^{(p)} = \cdots = \alpha_{p+1}^{(p)} = 0$$

genommen wird. Ein partikuläres Integral von (59) liefert uns demnach der Ausdruck

$$\begin{aligned} k_p^*(s) = & -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{p(p+1)}}{2p+1}\,\Lambda_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) + \frac{1}{2}\,\frac{(2p+2)^2}{(2p+1)(2p+3)}\,\Lambda_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) \\ & -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(p+1)(p+2)}}{2p+3}\,\Lambda_{p+1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s). \end{aligned}$$

Diese Entwickelungen gelten freilich nur für $p \neq 0$; für $p = 0$ bleibt gleichwohl das erhaltene Resultat in der Form gültig:

$$k_0^*(s) = \frac{2}{3}\,\Lambda_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\,\Lambda_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s).$$

Es ist aber notwendig

$$k_p(s) = k_p^*(s) + \beta_p \cdot \mathfrak{J}_0(s)\sqrt{s} + \gamma_p \cdot \mathfrak{C}_0(s)\sqrt{s}.$$

Da die Limesgleichungen (58), (58') erfüllt sein müssen, wenn man $k_p(s)$ an Stelle von $f(s)$ setzt, so ergibt sich für die Konstanten β_p, γ_p

$$\beta_p = 0, \qquad \gamma_p = 0.$$

Die dem Kern $K_0(s,t)$ korrespondierende quadratische Form, deren Koeffizienten durch

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K_0(s,t)\,\mathsf{\Lambda}_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)\,\mathsf{\Lambda}_{q-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t)\,ds\,dt$$

gegeben werden, lautet demnach

$$K_0(x)=\frac{1}{2}\Big[\frac{4}{3}x_1^2+\frac{16}{15}x_2^2+\frac{36}{35}x_3^2+\cdots$$
$$-\sqrt{\frac{8}{9}}x_1x_2-\sqrt{\frac{24}{25}}x_2x_3-\sqrt{\frac{48}{49}}x_3x_4-\cdots\Big].$$

Stellen wir die Rechnung allgemeiner für ein beliebiges $\nu>-1$ an, so ergibt sich

$$K_\nu(x)=\frac{1}{2}\sum_{(p)}\frac{(2p+2\nu)^2+2\nu}{(2p+2\nu)^2-1}x_p^2-\sum_{(p)}\frac{\sqrt{p(p+2\nu+1)}}{2p+2\nu+1}x_px_{p+1}.$$

Für $p=1$, $\nu=-\frac{1}{2}$ erscheint der Koeffizient $\frac{(2p+2\nu)^2+2\nu}{(2p+2\nu)^2-1}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; er ist durch

$$\frac{3}{2}=\underset{\nu=-\frac{1}{2}}{L}\frac{(2+2\nu)^2+2\nu}{(2+2\nu)^2-1}$$

zu ersetzen.

Wir ziehen noch die in der folgenden Weise definierten (Legendreschen) Polynome heran

$$\Pi_p^{(\beta)}(x)=\frac{1}{x^\beta(1-x)^{\beta-1}}\frac{d^p}{dx^p}\left[x^{p+\beta}(1-x)^{p+\beta-1}\right]$$
$$(\beta>0,\qquad 0\leqq x\leqq 1).$$

Aus ihnen leiten sich die Funktionen ab:

$$\psi_p^{(\nu)}(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(p+\nu)}\sqrt{\frac{2\Gamma(p+2\nu+1)}{\Gamma(p)}}\,\frac{(\lambda-1)^{\frac{\nu}{2}}}{\lambda^{\nu+\frac{1}{2}}}\,\Pi_{p-1}^{(\nu+1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Für ein festes ν bilden $\psi_1^{(\nu)}(\lambda)$, $\psi_2^{(\nu)}(\lambda),\ldots$ ein vollständiges Orthogonalsystem im Intervall $1\leqq\lambda<\infty$. Wie die Rechnung lehrt, ist

$$K_\nu(x)=\int_1^\infty\frac{(\psi_1^{(\nu)}(\mu)x_1+\psi_2^{(\nu)}(\mu)x_2+\cdots)^2}{\mu}d\mu.$$

Bestimmen wir endlich die zu dem Kern $K_\nu(s,t)$ nach der allgemeinen Theorie gehörige Funktion $\mathsf{A}_\nu(s;\lambda)$, so ergibt sich genau in der beim Kern $e^{-|s-t|}$ beschriebenen Weise

$$\frac{\partial\mathsf{A}_\nu(s;\lambda)}{\partial\lambda}=\sqrt{\frac{s}{2}}\cdot J_\nu(s\sqrt{\lambda-1})\qquad(\lambda\geqq 1).$$

Damit erscheint das Integraltheorem

$$f(s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \sqrt{s}\, J_\nu\left(s\sqrt{\lambda - 1}\right)\int_0^\infty f(t)\sqrt{t}\, J_\nu\left(t\sqrt{\lambda-1}\right) dt\, d\lambda$$

bewiesen für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(s)$, für welche

$$\left[\frac{d^2 f(s)}{ds^2} - \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{4s^2}\right) f(s)\right]^2$$

im Intervall $0 \cdots \infty$, $\left|s^{\nu+\frac{1}{2}} f(s)\right|$ an der Stelle $s = 0$ und $|f''(s)|$ für $s = \infty$ integrabel ist, $f(s)$ und $f'(s)$ im Unendlichen verschwinden und ferner die erste der beiden Bedingungen (58) statthat. Diese Voraussetzungen sind erfüllt, falls $f(s)$ im Unendlichen in normaler Weise von höherer als $\frac{1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung verschwindet und an der Stelle $s = 0$ in der Form $s^{\nu+\frac{1}{2}} u(s)$ darstellbar ist, wo $u(s)$ samt seinen beiden ersten Differentialquotienten endlich bleibt und $u'(0) = 0$ ist.

Elmshorn, April 1908.

Über die Anwendung der Integralgleichungen in einer parabolischen Randwertaufgabe.

Von

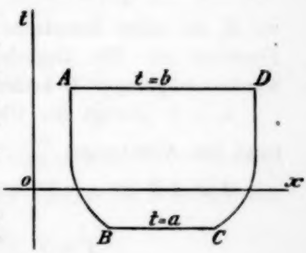
Wera Myller-Lebedeff in Bukarest.

In meinem Artikel „Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen", Math. Ann. Bd. 64, habe ich mich mit derjenigen Lösung der partiellen Gleichung vom parabolischen Typus

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

beschäftigt, welche durch vorgeschriebene Werte auf dem Stück $(0, \infty)$ der Charakteristik $t = \tau$ im Bereiche $t > \tau$, $x > 0$ bestimmt wird.*)

Nehmen wir einen Bereich $ABCD$ in der Halbebene $x > 0$, welcher durch die Charakteristiken $t = a$, $t = b$ und die Kurven AB und CD begrenzt ist, deren Gleichungen $x = \xi_1(t)$ resp. $x = \xi_2(t)$ sein mögen. Ich nehme mir vor, in den folgenden Zeilen eine im Innern von $ABCD$ stetige Lösung der Gleichung (1) zu finden, die auf AB, CD, BC die vorgeschriebenen Werte $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f(x)$ annimmt.



Die Funktionen f_1, f_2, f werden stetig, differenzierbar und in den Punkten B, C übereinstimmend vorausgesetzt. Die Funktionen $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_1'(t)$, $\xi_2'(t)$ werden gleichfalls für $a \leqq t \leqq b$ endlich und stetig vorausgesetzt, höchstens können die Ableitungen in den Endpunkten unendlich werden, so jedoch, daß

$$(b-t)^\mu (t-a)^\mu \xi_1'(t), \quad (b-t)^\mu (t-a)^\mu \xi_2'(t) \quad \left(\mu < \frac{1}{2}\right)$$

endlich bleiben.

*) Siehe auch S. Kepinski, Math. Ann. Bd. 61.

Bemerken wir zunächst, daß dieses Problem nur *eine* Lösung hat, wenn es überhaupt eine hat. Man beweist das für irgendwelche nichtgeschlossene Randkurve c, die ihre beiden Enden auf einer Charakteristik AD hat und ganz unter derselben verläuft, indem man voraussetzt, daß dieses Problem zwei Lösungen hat, ihre Differenz u bildet, die auf c verschwindet, und das Integral

$$\begin{aligned}0 &= \iint\limits_{(s)} ux\left(u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x}u_t\right) dx\,dt \\ &= \int\limits_{(c)} \left[xuu_x dt + \frac{1}{2}u^2 dx\right] - \frac{1}{2}\int\limits_{AD} u^2 dx - \int\limits_{(s)} xu_x^2\,dx\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_{AD} u^2 dx - \int\limits_{(s)} xu_x^2\,dx\,dt\end{aligned}$$

betrachtet. Bei $x > 0$ folgt daraus $u \equiv 0$, w. z. b. w.*)

Wir beginnen mit der einfacheren Aufgabe, wo die vorgeschriebenen Werte gleich $f_1(t)$ auf AB, $f_2(t)$ auf CD und 0 auf BC sind, und wir benutzen die Methode, die E. Holmgren für die ähnliche Aufgabe bei der Gleichung der Wärmeleitung gebraucht hat.**)

Betrachten wir das Integral

$$u_1(x, t) = \int\limits_a^t \frac{\Phi_1(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{x+\xi_1(\tau)}{t-\tau}} J_0\left(2i\frac{\sqrt{x\xi_1(\tau)}}{t-\tau}\right) d\tau,$$

wo J_0 die nullte Besselsche Funktion und $\Phi_1(\tau)$ eine willkürliche stetige Funktion ist. Ein ähnliches Integral, wo Φ_1, ξ_1 durch Φ_2, ξ_2 ersetzt werden, möge $u_2(x, t)$ heißen.

$u_1(x, t)$ genügt der Gleichung (1) und ist im Innern von $ABCD$ samt den Ableitungen $\frac{\partial u_1}{dx}$, $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ stetig.

Auf AB ist $u_1(s, t)$ stetig und nimmt die Werte

$$\int\limits_a^t \frac{\Phi_1(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{\xi_1(t)+\xi_1(\tau)}{t+\tau}} J_0\left(2i\frac{\sqrt{\xi_1(t)\xi_1(\tau)}}{t-\tau}\right) d\tau$$

an. Daß dieses Integral existiert, wird klar, wenn wir den asymptotischen Wert von J_0 für sehr großes Argument berücksichtigen: die Funk-

*) Besteht die Begrenzungskurve aus den Halbachsen $0x$, $0t$, so ist aus dieser Formel leicht ersichtlich, daß man die Werte nur auf $0x$ vorzuschreiben braucht.

**) Arkiv för Matematik, Bd. 3; Comptes Rendus, 21. déc. 1907. Siehe auch E. E. Levi, Comptes Rendus, 27. janv. 1908.

tion unter dem Integralzeichen verhält sich bei der Annäherung von τ an t wie

$$\frac{1}{t-\tau} e^{-\frac{\xi_1(t)+\xi_1(\tau)}{t-\tau}} \cdot \frac{\sqrt{t-\tau}}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{\xi_1(t)\,\xi_1(\tau)}} e^{2\frac{\sqrt{\xi_1(t)\,\xi_1(\tau)}}{t-\tau}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{1}{\sqrt[4]{\xi_1(t)\,\xi_1(\tau)}} e^{-\frac{(\sqrt{\xi_1(t)}-\sqrt{\xi_1(\tau)})^2}{t-\tau}}.$$

Zugleich sehen wir, daß die Kurve $x = \xi_1(t)$ keinen gemeinsamen Punkt mit der t-Achse haben darf, was vorauszusehen war, denn $x = 0$ ist die feste singuläre Linie der Gleichung (1).

Die gesuchte Lösung möge die Form

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

haben; die Bedingungen für die Randwerte führen dann zu dem folgenden System von Integralgleichungen für die Funktionen $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$:

$$f_1(t) = \int_a^t \frac{\Phi_1(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{\xi_1(t)+\xi_1(\tau)}{t-\tau}} J_0\left(2i\frac{\sqrt{\xi_1(t)\,\xi_1(\tau)}}{t-\tau}\right) d\tau$$

$$+ \int_a^t \frac{\Phi_2(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{\xi_1(t)+\xi_2(\tau)}{t-\tau}} J_0\left(2i\frac{\sqrt{\xi_1(t)\,\xi_2(\tau)}}{t-\tau}\right) d\tau,$$

$$f_2(t) = \int_a^t \frac{\Phi_1(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{\xi_2(t)+\xi_1(\tau)}{t-\tau}} J_0\left(2i\frac{\sqrt{\xi_2(t)\,\xi_1(\tau)}}{t-\tau}\right) d\tau$$

$$+ \int_a^t \frac{\Phi_2(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{\xi_2(t)+\xi_2(\tau)}{t-\tau}} J_0\left(2i\frac{\sqrt{\xi_2(t)\,\xi_2(\tau)}}{t-\tau}\right) d\tau.$$

Wir transformieren dieses System nach dem Vorgange von V. Volterra*), indem wir es mit $\frac{dt}{\sqrt{z-t}}$ multiplizieren und von a bis z integrieren. Durch Umkehrung der Integrationsfolge finden wir

$$F_1(z) = \int_a^z \Phi_1(\tau)\, H_{11}(\tau, z)\, d\tau + \int_a^z \Phi_2(z)\, H_{12}(\tau, z)\, d\tau,$$

$$F_2(z) = \int_a^z \Phi_1(\tau)\, H_{21}(\tau, z)\, d\tau + \int_a^z \Phi_2(z)\, H_{22}(\tau, z)\, d\tau,$$

*) Atti di Torino, t. 31, Note II.

wo

$$F_i(z) = \int_a^z \frac{f_i(t)}{\sqrt{z-t}}\,dt$$

und

$$H_{ij}(\tau, z) = \int_\tau^z \frac{1}{(t-\tau)\sqrt{z-t}}\, e^{-\frac{\xi_i(t)+\xi_j(\tau)}{t-\tau}} J_0\left(2i\,\frac{\sqrt{\xi_i(t)\,\xi_j(\tau)}}{t-\tau}\right) dt.$$

Wir differenzieren das neue System nach z, wobei die Formeln

$$H_{ij}(z,z) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}\, G_{ij}(z,z) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\xi_i(z)}} & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

$$G_{ij}(\tau, t) = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{\xi_i(t)+\xi_j(\tau)}{t-\tau}} J_0\left(2i\,\frac{\sqrt{\xi_i(t)\,\xi_j(\tau)}}{t-\tau}\right)$$

in Betracht kommen, und wir gelangen schließlich zum System

$$(2)\quad \begin{aligned} F_1'(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Phi_1(z)}{\sqrt{\xi_1(z)}} + \int_a^z \Phi_1(\tau)\frac{\partial H_{11}(\tau,z)}{\partial z}\,d\tau + \int_a^z \Phi_2(\tau)\frac{\partial H_{12}(\tau,z)}{\partial z}\,d\tau,\\ F_2'(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Phi_2(z)}{\sqrt{\xi_2(z)}} + \int_a^z \Phi_1(\tau)\frac{\partial H_{21}(\tau,z)}{\partial z}\,d\tau + \int_a^z \Phi_2(\tau)\frac{\partial H_{22}(\tau,z)}{\partial z}\,d\tau, \end{aligned}$$

wo die Kerne

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial z} = -\frac{1}{z-\tau}\int_\tau^z \frac{dt}{\sqrt{(z-t)(t-\tau)}}\,(\tau - t)\,\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}$$

bei den den Funktionen ξ_1, ξ_2 auferlegten Bedingungen im Punkte $z = \tau$ entweder stetig sind oder höchstens wie $\frac{1}{\sqrt{z-\tau}}$ unendlich werden. Ein solches System wird in gewöhnlicher Weise durch sukzessive Approximationen gelöst und hat ein und nur ein System von stetigen Lösungen.

Betrachten wir jetzt das allgemeine Problem, wo auch die auf BC vorgeschriebenen Werte von Null verschieden sind; sie mögen $f(x)$ sein. Aus der gewöhnlichen Greenschen Transformation des Integrals

$$\iint\limits_{(ABCD)} [vL(u) - uM(v)]\,dx\,dt,$$

wo u eine Lösung von (1) und v eine Lösung der adjungierten Gleichung

$$M(v) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{x^2} v = 0$$

ist, folgt

$$(3)\quad \begin{aligned} \int\limits_{AD} \frac{1}{x} uv\,dx = & \int\limits_{AB} [(vu_x - uv_x + \frac{1}{x}uv)\,dt + \frac{1}{x}uv\,dx] \\ & + \int\limits_{CD} [(vu_x - uv_x + \frac{1}{x}uv)\,dt + \frac{1}{x}uv\,dx] + \int\limits_{BC} \frac{1}{x} uv\,dx. \end{aligned}$$

Gelingt es, eine Funktion

$$v(x, \lambda, t, b) = G(x, \lambda, t, b) + v_1(x, t)$$

zu konstruieren, wo

$$G(x, \lambda, t, b) = \frac{x}{b-t} e^{-\frac{x+\lambda}{b-t}} J_0\left(2i\frac{\sqrt{x\lambda}}{b-t}\right)$$

und $v_1(x, t)$ eine stetige Lösung von $M(v) = 0$ ist, die folgende Bedingungen

$$\begin{aligned} & v_1(x, b) = 0, \\ & v_1(\xi_1(t), t) = -G(\xi_1(t), \lambda, t, b), \\ & v_1(\xi_2(t), t) = -G(\xi_2(t), \lambda, t, b) \end{aligned}$$

erfüllt, so ist

$$(4)\quad \int\limits_{AD} \frac{1}{x} uv\,dx = u(\lambda, b), \qquad \xi_1(b) < \lambda < \xi_2(b).$$

Es verschwinden dann die Glieder mit u_x in der rechten Seite der Formel (3) und es ist

$$u(\lambda, b) = -\int\limits_{AB} uv_x\,dt - \int\limits_{CD} uv_x\,dt + \int\limits_{BC} \frac{1}{x} uv\,dx,$$

oder, wenn wir statt λ, b, x, t die Bezeichnungen x, t, ξ, τ einführen,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int\limits_a^t f_1(\tau)\left[\frac{\partial v(\xi, x, \tau, t)}{\partial \xi}\right]_{\xi=\xi_1(\tau)} d\tau - \int\limits_a^t f_2(\tau)\left[\frac{\partial v(\xi, x, \tau, t)}{\partial \xi}\right]_{\xi=\xi_2(\tau)} d\tau \\ & + \int\limits_{\xi_1(a)}^{\xi_2(a)} \frac{1}{\xi} f(\xi)\left[v(\xi, x, \tau, t)\right]_{\tau=a} d\xi. \end{aligned}$$

Somit ist die gesuchte Lösung $u(x, t)$ von (1) im Bereiche $ABCD$ durch ihre Randwerte definiert. Es bleibt zu zeigen, daß die Funktion

$v_1(x, t)$ konstruiert werden kann. Diese Aufgabe aber läßt sich gerade ebenso behandeln, wie die spezielle am Anfang behandelte Aufgabe für die Gleichung (1).

Es wird $v_1(x, t)$ in der Form

$$v_1(x, t) = \int_t^b \Phi_1(\tau) \frac{x}{\tau - t} e^{-\frac{x + \xi_1(\tau)}{\tau - t}} J_0\left(2i \frac{\sqrt{x \xi_1(\tau)}}{\tau - t}\right) d\tau$$

$$+ \int_t^b \Phi_2(\tau) \frac{x}{\tau - t} e^{-\frac{x + \xi_2(\tau)}{\tau - t}} J_0\left(2i \frac{\sqrt{x \xi_2(\tau)}}{\tau - t}\right) d\tau$$

dargestellt, und $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$ durch ein dem (2) analoges System von Integralgleichungen definiert.

Über die reellen Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Von

E. Study in Bonn.

In einer Note über den Prozeß der analytischen Fortsetzung (Math. Ann. Bd. 63, 1906, S. 239—245) ist gezeigt worden, daß ein Paar u, v zusammengehöriger, nämlich durch die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

verbundener reeller Lösungen der Laplaceschen Gleichung $\Delta_2 u = 0$ mit einem zweiten Paar u^*, v^* einen analytischen Zusammenhang im Gebiete der komplexen Veränderlichen x, y nicht haben kann, wenn nicht ein solcher Zusammenhang schon bei reeller Veränderlichkeit von x, y vorhanden ist, wenn also nicht $u + iv$ und $u^* + iv^*$ einer und derselben analytischen Funktion von $x + iy$ angehören. Die entsprechende Frage für eine einzelne Lösung u der Laplaceschen Gleichung ist dort in der Einleitung auch schon aufgeworfen, aber weiterhin nicht beantwortet worden — wie ich bekennen muß, deshalb, weil ich mir über die Natur der Antwort eine unrichtige Vorstellung gebildet hatte.*) Die verbliebene Lücke soll nunmehr ausgefüllt werden, was übrigens sehr leicht von dem bereits betretenen Wege aus geschehen kann.

Der reelle Bestandteil $u = u(x, y)$ einer analytischen Funktion

$$w = u + iv = f(x + iy) = f(z)$$

hat dann und nur dann einen durch das imaginäre Gebiet vermittelten Zusammenhang mit (mindestens) einer anderen reellen Funktion u^* der reellen Veränderlichen x und y, wenn die Umkehrung der Funktion $w = f(z)$ reell-periodisch ist.

*) Auf S. 240 oben soll es statt „Funktionen" u, v, „Funktionenpaare" u, v heißen.

Ist dann 2ω eine positive primitive Periode der Umkehrungsfunktion, so gehört zu dieser Periode eine zweite Funktion u^*, die zu der gegebenen Funktion u in einer solchen Wechselbeziehung steht, daß jede die andere bis auf ganzzahlige Vielfache von 2ω bestimmt.

Wie nämlich der Annahme gemäß u der reelle Bestandteil der Funktion $f(z)$ ist, und überdies in dem bezeichneten Falle zugleich mit irgend einem Zweige $u_0(z)$ alle Funktionszweige der Form

$$u_0(z) + 2k\omega \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

umfaßt, so ist u^* der reelle Bestandteil der nach Voraussetzung von $f(z)$ verschiedenen Funktion $f(z) + \omega$, und umfaßt zugleich mit irgend einem Zweige $u_0(z) + (2k+1)\omega$ alle übrigen Zweige der Art. Sind mehrere (und dann immer unendlich viele, darunter auch beliebig kleine) positive primitive Perioden der Umkehrungsfunktion $z(w)$ vorhanden, so gehört zu jeder von ihnen eine Funktion u^*, und alle diese Funktionen haben denselben Existenzbereich.

Indem wir, wie üblich, und wie soeben schon geschehen, $x + iy = z$ und $u + iv = w$ setzen, schreiben wir zunächst

$$u = \frac{1}{2}\{w + \bar{w}\} = \frac{1}{2}\{f(z) + \bar{f}(\bar{z})\},$$

$$v = \frac{1}{2i}\{w - \bar{w}\} = \frac{1}{2i}\{f(z) - \bar{f}(\bar{z})\}.$$

Erteilen wir sodann den bisher reellen Veränderlichen x, y auch imaginäre Werte, und führen wir unter dieser Voraussetzung die Zeichen ein

$$x - iy = \bar{z}', \quad x + iy = z'',$$

so liefern die Formeln

$$U = \frac{1}{2}\{f(z'') + \bar{f}(\bar{z}')\}, \quad V = \frac{1}{2i}\{f(z'') - \bar{f}(\bar{z}')\}$$

dann analytische Fortsetzungen der beiden (als nicht konstant anzunehmenden) Funktionen u, v in das vierdimensionale komplexe Gebiet, wenn die Funktionswerte $f(z'')$ und $f(z')$ [deren zweiter konjugiert-komplex ist zu $\bar{f}(\bar{z}')$] aus $f(z)$ durch analytische Fortsetzung abgeleitet werden. Wir wollen nun zunächst diese Fortsetzung auf möglichst allgemeine Weise vornehmen, derart, daß die von z zu z' und z'' führenden Wege keiner anderen Einschränkung unterliegen, als der selbstverständlichen, im Existenzbereich der Funktion $f(z)$ zu bleiben, so daß also namentlich diese beiden Wege auch nicht äquivalent zu sein brauchen. Dann aber wollen wir diese Wege zum Ausgangspunkt zurückkehren lassen, so daß schließlich wieder $z' = z'' = z = x + iy$ wird mit denselben reellen Werten von x und y wie zuvor.

Sind wir dann von einem bestimmten Zweige $f_0(z)$ der Funktion $f(z)$ ausgegangen, so werden wir schließlich zu zwei möglicherweise von $f_0(z)$ und von einander verschiedenen Zweigen $f_2(z)$ und $f_1(z)$ gelangt sein, die beide auch durch Vermittelung von reellen Werten x'', y'' und x', y' der Veränderlichen x, y erreicht werden können $[z'' = x'' + iy'',\ z' = x' + iy']$. So entstehen dann sämtliche zweidimensionalen Ausschnitte aus dem vierdimensionalen Wertgebiet der komplexen Funktionen U, V, die dadurch charakterisiert sind, daß die unabhängigen Veränderlichen x, y reell sind und (mindestens in einem Teilgebiet) mit den Argumenten von $f_0(x + iy)$ zusammenfallen, nämlich die immer noch der Laplaceschen Gleichung genügenden, aber nicht mehr notwendig reellen Funktionszweige

$$u^* = \frac{1}{2}\{f_2(z) + \bar{f}_1(\bar{z})\}, \quad v^* = \frac{1}{2i}\{f_2(z) - \bar{f}_1(\bar{z})\}\cdot$$

Insbesondere aber werden durch diese Ausdrücke auch alle *reellwertigen* Funktionszweige (oder vielmehr, da es sich nur noch um zweidimensionale Gebiete handelt, Teilzweige) von U, V darstellbar sein, also — bei nunmehr reeller analytischer Fortsetzung von u_0, v_0 und u^*, v^* — auch alle reellen Lösungen der Laplaceschen Gleichung, die aus den Lösungen u, v auf dem Umwege durch das vierdimensionale komplexe Gebiet von x, y durch den Prozeß der analytischen Fortsetzung hergeleitet werden können.

Verlangen wir nun, daß die Funktion u^* reellwertig sein soll, so heißt das, daß die Differenz $f_2(z) - f_1(z)$ reell sein soll für ein zweifach ausgedehntes Wertgebiet. Dann aber ist sie, wegen des analytischen Charakters von $f_2(z)$ und $f_1(z)$, eine Konstante. Es wird also (mindestens) eine reelle und z. B. positive Größe 2ω existieren derart, daß zugleich mit irgend einem Werte $f_1(z)$ der Funktion $f(z)$ auch jede Größe der Form $f_1(z) + 2k\omega$ $\{k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ einen Funktionswert zu demselben Argumente darstellt, während bei Ersetzung von 2ω durch irgend ein Submultiplum dieser Größe das gleiche nicht gilt. Es folgt dann

$$u^* = \frac{1}{2}\{f_1(z) + \bar{f}_1(\bar{z})\} + k\omega.$$

Der erste Teil dieses Ausdruckes entsteht aus irgend einem Funktionselement

$$u_0 = \frac{1}{2}\{f_0(z) + f_0(\bar{z})\}$$

durch analytische Fortsetzung auf reellem Wege, nämlich auf dem Wege oder auf den Wegen, die $f_0(z)$ in $f_1(z)$ überführen. Ebenso kann man auf reellem Wege, wie schon gesagt, den erhaltenen Wert von u um ein gerades Vielfaches von ω wachsen lassen, nicht aber um ein ungerades

Vielfaches von ω. Die Funktion $u+\omega$ hängt also mit u auf imaginärem, nicht aber auf reellem Wege analytisch zusammen, und sie ist die einzige der Größe 2ω zugeordnete Funktion der Art, wenn man von einem willkürlich bleibenden ganzzahligen Vielfachen von 2ω selbst absieht.

Hiermit ist der behauptete Lehrsatz bewiesen.

Für v^* ergibt sich entsprechend

$$v^* = \frac{1}{2i}\{f_1(z) - \bar{f}_1(\bar{z})\} + \frac{k\omega}{i}.$$

Wenn also die reelle Funktion u auf imaginärem Wege in die von ihr verschiedene reelle Funktion $u+\omega$ übergeht, so geht die zugehörige reelle Funktion v nicht in eine zu $u+\omega$ gehörige reelle Funktion über.

Verlangen wir, daß sowohl u^* als auch v^* reell sein soll, so folgt $f_2(z) = f_1(z)$, und u^*, v^* können aus u_0, v_0 unter Durchlaufung nur reeller Werte von x, y durch simultane analytische Fortsetzung abgeleitet werden. Man erhält den früher schon begründeten Lehrsatz.

Als *Beispiel* betrachten wir die Funktion

$$w = \frac{1}{i}\lg z.$$

Setzen wir, unter x, y reelle Größen verstehend, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\{r > 0\}$, und $z = x + iy = re^{i\varphi}$, so wird in diesem Falle $u = \varphi$ und $2\omega = 2\pi$ [*aber nicht* $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, da die Umkehrung $\operatorname{tg} u$ dieser Funktion die Periode π hat].

Deuten wir nun — unter der Annahme $r > 0$ — die Größen

$$x,\ y,\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

als Koordinaten in einem reellen rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystem, so erhalten wir alle (eigentlichen) reellen Punkte einer gemeinen Schraubenfläche von der Ganghöhe 2π, wenn wir noch alle reellen Punkte der Achse $x = 0$, $y = 0$ hinzufügen. Durch seine Achse aber wird dieser Schraubenflächenzug in zwei Gebiete zerlegt, die durch die Spiegelung an der Achse ineinander übergehen. Die Punkte des einen Gebietes entsprechen dem Wertevorrat

$$x,\ y,\ u,$$

die des anderen dem Wertevorrat

$$x,\ y,\ u^*,$$

wo $u^* = u + \pi$. Zwischen den Funktionen u, u^* besteht ein analytischer Zusammenhang im reellen Gebiete nicht, da das allen Punkten der Trennungslinie entsprechende Argumentenpaar $x = 0$, $y = 0$ für beide Funktionen

eine wesentlich singuläre Stelle ist. Wohl aber besteht ein solcher Zusammenhang durch imaginäre Argumente hierdurch: schon bei festgehaltenem φ kann man ja die Stelle $r = 0$ umgehen und so von positiven zu negativen reellen Werten von r gelangen, was mit einem Übergang von dem einen Flächengebiet zum anderen gleichbedeutend ist.

Übrigens ist es eine Besonderheit dieses unseres Beispiels, daß die Funktionen u und u^* nur Punkte (verschiedener Gebiete) eines einzigen (analytisch) zusammenhängenden Flächenzuges liefern. Das die Regel bildende Verhalten zeigt der reelle Teil der Funktion

$$\frac{1}{i}\lg z + \psi(z),$$

worin $\psi(z)$ eine eindeutige Funktion mit passend gewähltem ringförmigem Existenzbereich bedeutet. —

Wir wollen bei dieser Gelegenheit noch die Tatsache erwähnen, daß die Lösungen der Laplaceschen Gleichung bei Deutung von x, y, u als rechtwinkligen Koordinaten eine wohlcharakterisierte Familie sogenannter Translationsflächen bestimmen; dieses Beispiel scheint nämlich merkwürdigerweise in der Literatur über die genannte Flächenfamilie nicht vorzukommen. Mit Bezug auf reelle Lösungen, auf die wir uns der Kürze halber beschränken wollen, gilt der folgende, übrigens sehr elementare Lehrsatz:

Ist u irgend eine reelle Lösung der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

und deutet man x, y, u als Koordinaten in einem reellen rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystem, so ist der Ort der Punkte (x, y, u) ein reeller Zug einer Translationsfläche mit paarweise konjugiert-imaginären Erzeugenden.

Diese $2 \cdot \infty^2$ Kurven werden aus der Fläche durch zwei Büschel von parallelen Minimalebenen

$$x - iy = \bar{c}, \quad x + iy = c$$

ausgeschnitten.

Umgekehrt gehört jeder derartige Flächenzug bei bestimmter passender Koordinatenwahl zu einer (dann natürlich ebenfalls völlig bestimmten) Lösung der Laplaceschen Gleichung.

Die allgemeinste Erzeugung eines vorgelegten Flächenzuges (x, y, u) als eines Ortes reeller Sehnenmitten zwischen konjugiert-komplexen Punkten von zwei konjugiert-imaginären Kurven in Minimalebenen wird in Evidenz gesetzt durch die Formeln

$$u = \frac{1}{2}\{x_1 + \bar{x}_1\}, \quad x = \frac{1}{2}\{x_2 + \bar{x}_2\}, \quad y = \frac{1}{2}\{x_3 + \bar{x}_3\},$$

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x+iy) + ic_1, & \bar{x}_1 &= \bar{f}(x-iy) - ic_1, \\ x_2 &= (x+iy) + ic_2, & \bar{x}_2 &= (x-iy) - ic_2, \\ x_3 &= -i(x+iy) + ic_3, & \bar{x}_3 &= i(x-iy) - ic_3, \end{aligned}$$

in denen c_1, c_2, c_3 irgend drei reelle Konstante bedeuten. Die angedeutete Umkehrung ergibt sich hieraus ohne weiteres.

Man kann als *singulär* alle die analytischen Kurven bezeichnen, die sich der gewöhnlichen in Lehrbüchern abgehandelten Kurventheorie entziehen, nämlich, außer den geraden Linien, die krummen Linien in Minimalebenen und die krummen Minimallinien. Die mit einem oder mehreren reellen Zügen ausgestatteten „reellen" Flächen — Örter von ∞^4 paarweise konjugiert-komplexen Punkten —, die bei passender Wahl des Koordinatensystems und bei komplexer Veränderlichkeit von x, y durch obige Formeln dargestellt werden können, bilden dann zusammen mit den reellen Minimalflächen *die Gesamtheit aller reellen Translationsflächen, deren Erzeugende singuläre Kurven sind.* Solcher Flächen gibt es also zwei Familien, wie es zwei Familien singulärer Kurven gibt (während, bei Ausdehnung der Betrachtung auf imaginäre Flächen, natürlich drei analog erklärte Familien vorhanden sind). Beiden Familien zugleich gehören, außer den reellen Ebenen, nur die reellen gemeinen Schraubenflächen an. (Satz von Meusnier, bei Darboux, Théorie des surfaces, I, p. 271.)

Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen.

Von

Walter Schnee in Berlin.

§ 1.
Einleitung.

In seiner kürzlich erschienenen großen Arbeit*): „Beiträge zur analytischen Zahlentheorie" hat Herr Landau folgenden Satz bewiesen, in welchem $s = \sigma + ti$ gesetzt ist:

„Es sei für jedes $\delta > 0$ und alle n von einer gewissen Stelle $n_0 = n_0(\delta)$ an

$$|b_n| < n^\delta,$$

also a fortiori

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

für $\Re(s) > 1$ absolut konvergent. Die durch die Reihe dargestellte Funktion sei für $\Re(s) \geqq \eta$ regulär, wo $0 < \eta < 1$ ist; und für $|t| \geqq 1$, $\sigma \geqq \eta$ sei

$$|f(s)| < B|t|^k,$$

wo B und $k \geqq 0$ konstant sind. Dann ist die Reihe auf der Geraden $\Re(s) = 1$ und darüber hinaus konvergent, nämlich mindestens für

$$\Re(s) > 1 - \frac{1-\eta}{2^\nu},$$

wo ν die kleinste ganze Zahl $> k$ bedeutet."

Dieser Satz erscheint mir darum besonders interessant, weil zum ersten Mal aus den analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion allgemein eine Aussage über das Konvergenzgebiet der Reihe entwickelt wird; bekanntlich braucht auf der Konvergenzgeraden einer Dirichletschen Reihe kein singulärer Punkt der durch diese Reihe dargestellten Funktion zu liegen, nicht einmal in beliebiger Nähe

*) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 26, 2. Sem. 1908, S. 169—302, siehe besonders für den zitierten Satz S. 252—255.

derselben. Im Falle $k<1$ ergibt der Satz die Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $\Re(s)>\frac{\eta+1}{2}$; dieser Fall ist darum von besonderem Interesse, weil umgekehrt, wenn η innerhalb, aber nicht auf dem Rande des Konvergenzgebietes der Reihe $f(s)$ gelegen ist, stets für $\sigma\geqq\eta$, $|t|\geqq 1$ die Beziehung

$$|f(s)|<B|t|^k$$

stattfindet, wo k eine Zahl <1 ist.*) Es ist mir nun gelungen, im Falle $k<1$ aus den Voraussetzungen von Herrn Landau, aus welchen noch die Annahme $0<\eta$ weggelassen werden kann, durch eine andere Beweisanordnung die Konvergenz der Reihe sogar für

$$\Re(s)>\eta+\frac{k(1-\eta)}{1+k}=\frac{\eta+k}{1+k}$$

zu beweisen. Die Reihe ist also z. B. speziell sicher so weit konvergent, als die durch die Reihe dargestellte Funktion regulär ist und kurz gesagt die Größenordnung $(\log|t|)^\gamma$ hat, wo γ eine beliebig große positive Zahl bedeuten kann. Die Zahl $\frac{\eta+k}{1+k}$ noch durch eine kleinere zu ersetzen, gestattet wenigstens die von mir angewendete Beweismethode nicht.

Ich werde die behauptete Tatsache gleich für allgemeinere Dirichletsche Reihen beweisen, da dies nicht viel schwieriger sein wird. Für diese lautet der betreffende Satz:

Es sei

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s},$$

*) Durch partielle Summation kann man nämlich leicht folgenden Satz beweisen (vergl. die zitierte Arbeit von Herrn Landau, S. 259—260):

„Wenn

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}$$

für $s>1$ absolut konvergiert und für $s>\alpha$ $(0\leqq\alpha<1)$ konvergiert, so ist, wenn $\delta>0$, $\lambda>\alpha$ gegeben ist und $\lambda\leqq 1$ ist, für $\sigma\geqq\lambda$, $|t|\geqq 1$

$$|f(s)|<B\cdot|t|^k,$$

wo $k=\frac{1-\lambda}{1-\alpha}+\delta$ ist und B eine absolute Konstante bezeichnet."

Der analoge Satz gilt natürlich auch, wie Herr Hadamard an der noch im Text zu zitierenden Stelle gezeigt hat, für den allgemeineren Reihentypus

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s},$$

wo die λ_n eine beliebige Folge positiver, monoton ins Unendliche wachsender Zahlen bedeuten, für welche die Beziehung (1) des Textes erfüllt ist.

wo die λ_n eine beliebige Folge positiver, monoton ins Unendliche wachsender Zahlen bedeuten, für welche

$$\lim_{n=\infty} \sup \frac{\log n}{\lambda_n} = a \tag{1}$$

endlich ist, und welche für jede Zahl $\delta > 0$ von einer gewissen Stelle ϱ_0 an der Beziehung

$$\lambda_{\varrho+1} - \lambda_\varrho > e^{-(a+\delta)\lambda_\varrho} \tag{2}$$

*genügen.**) *Es sei ferner für jede Zahl $\delta > 0$ von einer gewissen Stelle n_0 an*

$$|b_n| < e^{\delta \lambda_n}, \tag{3}$$

so daß die Reihe $f(s)$ infolge (1) für $\Re(s) > a$ absolut konvergiert. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ dargestellte Funktion für $\Re(s) > \eta$ regulär, wo η eine beliebige reelle Zahl $< a$ ist, und es sei für $\sigma > \eta$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)| < B|t|^k, \tag{4}$$

wo $0 \leqq k < 1$ ist. Dann konvergiert die Reihe $f(s)$ mindestens für

$$\Re(s) > \eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k} = \frac{\eta + ka}{1+k}.$$

Zum Beweise benütze ich für positive Zahlen w das Riemannsche Integral

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{f(s) e^{ws}}{s} \, ds,$$

welches schon von den Herren Phragmén**) und von Mangoldt***) in der analytischen Zahlentheorie zu strengen Schlüssen angewandt worden ist; Herr Hadamard†) hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit allgemein bewiesen, daß dieses Integral nicht nur konvergiert, wenn die Integrations-

---

*) Aus (1) folgt bekanntlich, daß die Reihe $f(s)$, wenn sie überhaupt für einen reellen Punkt $s = s_0$ konvergiert, in der Halbebene $\Re(s) > s_0 + a$ absolut konvergiert, d. h. daß die Breite des Streifens bedingter Konvergenz höchstens a betragen kann. Die Beziehung (2) muß noch hinzugefügt werden, da aus (1) nur folgt, daß sie unendlich oft, aber nicht von einer gewissen Stelle an erfüllt ist.

**) „Über die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemannschen Primzahlformel", Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar, Bd. 48, 1891, S. 721—744, besonders S. 741—744.

***) Zu Riemanns Abhandlung: „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe", Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle), Bd. 114, 1895, S. 255—305, besonders S. 274—277.

†) „Sur les séries de Dirichlet", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 25, 1. Sem. 1908, S. 326—330. „Rectification à la note ‚Sur les séries de Dirichlet'", l. c., S. 395—396.

gerade $\Re(s)=c$ dem absoluten, sondern auch, wenn sie dem bedingten Konvergenzbereich der Dirichletschen Reihe $f(s)$ angehört, für welche ebenfalls die Beziehung (1) vorausgesetzt wird. Ich gelange nun dadurch zum Ziel, daß ich Integrale der Form

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{f(s)e^{vs}}{s}\,ds$$

untersuche, auch wenn die Gerade $\Re(s)=c$ nicht dem bedingten Konvergenzbereich der Reihe $f(s)$, sondern nur dem Definitionsgebiet der analytischen Funktion $f(s)$ angehört. Allerdings werde ich für den vorliegenden Zweck nicht den Grenzübergang zu $T=\infty$ auszuführen haben.

§ 2.

Hilfssatz 1: *Es ist für jede Zahl $T>0$ und zwei Zahlen $c>0$, $v>0$*

$$\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\,ds\right| < \frac{2e^{-vc}}{vT}, \qquad \left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s}\,ds - 2\pi i\right| < \frac{2e^{vc}}{vT}.$$

Um die erste Formel zu beweisen, wenden wir den Cauchyschen Satz auf das Rechteck mit den Ecken $c \pm Ti$, $A \pm Ti$ an, wo A eine sehr große positive Zahl ist; in diesem Rechteck ist der Integrand $\frac{e^{-vs}}{s}$ regulär, und wir erhalten:

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\,ds = \int_{c-Ti}^{A-Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\,ds + \int_{A-Ti}^{A+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\,ds + \int_{A+Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\,ds.$$

Gehen wir zur Grenze $A=\infty$ über, so verschwindet das an zweiter Stelle rechts stehende Integral, weil dann der Integrand gleichmäßig beliebig klein wird, während der Integrationsweg die konstante Länge $2T$ behält; die beiden anderen Integrale nähern sich ebenfalls bestimmten Grenzwerten. Es ergibt sich also:

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\,ds = \int_{c-Ti}^{\infty-Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\,ds + \int_{\infty+Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\,ds = e^{-vc}\int_0^\infty \frac{e^{-v(\sigma-Ti)}}{c+\sigma-Ti}\,d\sigma - e^{-vc}\int_0^\infty \frac{e^{-v(\sigma+Ti)}}{c+\sigma+Ti}\,d\sigma$$

$$= 2iJ\left(e^{-vc}\int_0^\infty \frac{e^{-v(\sigma-Ti)}}{c+\sigma-Ti}\,d\sigma\right),$$

wo $J(a+ib)$ den imaginären Teil b der komplexen Zahl $a+ib$ bedeutet. Also ist:

$$\left|\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\,ds\right| < \frac{2e^{-vc}}{T}\int\limits_0^\infty e^{-v\sigma}\,d\sigma = \frac{2e^{-vc}}{vT},$$

womit die erste Formel der Behauptung bewiesen ist.

Um die zweite Formel zu beweisen, wenden wir den Cauchyschen Satz auf das Rechteck mit den Ecken $c \pm Ti$, $-A \pm Ti$ an, wo wieder A eine sehr große positive Zahl ist; dann hat der Integrand $\frac{e^{vs}}{s}$ in diesem Rechteck die einzige außerwesentliche Singularität $s = 0$, und wir erhalten:

$$\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s}\,ds = \int\limits_{c-Ti}^{-A-Ti} \frac{e^{vs}}{s}\,ds + \int\limits_{-A-Ti}^{-A+Ti} \frac{e^{vs}}{s}\,ds + \int\limits_{-A+Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s}\,ds + 2\pi i.$$

Aus demselben Grunde wie oben verschwindet auch hier das auf der rechten Seite in der Mitte stehende Integral beim Grenzübergang $A = \infty$, und wir erhalten:

$$\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s}\,ds = -\int\limits_0^\infty \frac{e^{v(c-\sigma-Ti)}}{c-\sigma-Ti}\,d\sigma + \int\limits_0^\infty \frac{e^{v(c-\sigma+Ti)}}{c-\sigma+Ti}\,d\sigma + 2\pi i,$$

$$\left|\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s}\,ds - 2\pi i\right| < \frac{2e^{vc}}{T}\int\limits_0^\infty e^{-v\sigma}\,d\sigma = \frac{2e^{vc}}{vT},$$

womit auch die zweite Formel des Hilfssatzes 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2: *Bezeichnet w_n den Mittelpunkt jedes Intervalles λ_n bis λ_{n+1}, so daß also $w_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}$ ist, so ist zu jeder Zahl $\delta > 0$ stets eine Konstante B_1 anzugeben, so daß für alle diese $w = w_n$ die Beziehung*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-(\alpha+\delta)\lambda_\nu}}{|w - \lambda_\nu|} < B_1$$

*besteht.**)

Beweis: Ist n hinlänglich groß, so sind stets zwei Zahlen ϱ und τ vorhanden, so daß

$$\lambda_{\varrho-1} < \lambda_n - 1 \leqq \lambda_\varrho, \qquad \lambda_\tau \leqq \lambda_{n+1} + 1 < \lambda_{\tau+1}$$

ist. Dann ist für $w = w_n$ sowie alle $\nu = 1, 2, \cdots, \varrho - 1$ die Differenz

$$w - \lambda_\nu > \lambda_n - \lambda_\nu > 1,$$

*) Eine ähnliche Formel ist für $\lambda_n = \log n$ zu ganz anderem Zwecke schon von Herrn Landau aufgestellt worden, l. c., S. 283, 286.

und ebenso für alle $\nu = \tau + 1, \tau + 2, \cdots$ bis ins Unendliche die Differenz

$$\lambda_\nu - w > \lambda_\nu - \lambda_{n+1} > 1.$$

Es ist ferner für alle ν der Beziehung $\nu_0 \leqq \nu \leqq n$, wo ν_0 nur von δ abhängt, infolge (2)

$$\begin{aligned} w - \lambda_\nu &= (w - \lambda_n) + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) + \cdots + (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \\ &> \frac{1}{2} e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_n} + e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_{n-1}} + \cdots + e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_\nu} \\ &> \frac{n-\nu+1}{2} e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_n}, \end{aligned}$$

und andererseits für $n < \nu \leqq \tau$

$$\begin{aligned} \lambda_\nu - w &= (\lambda_\gamma - \lambda_{\nu-1}) + (\lambda_{\nu-1} - \lambda_{\nu-2}) + \cdots + (\lambda_{n+1} - w) \\ &> e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_{\nu-1}} + e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_{\nu-2}} + \cdots + \frac{1}{2} e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_n} \\ &> \frac{\nu-n}{2} e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_\tau}. \end{aligned}$$

Endlich konvergiert infolge (1) die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-(a+\delta)\lambda_\nu} = B_2.$$

Man erhält daher für hinlänglich großes n unter Berücksichtigung von (1)

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{|w - \lambda_\nu|} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\varrho-1} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{w - \lambda_\nu} + \sum_{\nu=\varrho}^{n} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{w - \lambda_\nu} + \sum_{\nu=n+1}^{\tau} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{\lambda_\nu - w} + \sum_{\nu=\tau+1}^{\infty} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{\lambda_\nu - w} \\ &< \sum_{\nu=1}^{\varrho-1} e^{-(a+\delta)\lambda_\nu} + e^{-(a+\delta)\lambda_\varrho} \cdot e^{+\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_n} \cdot 2 \cdot \sum_{\nu=\varrho}^{n} \frac{1}{n-\nu+1} \\ &\qquad + e^{-(a+\delta)\lambda_{n+1}} e^{+\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_\tau} \cdot 2 \cdot \sum_{\nu=n+1}^{\tau} \frac{1}{\nu - n} + \sum_{\nu=\tau+1}^{\infty} e^{-(a+\delta)\lambda_\nu} \\ &< B_2 + 3 e^{-\frac{3\delta}{4}\lambda_\varrho + \left(a+\frac{\delta}{4}\right)(\lambda_n - \lambda_\varrho)} \log n + 3 e^{-\frac{3\delta}{4}\lambda_{n+1} + \left(a+\frac{\delta}{4}\right)(\lambda_\tau - \lambda_{n+1})} \log \tau \\ &< B_2 + 3 e^{-\frac{3\delta}{4}\lambda_\varrho + \left(a+\frac{\delta}{4}\right)} (a+1)\lambda_n + 3 e^{-\frac{3\delta}{4}\lambda_{n+1} + \left(a+\frac{\delta}{4}\right)} (a+1)\lambda_\tau \\ &< B_2 + 4(a+1) e^{-\frac{\delta}{2}\lambda_\varrho} \lambda_\varrho + 4(a+1) e^{-\frac{\delta}{2}\lambda_{n+1}} \lambda_{n+1} \\ &< B_2 + 1 \leqq B_1. \end{aligned}$$

Wird B_1, welches ebenso wie alle folgenden Konstanten $B_2, B_3, \cdots$ nur von δ abhängt, hinlänglich groß gewählt, so gilt dieses Resultat nicht nur für alle n von einer gewissen, von δ abhängigen Stelle an, sondern für alle $n = 1, 2, \cdots$.

Zusatz: Es sei $a' < a$ und es sei p der größte Index, für welchen $\lambda_p \leqq \beta w$ ist, wo β irgend eine Zahl > 0 bezeichnet. Dann ergibt sich unter Benutzung der vorangestellten Rechnung:

$$\sum_{\nu=1}^{p} \frac{e^{-(a'+\delta)\lambda_\nu}}{|w-\lambda_\nu|} = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{|w-\lambda_\nu|} e^{(a-a')\lambda_\nu} < e^{(a-a')\lambda_p} \sum_{\nu=1}^{p} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{|w-\lambda_\nu|}$$

$$< e^{(a-a')\lambda_p} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{|w-\lambda_\nu|} < B_1 e^{(a-a')\lambda_p} \leqq B_1 e^{w\beta(a-a')}.$$

Von nun an wird die Beziehung (2) nicht mehr gebraucht werden.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes: Es sei zur Abkürzung

$$a_1 = \eta + k(a-\eta) + 3\delta, \quad b = (1-k)(a-\eta) - \delta, \quad c = k(a-\eta) + \delta$$

gesetzt, wo $\delta > 0$ ist und δ so gewählt wird, daß $f(a_1)$ nicht verschwindet und b positiv ist, und es sei für eine beliebig große Zahl n, bzw. für das nach dem Hilfssatze 2 zugehörige w, die Zahl $T = e^{w(a-\eta)}$ gesetzt. Wir wenden nun den Cauchyschen Satz auf den Integranden

$$f(a_1+s)\frac{e^{ws}}{s}$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $b \pm Ti, -c \pm Ti$ an, in welchem nach Voraussetzung der Integrand regulär ist bis auf die außerwesentliche Singularität im Punkte $s = 0$. Dann ergibt sich, wenn nacheinander

$$s = \sigma - Ti, \quad s = -c + ti, \quad s = \sigma + Ti$$

gesetzt wird:

$$J_0 = \int_{b-Ti}^{b+Ti} f(a_1+s)\frac{e^{ws}}{s}\,ds$$

$$= \int_{b-Ti}^{-c-Ti} f(a_1+s)\frac{e^{ws}}{s}\,ds + \int_{-c-Ti}^{-c+Ti} f(a_1+s)\frac{e^{ws}}{s}\,ds + \int_{-c+Ti}^{b+Ti} f(a_1+s)\frac{e^{ws}}{s}\,ds + 2\pi i f(a_1)$$

$$(5) \quad = -\int_{-c}^{b} f(a_1+\sigma-Ti)\frac{e^{w(\sigma-Ti)}}{\sigma-Ti}\,d\sigma + i\int_{-T}^{+T} f(\eta+2\delta+ti)\frac{e^{w(-c+ti)}}{-c+ti}\,dt$$

$$+ \int_{-c}^{b} f(a_1+\sigma+Ti)\frac{e^{w(\sigma+Ti)}}{\sigma+Ti}\,d\sigma + 2\pi i f(a_1)$$

$$= -J_1 + iJ_2 + J_3 + 2\pi i f(a_1).$$

Wir schätzen zunächst die rechts stehenden Integrale ab. Infolge (4) ergibt sich:

$$|J_1| = \left| \int\limits_{-c}^{b} f(a_1+\sigma - Ti) \frac{e^{w(\sigma - Ti)}}{\sigma - Ti} d\sigma \right| < (b+c) B \frac{e^{wb} T^k}{T}$$

$$= B_3 \frac{e^{w[(1-k)(a-\eta)-\delta]} e^{wk(a-\eta)}}{e^{w(a-\eta)}} = B_3 e^{-\delta w},$$

$$|J_2| = \left| \int\limits_{-T}^{+T} f(\eta + 2\delta + ti) \frac{e^{w(-c+ti)}}{-c+ti} dt \right| < 2 B e^{-wc} \int\limits_{1}^{T} \frac{t^k}{t} dt + B_4 e^{-wc}$$

$$< B_5 e^{-wc} T^k = B_5 e^{-w[k(a-\eta)+\delta]} e^{wk(a-\eta)} = B_5 e^{-\delta w}.$$

Das Integral J_3 unterscheidet sich für reelle Koeffizienten b_n von J_1 nur durch das Vorzeichen des imaginären Teiles und genügt auch bei komplexen Werten der Koeffizienten derselben Abschätzung. In dem in Gleichung (5) links stehenden Integrale J_0 dürfen wir für $f(a_1+s)$ die Reihenentwicklung einsetzen, da ja unsere Reihe $f(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = a + 2\delta$ (absolut) konvergiert, und dürfen weiter gliedweise integrieren, da sie auf dieser Geraden sogar gleichmäßig konvergiert. Wir erhalten:

$$J_0 = \int\limits_{b-Ti}^{b+Ti} f(a_1+s) \frac{e^{ws}}{s} ds = \int\limits_{b-Ti}^{b+Ti} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{-\lambda_\nu(a_1+s)} \right\} \frac{e^{ws}}{s} ds \tag{6}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{-\lambda_\nu a_1} \int\limits_{b-Ti}^{b+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_\nu)s}}{s} ds.$$

Wir wenden nun den Hilfssatz 1 an, indem wir für $\nu = 1, 2, \cdots n$ den Exponenten $w - \lambda_\nu = v$, für $\nu = n+1, n+2, \cdots$ den Exponenten $w - \lambda_\nu = -v$ annehmen, so daß immer $v > 0$ ist, und erhalten:

$$\left| J_0 - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu a_1} \right| < \frac{2}{T} \sum_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu| e^{-\lambda_\nu a_1} \cdot \frac{e^{(w-\lambda_\nu)b}}{|w-\lambda_\nu|} = \frac{2 e^{wb}}{T} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|b_\nu| e^{-\lambda_\nu(a+2\delta)}}{|w-\lambda_\nu|}.$$

Wenden wir weiter die Beziehung (3) und den Hilfssatz 2 an, so ergibt sich:

$$\left| J_0 - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu a_1} \right| < B_6 \frac{e^{wb}}{T} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_\nu(a+\delta)}}{|w-\lambda_\nu|} < B_7 \frac{e^{wb}}{T} \tag{7}$$

$$= B_7 \cdot \frac{e^{w[(1-k)(a-\eta)-\delta]}}{e^{w(a-\eta)}} = B_7 e^{-w[k(a-\eta)+\delta]}.$$

Setzt man alle Abschätzungen in Gleichung (5) ein, so folgt:

$$(8)\quad \left|2\pi i\left(f(a_1)-\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu a_1}\right)\right| < 2B_3 e^{-\delta w} + B_5 e^{-\delta w} + B_7 e^{-w[k(a-\eta)+\delta]}$$
$$< B_8 e^{-\delta w},$$

wo B_8 eine absolute, nur von δ, aber nicht von n oder w abhängige Konstante ist. Hieraus aber ergibt sich die Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $s = a_1 = \eta + k(a-\eta) + 3\delta$, und, da δ beliebig klein sein konnte, in der ganzen Halbebene $\Re(s) > \eta + k(a-\eta)$. Ist nämlich bei festem δ eine beliebig kleine Zahl δ' gegeben, so bestimmen wir w_0 so groß, daß $\frac{B_8}{2\pi} e^{-\delta w_0} < \delta'$ ist; dann ist für alle $n \geqq n_0$

$$\left|f(a_1) - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu a_1}\right| < \delta',$$

wo n_0 durch dasjenige Intervall λ_{n_0} bis λ_{n_0+1} bestimmt wird, in dessen Mitte w_0 gelegen ist. Also konvergiert $f(s)$ für $s = a_1$.

Zweiter Teil des Beweises: Es soll nunmehr im Falle $0 < k < 1$ bewiesen werden, daß die Reihe $f(s)$ nicht nur für $\Re(s) > \eta + k(a-\eta)$, sondern sogar für $\Re(s) > \eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k}$ konvergiert, und zwar unter Benutzung des gefundenen Resultates. Dazu nehmen wir allgemein an, daß die Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > d$ bewiesen sei, wo d eine beliebige, aber bestimmte Zahl ist, welche den Beziehungen

$$\eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k} < d < a$$

genügt, und setzen

$$a' = a(1-k) + kd, \quad a_1' = \eta + k(a-\eta) - k^2(a-d).$$

Dann ist für alle diese d:

$$\eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k} < a_1' < d < a' < a;$$

hierbei vertritt a' im folgenden die Rolle, welche die Größe a in dem vorangestellten Beweise spielte, und a_1' ist dasjenige Argument, von dem ab wir die Konvergenz der Reihe $f(s)$ beweisen wollen. Dazu wenden wir den Cauchyschen Satz auf den Integranden

$$f(a_1' + 2\delta + s)\,\frac{e^{ws}}{s}$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $b' \pm Ti$, $-c' \pm Ti$ an, wo

$$b' = a' - a_1' - \delta, \quad c' = a_1' - \eta + \delta, \quad T = e^{w(a'-\eta)}$$

ist; da bei hinreichend kleinem δ die Zahl $b' > 0$ ist, und da wir der Bequemlichkeit halber $f(a_1' + 2\delta)$ verschieden von Null annehmen dürfen, so ist in diesem Rechteck der Integrand regulär bis auf die außerwesentliche Singularität im Punkte $s = 0$. Wir erhalten genau wie oben die (5) entsprechende Formel:

$$(5') \qquad J_0' = -J_1' + iJ_2' + J_3' + 2\pi i\, f(a_1' + 2\delta),$$

wo die Integrale J' wie die Integrale J definiert sind, nur daß an Stelle der Größen $a_1, b, c, \eta + 2\delta$ die Größen $a_1' + 2\delta, b', c', \eta + \delta$ zu setzen sind.

Es ergeben sich daher ganz analoge Abschätzungen:

$$|J_1'| < (b' + c')\, B\, \frac{e^{wb'}\, T^k}{T} = B_3'\, e^{w(a' - a_1' - \delta - (a' - \eta)(1 - k))} = B_3' e^{-\delta w},$$

$$|J_2'| < B_5'\, e^{-wc'}\, T^k = B_5'\, e^{w(-a_1' + \eta - \delta + k(a' - \eta))} = B_5' e^{-\delta w};$$

J_3' erfüllt dieselbe Ungleichung wie J_1'. Da ferner die Reihe $f(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = a' + \delta$ konvergiert und, wie aus der Konvergenz von $f(s)$ für $s = a'$ folgt, für jedes endliche Stück der Geraden $\Re(s) = a' + \delta$ sogar gleichmäßig konvergiert, so darf sie auf dieser Geraden gliedweise integriert werden; wir erhalten für J_0' die Formel (6), in welcher nur anstatt a_1 der Wert $a_1' + 2\delta$ und anstatt b der Wert b' zu schreiben ist. Auf die rechte Seite dieser Formel wenden wir nun wie oben den Hilfssatz 1, die Beziehung (3) und den Zusatz zu Hilfssatz 2 an, die beiden letzteren für $\delta' = \frac{\delta}{2}$; die in dem Zusatz zu Hilfssatz 2 auftretende Zahl p, welche als der größte Index definiert ist, für welchen $\lambda_p \leqq \beta w$ ist, sei durch die Gleichung

$$\beta = \frac{k(a' - \eta)}{a - a'} = \frac{(1 - k)(a' - \eta)}{a' - d}$$

bestimmt, wo übrigens infolge unserer numerischen Annahmen $\beta > 1$ ist. Dann ergibt sich die (7) entsprechende Gleichung:

$$\left| J_0' - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu (a_1' + 2\delta)} \right|$$

$$(7') \qquad < B_6'\, \frac{e^{wb'}}{T} \sum_{\nu=1}^{p} \frac{e^{-\lambda_\nu \left(a' + \frac{\delta}{2}\right)}}{|w - \lambda_\nu|} + \left| \sum_{\nu=p+1}^{\infty} b_\nu \int_{b'-Ti}^{b'+Ti} e^{-\lambda_\nu (a_1' + 2\delta + s)}\, \frac{e^{ws}}{s}\, ds \right|$$

$$< B_7'\, \frac{e^{wb'}}{T}\, e^{w\beta(a - a')} + |S_p| = B_7'\, \frac{e^{wb'}}{T}\, T^k + |S_p| = B_7' e^{-\delta w} + |S_p|.$$

Aus (5′) und (7′) in Verbindung mit den Abschätzungen der Integrale J_1', J_2', J_3' folgt analog zu (8):

$$(8') \qquad \left| 2\pi i \left(f(a_1' + 2\delta) - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\, e^{-\lambda_\nu (a_1' + 2\delta)} \right) \right| < (2B_3' + B_5' + B_7') e^{-\delta w} + |S_p|$$

$$= B_8' e^{-\delta w} + |S_p|.$$

Um nun S_p abzuschätzen, wenden wir analog wie im Hilfssatze 1 den Cauchyschen Satz auf den Integranden

$$e^{-\lambda_\nu(a_1'+2\delta+s)}\frac{e^{ws}}{s}$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $b'\pm Ti$, $A\pm Ti$ an, in welchem der Integrand regulär ist. Wir dürfen dann wie in Hilfssatz 1 zur Grenze $A=\infty$ übergehen, da für $\nu\geqq p+1$ die Differenz $\lambda_\nu-w>0$ ist, und erhalten:

$$\int\limits_{b'-Ti}^{b'+Ti} e^{-\lambda_\nu(a_1'+2\delta+s)}\frac{e^{ws}}{s}\,ds$$

$$=\int\limits_{b'-Ti}^{+\infty-Ti} e^{-\lambda_\nu(a_1'+2\delta+s)}\frac{e^{ws}}{s}\,ds+\int\limits_{+\infty+Ti}^{b'+Ti} e^{-\lambda_\nu(a_1'+2\delta+s)}\frac{e^{ws}}{s}\,ds$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_\nu(a_1'+2\delta+b'+\sigma-Ti)}\frac{e^{w(b'+\sigma-Ti)}}{b'+\sigma-Ti}\,d\sigma-\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_\nu(a_1'+2\delta+b'+\sigma+Ti)}\frac{e^{w(b'+\sigma+Ti)}}{b'+\sigma+Ti}\,d\sigma$$

$$=c_\nu-c_\nu',$$

wo sich c_ν und c_ν' nur um das Vorzeichen des imaginären Teiles unterscheiden.

Setzen wir ferner in den Integralausdruck, den wir mit c_ν bezeichnet haben, im Exponenten

$$a_1'+2\delta+b'=a'+\delta=(d+\delta)+(a'-d)$$

ein und bezeichnen mit s_ν die Summe der Glieder $b_\varrho e^{-\lambda_\varrho(d+\delta)}$ vom Gliede $\varrho=p+1$ bis zum Gliede $\varrho=\nu$, so ergibt sich:

$$\sum_{\nu=p+1}^{q} b_\nu c_\nu = e^{w(b'-Ti)}\sum_{\nu=p+1}^{q} b_\nu e^{-\lambda_\nu(d+\delta)}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda_\nu(a'-d+\sigma-Ti)}}{b'+\sigma-Ti}\,e^{w\sigma}\,d\sigma$$

$$=e^{w(b'-Ti)}\sum_{\nu=p+1}^{q} s_\nu\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda_\nu(a'-d+\sigma-Ti)}-e^{-\lambda_{\nu+1}(a'-d+\sigma-Ti)}}{b'+\sigma-Ti}\,e^{w\sigma}\,d\sigma$$

$$+\,e^{w(b'-Ti)}s_q\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda_{q+1}(a'-d+\sigma-Ti)}}{b'+\sigma-Ti}\,e^{w\sigma}\,d\sigma$$

$$=e^{w(b'-Ti)}\sum_{\nu=p+1}^{q} s_\nu\int\limits_0^\infty \frac{a'-d+\sigma-Ti}{b'+\sigma-Ti}\,e^{w\sigma}\int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-z(a'-d+\sigma-Ti)}\,dz\,d\sigma$$

$$+\,e^{w(b'-Ti)}s_q e^{-\lambda_{q+1}(a'-d-Ti)}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(\lambda_{q+1}-w)\sigma}}{b'+\sigma-Ti}\,d\sigma.$$

Nun sind einerseits infolge der Konvergenz von $f(s)$ für $s = d + \delta$ alle Summen s_ν absolut genommen <1, wenn nur w und also auch p hinlänglich groß ist. Andererseits ist das im zweiten Summanden rechts auftretende Integral absolut genommen $< \frac{1}{\lambda_{q+1} - w}$, so daß, da auch $a' - d > 0$ ist, der zweite Summand rechts für $q = \infty$ den Grenzwert Null hat. Es ergibt sich, da im ersten Summanden rechts die Integrationen vertauscht werden können, für hinreichend kleines δ sowie für hinreichend großes w:

$$\sum_{\nu=p+1}^{\infty} b_\nu c_\nu = e^{w(b'-Ti)} \sum_{\nu=p+1}^{\infty} s_\nu \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-z(a'-d-Ti)} \int_0^{\infty} e^{-(z-w)\sigma} \frac{a'-d+\sigma-Ti}{b'+\sigma-Ti}\, d\sigma\, dz,$$

$$\left|\sum_{\nu=p+1}^{\infty} b_\nu c_\nu\right| < e^{wb'} \sum_{\nu=p+1}^{\infty} \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-z(a'-d)} \int_0^{\infty} e^{-(z-w)\sigma}\, d\sigma\, dz = e^{wb'} \int_{\lambda_{p+1}}^{\infty} \frac{e^{-z(a'-d)}}{z-w}\, dz$$

$$< e^{wb'} \int_{\lambda_{p+1}}^{\infty} e^{-z(a'-d)}\, dz = \frac{1}{a'-d}\, e^{wb'} e^{-\lambda_{p+1}(a'-d)}$$

$$< B_9 e^{wb' - w\beta(a'-d)} = B_9 e^{w(a'-a_1'-\delta-(1-k)(a'-\eta))} = B_9 e^{-\delta w}.$$

Es folgt daher schließlich aus (8′)

$$\left|2\pi i\left(f(a_1'+2\delta) - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu(a_1'+2\delta)}\right)\right| < B_8' e^{-\delta w} + \left|\sum_{\nu=p+1}^{\infty} b_\nu (c_\nu - c_\nu')\right|$$

$$< (B_8' + 2B_9) e^{-\delta w} = B_{10} e^{-\delta w},$$

woraus sich wie oben die Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $s = a_1' + 2\delta$, also in der ganzen Halbebene $\Re(s) > a_1'$ ergibt.

Wir haben also bewiesen, daß aus der Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > d$, wo

$$(9) \qquad \eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k} < d < a$$

ist, unter unseren Voraussetzungen die Konvergenz dieser Reihe sogar für

$$(10) \qquad \Re(s) > \eta + k(a-\eta) - k^2(a-d)$$

folgt. Nach dem ersten Teil unseres Beweises dürfen wir in (10) den Wert $d = d_0 = \eta + k(a-\eta)$ einsetzen und erhalten die Konvergenz von $f(s)$ für

$$\Re(s) > \eta + k(a-\eta)\,(1-k+k^2) = d_1.$$

Hieraus aber folgt weiter, wenn in (10) der Wert $d = d_1$ eingesetzt wird, daß die Reihe für

$$\Re(s) > \eta + k(a-\eta)\,(1-k+k^2-k^3+k^4) = d_2$$

konvergiert. Es sei die Konvergenz von $f(s)$ schon für

$$\Re(s) > \eta + k(a-\eta)(1-k+k^2-\cdots-k^{2\nu-1}+k^{2\nu}) = d_\nu$$

bewiesen; setzen wir den Wert von d_ν, der ebenfalls noch innerhalb der durch (9) bezeichneten Grenzen liegt, in (10) ein, so ergibt sich die Konvergenz von $f(s)$ für

$$\Re(s) > \eta + k(a-\eta)(1-k+k^2-\cdots-k^{2\nu+1}+k^{2\nu+2}).$$

Wenden wir unser Verfahren unendlich oft an, so ergibt sich, daß die Reihe $f(s)$ für

$$\Re(s) > \eta + k(a-\eta)\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu k^\nu = \eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k}$$

konvergiert, was bewiesen werden sollte.

In der Einleitung wurde die Bemerkung gemacht, daß dieses Resultat das Äußerste ist, was unsere Methode liefert. In der Tat haben wir nach der bis auf gewisse Grenzen willkürlichen Annahme einer Zahl d, von der ab die Konvergenz der Reihe $f(s)$ vorausgesetzt wird, zunächst über den numerischen Wert von a_1' freie Verfügung; a_1' bedeutet diejenige Zahl $< d$, von der ab die Konvergenz der Reihe bewiesen werden soll. Ferner darf das Rechteck, auf dessen Rand das Argument $\bar{s} = a_1' + 2\delta + s$ bei der Integration liegt, passend angenommen werden. Dabei muß zunächst die linke vertikale Seite, die nach der getroffenen Festsetzung auch wirklich von der Geraden $\Re(\bar{s}) = \eta + \delta$ gebildet wird, möglichst nahe an η angenommen werden, da dann das Integral J_2' eine möglichst kleine Größenordnung hat, während die Wahl dieser Seite für alle übrigen Abschätzungen irrelevant ist. Die Wahl der rechten vertikalen Seite $\Re(\bar{s}) = a' + \delta$ dagegen, welche für alle Abschätzungen außer der von J_2' von Bedeutung ist, ist die zweite in unserer Verfügung stehende numerische Annahme, die Wahl von T, welche für alle Abschätzungen außer der von S_p von Bedeutung ist, die dritte. Damit ist das Integrationsrechteck völlig bestimmt; wir dürfen nunmehr noch über β verfügen, welches für die Abschätzung des ersten Teiles von J_0' sowie für die Abschätzung von S_p von Bedeutung ist. Es stehen also vier numerische Annahmen frei, durch die erreicht werden muß, daß vier ganz verschieden gebaute Ausdrücke, J_1', J_2', der erste Teil von J_0' sowie S_p, die Größenordnung $e^{-\delta w}$ haben; dadurch werden die vier Konstanten a_1', a', T und β völlig bestimmt. Wir würden also durch andere Wahl der Konstanten immer nur ein weniger genaues Resultat erhalten.

Berlin, den 21. Juli 1908.

Über die Grundlagen der Mechanik.

Von

G. Hamel in Brünn.

Über die Grundlagen der Mechanik ist in den letzten Jahren oft geschrieben worden. Man hat sehr viel Geistreiches, viel kritisch Wertvolles, allerdings auch manch Oberflächliches über allgemeine Begriffe, wie Kraft, Masse, Ursache, Atome, mechanische Weltanschauung usw., gesagt, Begriffe, die das Glück oder Unglück hatten, durch die ihnen vorerst noch anhaftende metaphysische Unklarheit und eine gewisse Popularität den kritischen Blick auf sich zu lenken. Aber der ernsthafte Versuch, die Mechanik einmal wirklich strenge aufzubauen, ist nur sehr selten gemacht worden; die Lehrbücher sind trotz eines schwachen Abglanzes jener kritischen Richtung in dieser Hinsicht meist recht konventionell geblieben, und die Autoren, die einen energischen Vorstoß machten, wie Hertz und Boltzmann, gerieten wohl aus Furcht vor den Unklarheiten der klassischen Mechanik auf Darstellungsweisen, die in ihrer allerdings sehr bestimmten und durchsichtigen, aber doch sehr einseitigen und willkürlichen Fassung erst recht metaphysisch anmuten und gerade die praktisch brauchbare Mechanik nur sehr spät und mühsam einzuordnen gestatten, sofern dies überhaupt restlos gelingt, was noch keineswegs ausgemachte Sache ist.

Was wir jetzt vor allem brauchen, ist eine strenge Begründung der *klassischen Mechanik*. Der vorliegende Aufsatz soll einen Versuch in dieser Richtung darstellen.

Man kann in den bisherigen Darstellungen drei Wege unterscheiden:

Die bekannteste und in den Lehrbüchern beliebteste Art der Darstellung arbeitet mit dem *Massenpunkt* als Grundelement und baut daraus mit verhältnismäßig einfachen Mitteln etwas zusammen, das dann Mechanik genannt wird. Historisch und psychologisch bilden die Quellen dieser Richtung einmal das n-Körperproblem der Astronomen, dann die uralte Atomistik. Aber ganz abgesehen von all den erkenntnistheoretischen Ein-

wänden, die von vielen Philosophen bis auf Mach und Stallo gegen die Atomistik gemacht worden sind, ist zu bedenken, daß erstens heute die Physik der nichtstarren Medien die Atomtheorie fast ganz verlassen hat und mit der Kontinuitätshypothese arbeitet, daß aber vor allem zweitens die Vorstellung, die sich die in Rede stehende Darstellungsweise z. B. von einem starren Körper macht, mit der wirklichen, heute noch in der Chemie üblichen Atomistik gar nichts mehr zu schaffen hat. Man wird ruhig behaupten dürfen, daß die *Punktmechanik* etwas ad hoc Zurechtgemachtes ist, das man schleunigst fallen läßt, sobald man etwa Schwerpunkt- und Flächensatz gewonnen hat, um sich dann der Mechanik der Kontinua zuzuwenden. Man umgeht dann die Schwierigkeit mit dem einen inhaltsreichen und doch nur selten ausgesprochenen Axiom*), daß man die Sätze, die man durch jene Punktmechanik erschlichen hat, nun auch auf Kontinua anwenden darf.

Ich verzichte deshalb im folgenden gänzlich auf die Punktmechanik; was man praktisch unter Punktmechanik versteht, ist nichts anderes als der Schwerpunktsatz.

Die *zweite Art* des Aufbaues benutzt den starren Körper als Grundelement. Mit dem Axiom der Verschiebbarkeit der Kraft in der Angriffslinie gewinnt man zunächst die Statik des starren Körpers, zur Kinetik führt dann das d'Alembertsche Prinzip. Eine andere Begründung der Mechanik von Systemen starrer Körper liefert das Prinzip der virtuellen Arbeiten. Die Mechanik allgemeinerer Systeme kann dann hinterher durch eine naheliegende Verallgemeinerung auf Systeme unendlich vieler, unendlich kleiner starrer Körper (Volumelemente) gewonnen werden.

Wenn man nun auch zugeben muß, daß der starre Körper eine außerordentlich starke Abstraktion darstellt, so ist dieser Begriff doch für die praktische Mechanik so wertvoll, daß er als unentbehrlich bezeichnet werden kann. Mit dem Aufbau der Mechanik von Systemen starrer Körper beschäftigt sich das Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit.

Der am wenigsten begangene, und doch eigentlich am nächsten liegende Weg ist der, die Mechanik von der Betrachtung des *Volumelementes* aus aufzubauen. Denn so allein kommt man zu einer allgemeinen Mechanik, die nachher sowohl bei Zugrundelegung der Kontinuitätshypothese, als auch bei atomistischen Vorstellungen, für starre Körper wie für feste oder flüssige in gleicher Weise anwendbar ist. Sehr nahe steht dieser Richtung das Buch von Jaumann**), das aber in seinen Tendenzen doch wesentlich von der folgenden Darstellung im ersten Kapitel unterschieden

*) Ich erinnere mich, daß F. Klein in seinen Vorlesungen auf die Notwendigkeit dieses Axioms hinwies.

**) G. Jaumann, Die Grundlagen der Bewegungslehre, Leipzig 1905.

ist. Abgesehen von einer Andeutung Boltzmanns*) dürfte unser Weg neu sein. Es sei mir gestattet, die Hauptsachen hier kurz anzudeuten.

Aus der wohl allein möglichen Fassung der beiden ersten Newtonschen Grundgesetze mit Einschluß des Kräfteparallelogramms (Axiom Vc) folgt bereits das dritte Newtonsche Gesetz, das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung für die inneren Spannungen; dagegen genügt sie trotzdem nicht zum vollen Aufbau der Mechanik, d. h. zur Gewinnung des Flächensatzes, man braucht dazu noch Axiom VII, das im wesentlichen die Symmetrie der Spannungsdyade ausspricht. Die Unabhängigkeit dieses Axioms hatte schon Boltzmann*) erkannt, die Methoden ein Beispiel einer Mechanik zu konstruieren, die Axiom VII und daher auch den Momentensatz in der allgemeinen Form nicht kennt, enthalten die Ideen W. Thomsons.**)

Diese allgemeine Grundlegung der Mechanik ist nicht in sich abgeschlossen, die Mechanik ist — bei dieser Auffassung — ein Zweig der Physik, der erst mit den anderen zusammen ein Ganzes bildet.***) Sie enthält eben die Aussagen über Bewegung und Kräfte, die einen für alle Systeme gemeinsamen Charakter tragen, das einzelne System wird dann durch die Eigenschaften der Spannungsdyade charakterisiert. Hier sprechen als Ursachen alle physikalischen und chemischen Vorgänge mit, daher kann auch an einen Beweis der Widerspruchslosigkeit hier nicht eher gedacht werden, als bis Physik und Chemie abgeschlossene, einer aprioristischen Untersuchung fähige Disziplinen geworden sind. Für einzelne Systeme wird im Kapitel 1, § 4 eine Charakterisierung gegeben werden, besonders sei auf ein wohl neues Objekt der Mechanik hingewiesen, ein System, das als Bewegungen die zehngliedrige Gruppe der konformen Transformationen gestattet.

Dagegen gelingt der Beweis der Widerspruchslosigkeit†) für die im Kapitel 2 behandelten starren Systeme, wenigstens bei gewisser Beschränkung des Kraftfeldes, bis auf zwei Punkte, die auch wirklich einen Widerspruch für die Mechanik starrer Körper darstellen, nämlich die Möglichkeit eines Zusammenstoßes verschiedener starrer Körper und die Möglichkeit

*) L. Boltzmann, Popul. wiss. Schriften. Die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik S. 298.

**) W. Thomson, Papers III. Art. C und C II.

***) Damit soll nicht gesagt sein, daß nicht die Mechanik bei anderer Auffassungsweise ein Ganzes für sich bilden kann. Das trifft z. B. sicherlich für die Mechanik der Systeme starrer Körper zu. (Siehe Kap. 2.) Auf jeden Fall aber stellt die Mechanik eine scharf umgrenzte Form dar, die auszufüllen, eine Aufgabe der Physik ist.

†) Hier haben A. Mayer und E. Zermelo schon wesentlich vorgearbeitet (siehe Schluß der Arbeit).

unendlicher Reaktionskräfte. Diese in der Mechanik starrer Körper behandeln zu wollen, scheint mir nicht recht sachgemäß.

Noch über wenige Punkte möchte ich hier in der Einleitung einiges bemerken.

In vielen, selbst sonst guten Lehrbüchern herrscht eine beständige Verwechslung der *drei Kraftgruppen:* 1. Innere und äußere Kräfte. 2. Volum- und Flächenkräfte — ein Unterschied, den die Punktmechanik gar nicht fassen kann. 3. Eingeprägte und Reaktionskräfte.

Für die allgemeine Mechanik kommen nur die beiden ersten Einteilungen in Frage, da Reaktionskräfte überhaupt nur bei idealisierten Systemen, wie starren Körpern existieren. Insbesondere stehen sich zwei Gruppen scharf gegenüber: die inneren Spannungen auf der einen Seite, die Volumkräfte und die äußeren Flächenkräfte auf der andern Seite. Der eigentliche Sinn von Schwerpunkts- und Momentensatz beruht darin, daß in ihnen die erste Kategorie nicht vorkommt.

Die Mechanik starrer Körper arbeitet dagegen fast ausschließlich mit dem Unterschiede von eingeprägten Kräften und Reaktionskräften.

Die drei Einteilungen fallen aber keineswegs zusammen, sie überkreuzen sich.

Eine zweite Bemerkung gelte dem *Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.* Dieses umfaßt in Wahrheit zwei ganz verschiedene Prinzipien, die durcheinandergemengt zu haben ein Verdienst der Punktmechanik ist.

Soweit es sich um die Gleichheit von Druck und Gegendruck handelt, gehört das Prinzip zu den allerprimitivsten Erfahrungen und ist, wie schon bemerkt, eine logische Folgerung der beiden ersten Newtonschen Axiome, wenn man sie in wohl allein möglicher Weise auf Volumelemente überträgt. Soweit es sich dagegen um Fernkräfte (Volumkräfte) handelt, stellt es eine weit über jede Erfahrung hinausgehende Verallgemeinerung dar, die ja nach einigen neueren Theorien über Elektronen nicht einmal richtig zu sein scheint. Für die Mechanik von prinzipieller Bedeutung ist nur der erste Teil, der zweite dagegen fast gleichgültig; ob daher die Elektroniker recht haben oder nicht, berührt die Grundlagen der Mechanik nicht im geringsten. Jedenfalls geht es also nicht, das Prinzip in seiner allgemeinen metaphysischen Form der Mechanik zugrunde zu legen und darauf eine *Massendefinition* zu stützen, wie es Mach und andere tun. Auch sonst ist der für diese Definition benutzte Apparat viel zu groß: ein einziges Kraftgesetz, z. B. das Gesetz der Schwere, genügt in Verbindung mit unseren weiteren Prinzipien der allgemeinen Mechanik zu einer Bestimmung wenigstens jeder irdischen Masse (Wage).

Da das Prinzip der Gegenwirkung in der für die Mechanik starrer

Körper wesentlichen Form aus dem Erstarrungsprinzip (Kap. 2, Axiom VIII) folgt, so brauche ich es im folgenden gar nicht als Axiom.

Endlich eine dritte Bemerkung über das *D'Alembertsche Prinzip.* Es ist der Irrtum weit verbreitet, als sei dieses beweisbar. Das ist jedoch keineswegs der Fall, das Prinzip ist vollkommen unabhängig; die Beweisversuche D'Alemberts, Sturms, Voß' (s. Encykl, IV, 1 S. 77) usw. enthalten noch das stillschweigende, mit dem D'Alembertschen Prinzip gleichwertige Axiom: „Wirken auf ein System solche eingeprägte Kräfte $d\bar{k}$, daß die für jeden Punkt nach der Gleichung

$$dm\,\bar{w} = d\bar{k}$$

bestimmte Bewegung möglich ist, so tritt diese Bewegung auch wirklich ein." Dieses Axiom ist gewiß sehr einleuchtend, aber nicht logisch selbstverständlich.

Erkenntnistheoretische Erörterungen habe ich im folgenden grundsätzlich ausgeschlossen*), ich wollte vor allem einmal eine nüchterne Darstellung der notwendigen Axiome geben, ihrer Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit, soweit mir dies möglich war.

Hier nur noch folgende wenige Worte zu dieser Sache:

Ich habe die Begriffe *Kraft* und *Masse* wieder in ihre alten Rechte eingesetzt. Wir haben diese *Dinge* unzweifelhaft nötig, ohne sie gibt es keine Mechanik. Kraft ist mehr als Masse mal Beschleunigung, was schon daraus erhellt, daß die Grundgleichung stets lautet: Masse mal Beschleunigung ist gleich der *Summe* der Kräfte. Warum also nicht die guten alten *Worte* brauchen? Die Begriffe selbst sind nicht unklar, nur die Bücher drückten sich über sie oft recht metaphysisch und dunkel aus. Und was verschlägt es, wenn die Brauchbarkeit der Begriffe merkwürdig ist — vielleicht ein wenig rätselhaft? wenn die Grundgesetze der Mechanik tiefer sind als mancher es bequem findet, und sich nicht mit ein paar eleganten Worten, wie Konvention und Ökonomie des Denkens, Abstraktion und Idealisierung abtun lassen?

Und dann noch ein Wort über den *absoluten Raum* und die *absolute Zeit.* Ich brauche — und behaupte daher — ihre *logische* Existenz, gebe aber den Empiristen und Relativisten darin recht, daß man sie empirisch wohl nie wird feststellen können. Ohne sie verliert aber die Mechanik als logische Wissenschaft jede Bedeutung. Jeder Streit ist hier müßig: hätten die dogmatischen Relativisten bedacht, daß das Wort „es gibt" mindestens vier Bedeutungen zuläßt, eine logische, eine empirische, eine metaphysische und eine anschauliche (ästhetische im Sinne Kants), so

*) Ich hoffe an anderer Stelle, in einem geplanten Lehrbuche der elementaren Mechanik, darüber einiges sagen zu können.

hätte man **Newton** und **Euler** sehr viel besser verstanden. Ich behaupte also nur die *logische* Existenz des absoluten Raumes und der absoluten Zeit.

Ich hoffe, man wird meine Worte nicht falsch auffassen. Wenn die vorhergehenden Zeilen erkennen lassen, daß ich nicht in allem die Meinungen **Kirchhoffs**, **Machs** und **Poincarés** teile, so wird doch niemand zweifeln, daß ich der aufklärenden Wirkung der Schriften dieser bedeutenden Autoren eine fundamentale Bedeutung beimesse. Ich glaube nur, daß von ihnen noch nicht das Letzte und Tiefste in der Mechanik gesagt worden ist, wir müssen über ihre Kritik hinaus und zusehen, was an dem Alten gut, schön und notwendig ist.

Kapitel 1.

Mechanik der Volumelemente.

§ 1.

Aufstellung der notwendigen Axiome.

Vorbemerkung. Um eine Vereinfachung der Darstellung zu erzielen, werden im folgenden alle Größen stillschweigend als regulär, d. h. als eindeutig, endlich, stetig und hinreichend oft stetig differenzierbar vorausgesetzt.

Ob sich die Anschauung durchgehender Stetigkeit wirklich aufrecht erhalten läßt, wie viele Physiker glauben, soll hier nicht erörtert werden; es ist nicht schwer, die Axiome so zu verbessern, daß gewissen, vielleicht als möglich zuzulassenden Unstetigkeiten Rechnung getragen wird.

Aus demselben Grunde sehe ich auch von dem Vorhandensein flächenhaft verteilter äußerer, aber im Innern des Systems angreifender Kräfte ab. Ich darf das um so eher, als diese sich stets als Volumkräfte über dünne Schichten auffassen lassen. Ich bemerke aber, daß ihre Berücksichtigung durchaus keine Schwierigkeiten bieten würde.

Gruppe I. Ort und Zeit.

a) Es gibt eine reelle, stetig variable Größe t, die absolute *Zeit.*

b) Es gibt einen bestimmten (Euklidischen) absolut *ruhenden Raum.*

In diesem legen wir einen jeden Punkt X durch einen Vektor $\bar{x}$ fest, der von einem festen Punkt O nach X hingezogen ist.

Wir werden auch von *bewegten Räumen* sprechen können, indem wir X in bezug auf ein bewegtes rechtwinkliges Koordinatensystem festlegen, d. h. ein Koordinatensystem, dessen Transformationsparameter gegenüber einem im ruhenden Raum festen System Funktionen der Zeit sind, die nicht sämtlich konstante Werte haben.

Gruppe II. Das materielle System.

Erklärung 1. Ein materielles System besteht aus einer endlichen Anzahl stetig zusammenhängender, sich nirgends überdeckender Bereiche mit regulärer Begrenzung, d. h. mit stetiger Tangentialebene und bestimmter endlicher Krümmung. Jeder Punkt des Systems sei charakterisiert durch einen von t unabhängigen Vektor $\bar{a}$ in bezug auf irgend einen Raum.

a) Jedem Teile des Systems kommt eine bestimmte, von der Zeit unabhängige Zahl zu, seine *Masse*.

b) Haben zwei Teile des Systems die Massen m_1 und m_2, so haben beide Teile zusammen die Masse $m_1 + m_2$.

c) Greifen wir um einen Punkt A unbegrenzt kleiner werdende Volumina ΔV mit den Massen Δm heraus, so existiert überall der Grenzwert

$$\lim_{\Delta V = 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \mu_0,$$

die *spezifische Masse* an der Stelle A.

Aus unseren Axiomen folgt

$$m = \int \mu_0 \, d V$$

wo das Integral über das ganze System zu erstrecken ist.

d) μ_0 verschwindet nirgends, weder im Innern noch auf dem Rande des Systems.

Gruppe III. Über die Bewegung.

Erklärung 2. Wird jedem Punkte A des Systems zu der Zeit t eine Stelle X zugeordnet, so daß $\bar{x}$ eine eindeutige reguläre Funktion von $\bar{a}$ und t ist, so sagen wir, das System *bewege* sich. Ist die Funktion von t unabhängig, so sagen wir, das System bleibe in Ruhe. Ist $\bar{x}_1 = f(\bar{a}, t_1)$ und $\bar{x}_2 = f(\bar{a}, t_2)$, wo $t_2 > t_1$, so sagen wir, das System habe sich in der Zeit $t_2 - t_1$ von der Stelle $\bar{x}_1$ zur Stelle $\bar{x}_2$ bewegt. Die Lage $\bar{x} = \bar{a}$, die aber für keinen Wert von t eingenommen zu werden braucht, heiße die *Urlage* oder *Grundstellung*. $\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt}$ heißt die augenblickliche *Geschwindigkeit* des Punktes A, $\bar{w} = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$ die *Beschleunigung*.

a) Die Funktionaldeterminante $D\left(\frac{\bar{x}}{\bar{a}}\right)$ soll niemals verschwinden.

Daraus folgt der Satz von der *Undurchdringlichkeit der Materie:*

„In dem gesamten, von den Punkten des Systems zur Zeit t eingenommenen Bereiche ist $\bar{a}$ eine eindeutige Funktion von t und $\bar{x}$."

Weiter folgt aus unseren Axiomen: Auch während der Bewegung existiert der Grenzwert:

$$\mu = \lim \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

wenn ΔV den augenblicklich von der Masse Δm eingenommenen Raum bedeutet. Denn es ist

$$\mu = \mu_0 \, D\left(\frac{\bar{a}}{\bar{x}}\right),$$

also ist auch μ dauernd eine reguläre und von Null verschiedene Funktion des Ortes und der Zeit.

Gruppe IV. Die Kraft.

Es gibt Vektoren, wir nennen sie *spezifische Kräfte*, die den Punkten eines materiellen Systems zugeordnet sein können: wir sagen auch, sie greifen an diesen Punkten an.

a) Kräfte können stetig über Raumteile oder über Flächenteile erstreckt sein. Im ersten Falle sprechen wir von *räumlich verteilten Kräften* ($\bar{\varkappa}$, Volumkräften), und nennen $d\bar{k} = \bar{\varkappa} dV$ eine unendlich kleine Kraft, die an dem Volumelement dV angreift, im zweiten Falle sprechen wir von *flächenhaft verteilten Kräften* ($\bar{\sigma}$, Drucken im weiteren Sinne) und sagen ebenfalls $d\bar{k} = \bar{\sigma} dF$ greife an dem Flächenelement dF an. Dabei kann jeder Seite dF eine Kraft zugeordnet sein: wir sagen auch, daß die beiden $\bar{\sigma} dF$ an je einem von zwei durch dF getrennten Volumelementen angreifen.

b) Die Kräfte sind durch irgendwelche Zustände oder Vorgänge an unserem materiellen System selbst oder an anderen materiellen Systemen, vielleicht auch an nichtmateriellen Systemen gegeben. Die Gesamtheit dieser Daten oder Merkmale einer Kraft nennen wir auch ihre *Ursache*.

c) *Die Ursachen* sind solche Funktionen der Zeit, mögen sie nun bekannt sein oder nicht, daß die räumlich verteilten Kräfte als stetige und stetig differenzierbare Funktionen von $\bar{a}$ und t, die flächenhaft verteilten Kräfte als ebensolche Funktionen von $\bar{a}$, t und $\bar{\nu}$ aufgefaßt werden können, wo $\bar{\nu}$ den auf dF senkrechten Einheitsvektor bedeutet, der von dem betreffenden Volumelement weggerichtet ist. (An einem Flächenelement werden im allgemeinen zwei verschiedene Drucke angreifen, der eine gehört zu $\bar{\nu}$, der andere zu $-\bar{\nu}$.)

Gruppe V. Über innere und äußere Kräfte.

a) Es gibt Kräfte, deren Ursachen ausschließlich in den Zuständen oder Vorgängen des Systems selbst zu suchen sind, solche Kräfte heißen *innere Kräfte*. Alle andern Kräfte sollen *äußere Kräfte* heißen.

b) Äußere Kräfte sind entweder räumlich verteilte Kräfte oder sie greifen an der Oberfläche des Systems an (siehe die Vorbemerkung).

c) Es bezeichne ΔV das Volumen, das augenblicklich die Masse Δm einnimmt, welche den bestimmten Punkt A enthält. Dann ist für diesen Punkt A

$$\text{(A)} \qquad \mu \bar{w} = \lim_{\Delta V = 0} \frac{1}{\Delta V} \mathsf{S} \sum \overline{dk}$$

(erstes und zweites Newtonsches Gesetz nebst Kräfteparallelogramm), wobei die $\overline{dk}$ nur die für ΔV *äußeren*, augenblicklich an ΔV angreifenden Kräfte bedeuten, und unter S, wie stets im folgenden, die Summation (Integration) über alle Punkte eines Systems verstanden ist, während $\sum$ die Summation der $\overline{dk}$ bedeutet, die an einem Punkte angreifen und verschiedene Ursachen haben. Dieses $\sum$ kann noch einmal eine Integration bedeuten.

Gruppe VI. Über die inneren Spannungen.

a) Zwei Volumelemente eines Systems, die sich längs des Flächenelementes dF berühren, können an dieser Stelle Kräfte $\bar{\sigma} dF$ aufeinander ausüben, deren einzige Ursachen in ihnen selbst liegen. Diese Kräfte heißen die *inneren Spannungen* des Systems.

Erklärung 3. Die Normalkomponente der inneren Spannung wird *Druck im engeren Sinne* genannt, wenn sie auf das Volumelement zugerichtet ist, auf das sie wirkt, sonst *Zug*. Die Tangentialkomponenten heißen *Schub-* oder *Scheerkräfte*.

b) Außer den inneren Spannungen sind alle anderen inneren Kräfte räumlich verteilte Kräfte. An der Oberfläche angreifende Kräfte können aber stets als innere Spannungen eines erweiterten Systems angesehen werden.

Gruppe VII. Das Axiom von Boltzmann.

Für jedes Volumelement verschwindet in der Grenze das Moment aller äußeren Kräfte, nachdem man es durch ΔV dividiert hat, bezogen auf den Punkt X im Inneren des Volumelementes, gegen den dieses konvergiert. Das heißt: es sei $\bar{z}$ der Vektor von dem bestimmt gewählten Punkt X nach den verschiedenen anderen Punkten des Volumelementes ΔV, so ist

$$\text{(B)} \qquad \lim_{\Delta V = 0} \frac{1}{\Delta V} \mathsf{S} \sum \overline{\overline{z dk}} = 0,$$

wo die $\overline{dk}$ die äußeren Kräfte bedeuten.

(Ich schreibe das äußere Produkt der Vektoren $\bar{z}$ und $\overline{dk}$ so: $\overline{\overline{z dk}}$, das innere $\bar{z} \cdot \overline{dk}$.)

§ 2.

Folgerungen aus Axiomgruppe I bis VI.

Betrachten wir ein Volumelement ΔV, so läßt sich Satz (A) nach VI, b) so aussprechen:

$$\mu \bar{w} = \lim \frac{1}{\Delta V} \left\{ \mathrm{S} \sum \bar{z}_a \, dV + \mathrm{S}\, \bar{\sigma}_\nu \, dF \right\},$$

wo $\bar{z}_a$ die äußeren räumlich verteilten Kräfte bedeuten, $\bar{\sigma}_\nu$ die an der Oberfläche des Elementes angreifenden, inneren Spannungen, die für das Element selbst natürlich äußere Kräfte sind. $\bar{\nu}$ bedeutet den Einheitsvektor der äußeren Normalen des Volumelementes. Daraus folgt, wenn zunächst angenommen wird, daß

$$\lim_{\Delta V = 0} \sum \bar{z}_a$$

existiert und endlich ist*),

$$\mu \bar{w} - \sum \bar{z}_a = \lim \frac{1}{\Delta V} \mathrm{S}\, \bar{\sigma}_\nu \, dF.$$

Da die linke Seite einen bestimmten endlichen Wert hat, so muß dasselbe für die rechte Seite gelten.

Wir betrachten nun zunächst ein Parallelepiped, dessen einer Eckpunkt die Koordinaten x_0, y_0, z_0 hat, während $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ die Kantenlängen sind. Dann muß der Grenzwert existieren

$$\lim_{\Delta x = 0} \lim_{\Delta y = 0} \lim_{\Delta z = 0} \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} \left\{ \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \bar{\sigma}_{-x}(x_0, y, z)\, dy\, dz \right.$$
$$\left. + \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \bar{\sigma}_x(x_0 + \Delta x, y, z)\, dy\, dz + \cdots + \cdots \right\},$$

wo die Punkte zwei analoge Gliederpaare bedeuten. Dabei sind die Grenzübergänge unabhängig voneinander zu vollziehen.

Lasse ich nun zuerst Δx Null werden, während $\Delta y, \Delta z$ fest bleiben, so wird aus vorstehendem

$$\lim_{\Delta y = 0} \lim_{\Delta z = 0} \lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{\Delta y \, \Delta z} \int\!\!\int \frac{\bar{\sigma}_{-x}(x_0, y, z) + \bar{\sigma}_x(x_0 + \Delta x, y, z)}{\Delta x}\, dy\, dz$$

plus Gliedern, die jedenfalls nicht unendlich werden, solange $\Delta y, \Delta z$ nicht Null werden.

Das erste Glied ist aber nach dem ersten Mittelwertsatze der Integralrechnung

$$\lim_{\Delta y = 0} \lim_{\Delta z = 0} \lim_{\Delta x = 0} \frac{\bar{\sigma}_{-x}(x_0, y', z') + \bar{\sigma}_x(x_0 + \Delta x, y', z')}{\Delta x}$$

*) Von dieser Annahme werden wir uns später befreien, d. h. wir werden zeigen, daß sie beweisbar ist.

wo y', z' gewisse Mittelwerte zwischen y und $y+\Delta y$, bzw. z und $z+\Delta z$ bedeuten. Damit nun der vorstehende Ausdruck beim Grenzübergang endlich bleibt, muß

$$\bar{\sigma}_{-x}(x_0, y', z') + \bar{\sigma}_x(x_0, y', z') = 0$$

sein; da dies für alle x_0, y_0, z_0, Δy, Δz gilt — in dem zu Anfang erwähnten Bereiche —, so folgt

$$\bar{\sigma}_{-x} = -\bar{\sigma}_x,$$

und da die Annahme der x-Achse willkürlich war,

(C) $$\bar{\sigma}_\nu = -\bar{\sigma}_{-\nu}.$$

*Es ist also für die inneren Spannungen das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung eine logische Folgerung der Axiome I bis VI.**)

Ziehen wir einige weitere Folgerungen.

Zunächst erkennt man jetzt leicht, daß

$$\lim \frac{1}{\Delta V}\int \bar{\sigma}_\nu\, dF = \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}$$

ist, daß also aus (A) wird

(A′) $$\mu \bar{w} = \sum \bar{\varkappa}_a + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}.$$

Dabei sind also die $\bar{\sigma}$, die ja reguläre Funktionen von $\bar{a}$ und t sind, als reguläre Funktionen von $\bar{x}$ und t aufzufassen, was nach dem Axiom III möglich ist.

Integrieren wir nun Gleichung (A′) über ein beliebiges Volumen ΔV, so folgt aus dem Gaußschen Satze

$$\int \mu \bar{w}\, dV = \mathfrak{S}\sum \bar{\varkappa}_a\, dV + \int \{\bar{\sigma}_x \cos(\nu, x) + \bar{\sigma}_y \cos(\nu, y) + \bar{\sigma}_z \cos(\nu, z)\}\, dF.$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit (A), indem wir zur Grenze $\Delta V = 0$ übergehen, so folgt

$$\lim_{\Delta V=0}\int \bar{\sigma}_\nu\, dF = \lim_{\Delta V=0}\int \{\bar{\sigma}_x \cos(\nu, x) + \bar{\sigma}_y \cos(\nu, y) + \bar{\sigma}_z \cos(\nu, z)\}\, dF.$$

Ich behaupte, daß sich daraus

(D) $$\bar{\sigma}_\nu = \bar{\sigma}_x \cos(\nu, x) + \bar{\sigma}_y \cos(\nu, y) + \bar{\sigma}_z \cos(\nu, z)$$

ergibt.

Beweis: Zunächst einmal stimmt die Behauptung für die Ebenen, die zu den Achsen senkrecht stehen. Angenommen, die Gleichung wäre nicht richtig für irgend eine Stelle auf irgend einem regulären Flächen-

*) Der vorstehende Beweis findet sich bereits wesentlich bei Voigt, Kompendium der Physik, Bd. I.

stück, es sei vielmehr an dieser Stelle $\bar{\sigma}_\nu$ von der rechten Seite von (D) um einen Betrag $\bar{\delta}$ verschieden. Dann nehme man als Volumen ΔV ein solches, das begrenzt wird von einem Stück ΔF der fraglichen Fläche in der Umgebung jener Stelle, sonst aber nur von Flächen, die den Koordinatenebenen parallel sind. Solche ΔV gibt es stets für beliebig kleine ΔF.

Da aber $\bar{\delta}$ auf den zu den Achsen senkrechten Flächenstücken verschwindet, so folgt

$$\lim_{\Delta F = 0} \int \bar{\delta}\, dF = 0,$$

d. h.

$$\bar{\delta} = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Weiteres kann offenbar aus (A) allein nicht über die $\bar{\sigma}$ geschlossen werden. Denn wählt man die $\bar{\sigma}$ den Bedingungen (C) und (D), sowie den Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen entsprechend, so folgt aus (A′) sofort

$$(\mathrm{A}'') \qquad \int \mu \bar{w}\, dV = \mathfrak{S} \sum \bar{x}_a\, dV + \mathfrak{S}\, \bar{\sigma}_\nu\, dF,$$

woraus sich wieder (A) ergibt.

Aus diesen Überlegungen folgt auch, daß Gleichung (A′) vom Koordinatensystem unabhängig ist.

Definiert man einen Punkt X^* durch

$$m\bar{x}^* = \mathfrak{S}\, dm\, \bar{x},$$

und nennt diesen Punkt den *Massenmittelpunkt* oder *Schwerpunkt* des Systems, bezeichnet man ferner seine Beschleunigung mit w^*, so folgt aus (A):

$$m\bar{w}^* = \mathfrak{S} \sum \bar{x}_a\, dV + \mathfrak{S}\, \bar{\sigma}_\nu\, dF,$$

der sogenannte *Schwerpunktsatz:* „Die Massenbeschleunigung des Schwerpunktes ist gleich der Summe der räumlich verteilten Kräfte vermehrt um die Summe der an der Oberfläche verteilten Spannungen.“

Macht man noch die vielleicht immer, jedenfalls meist, zutreffende Annahme, daß diejenigen Kräfte $\bar{k}_a dV$, die durch die Summation zu inneren Kräften werden, das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung erfüllen (Newton, lex tertia) d. h., daß sie sich für jeden Punkt in solche Kräfte zerlegen lassen, deren Ursachen außer in dem Punkte selbst nur noch in je *einem* anderen Punkte vorhanden sind, daß an diesem aber ebenfalls eine Kraft angreift, deren Ursache wieder lediglich das Punktepaar ist, und daß endlich, wenn $d\bar{k}_{1,2}$ und $d\bar{k}_{2,1}$ die beiden dem Punktepaare zugehörigen Kräfte sind,

$$d\bar{k}_{1,2} + d\bar{k}_{2,1} = 0$$

ist, so kann man offenbar in dem obigen Satze die inneren Kräfte noch weglassen. *Darin aber liegt nicht die Hauptaussage des Schwerpunktsatzes, daß man nur die äußeren Kräfte zu betrachten braucht, um $m\bar{w}^*$ bestimmen zu können, sondern darin, daß man dazu der inneren Spannungen nicht bedarf, daß diese vielmehr in dem Ausdruck des Schwerpunktsatzes nicht vorkommen.* Denn der Begriff: Summe aller inneren Spannungen hat an sich keinen Sinn, da es unzählbar viele Flächen im Inneren eines Körpers gibt. Wohingegen sich die Summe aller räumlich verteilten Kräfte immer ohne Schwierigkeiten bilden läßt.

Wir müssen uns jetzt noch *von der Voraussetzung frei machen, daß*

$$\lim_{\Delta V=0} \frac{1}{\Delta V} \mathsf{S} \sum \bar{\varkappa}_a \, dV = \lim_{\Delta V=0} \sum \bar{\varkappa}_a$$

existiert und endlich ist, indem wir beweisen, daß es so sein muß.

Wenn wir ΔV kleiner und kleiner werden lassen, so kann es zunächst sein, daß die $\bar{\varkappa}_a$ ungeändert bleiben, d. h., daß dabei keine inneren Kräfte zu äußeren werden. Dann ist die Existenz von $\lim\limits_{\Delta V=0} \sum \bar{\varkappa}_a$ selbstverständlich.

Es kann aber auch sein, daß bei Verkleinerung von ΔV stets *neue* $\bar{\varkappa}_a$ auftreten: liegt ΔV_2 ganz innerhalb ΔV_1, so werden das solche Kräfte sein müssen, deren Ursachen außer in $\Delta_2 V$ lediglich in dem Differenzgebiet $\Delta V_1 - \Delta V_2$ zu suchen sind. Denn diese Kräfte sind für ΔV_2 äußere Kräfte, für ΔV_1 innere Kräfte.

A priori ist es keineswegs klar, daß dann

$$\lim_{\Delta V=0} \frac{1}{\Delta V} \mathsf{S} \sum \bar{\varkappa}_a \, \Delta V$$

existieren muß.

Nun kann man aber jedenfalls genau wie früher schließen, daß, wenn ΔV rechteckige Parallelepipede mit den Kanten Δx, Δy, Δz sind, jedenfalls

$$\mu \bar{w} = \lim_{\Delta V=0} \left\{ \frac{1}{\Delta V} \mathsf{S} \sum \bar{\varkappa}_a \, dV + \frac{\bar{\sigma}_{-x}(x_0, y', z') + \bar{\sigma}_x(x_0, y', z')}{\Delta x} + \cdots \right\} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}$$

ist. Also muß jedenfalls der lim { } existieren; nennen wir ihn $\bar{\gamma}$. Dann ist

$$\mu \bar{w} = \bar{\gamma} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}.$$

Daraus folgt dann wieder nach dem Gaußschen Satze

$$\begin{aligned} \mathsf{S} \mu \bar{w} \, dV &= \mathsf{S} \bar{\gamma} \, dV + \mathsf{S} \{ \bar{\sigma}_x \cos(\nu, x) + \bar{\sigma}_y \cos(\nu, y) + \bar{\sigma}_z \cos(\nu, z) \} \, dF \\ &= \mathsf{S} \bar{\gamma} \, dV + \mathsf{S} \bar{\sigma}_\nu' \, dF, \end{aligned}$$

wo jetzt $\bar{\sigma}_\nu' + \bar{\sigma}'_{-\nu} = 0$ ist.

Vergleichen wir das mit der ursprünglichen Gleichung (A), so folgt für jedes Volumelement ΔV

$$\mathrm{S}\bar{\gamma}\,dV + \mathrm{S}\bar{\sigma}_\nu'\,dF = \mathrm{S}\sum \bar{x}_a\,dV + \mathrm{S}\bar{\sigma}_\nu\,dF + \bar{\varepsilon}\,\Delta V,$$

wo $\lim\limits_{\Delta V = 0} \bar{\varepsilon} = 0$ ist.

Betrachten wir jetzt zwei einander längs ΔF berührende Volumina ΔV_1 und ΔV_2, und schreiben die vorstehende Gleichung einmal für ΔV_1, dann für ΔV_2 auf und drittens für das Volumen $\Delta V_1 + \Delta V_2$, addieren die beiden ersten und subtrahieren davon die dritte, so erhalten wir links null, rechts aber heben sich erstens die Oberflächenintegrale über die äußere Oberfläche von $\Delta V_1 + \Delta V_2$ fort, zweitens alle räumlich verteilten Kräfte bis auf die Kräfte $\bar{x}_{1,2}$, die ΔV_1 von ΔV_2 empfängt, und die Kräfte $\bar{x}_{2,1}$, die ΔV_2 von ΔV_1 empfängt. Denn alle andern Kräfte sind für ΔV_1 und ΔV_2, also auch für $\Delta V_1 + \Delta V_2$ äußere Kräfte.

Also bekommen wir

$$0 = \mathrm{S}\bar{x}_{1,2}\,dV_1 + \mathrm{S}\bar{x}_{2,1}\,dV_2 + \int\limits_{\Delta F}(\bar{\sigma}_\nu + \bar{\sigma}_{-\nu})\,dF + \bar{\varepsilon}_1\Delta V_1 + \bar{\varepsilon}_2\Delta V_2 + \eta(\Delta V_1 + \Delta V_2),$$

wo die ε, η Null werden, wenn ΔV_1, ΔV_2 oder $\Delta V_1 + \Delta V_2$ gegen Null gehen.

Es gehen aber auch $S\bar{x}_{1,2}dV_1$ und $S\bar{x}_{2,1}dV_2$ gegen Null, wenn die ΔV_1 resp. ΔV_2 dies tun, denn sonst könnten diese Integrale nicht existieren. (Es ist zu beachten, daß sich jetzt bei Zusammenziehen von ΔV_1 die $\bar{x}_{1,2}$ selbst *nicht* mehr ändern.)

Nun wollen wir ΔV_1 und ΔV_2 derart gegen Null gehen lassen, daß dabei ΔF festbleibt, was offenbar möglich ist. Dann folgt

$$\int(\bar{\sigma}_\nu + \bar{\sigma}_{-\nu})\,dF = 0,$$

d. h., da ΔF eine beliebige Fläche ist,

$$\bar{\sigma}_\nu + \bar{\sigma}_{-\nu} = 0.$$

Also auch ohne jede Voraussetzung über die Existenz von

$$\lim \frac{1}{\Delta V}\,\mathrm{S}\sum \bar{x}_a\,dV$$

bleibt die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung für die inneren Spannungen bestehen. Jetzt aber folgt aus der Newtonschen Grundgleichung die Existenz von

$$\lim_{\Delta V = 0} \frac{1}{\Delta V}\,\mathrm{S}\sum \bar{x}_a\,dV.$$

Bemerkung: Unsere Axiome schließen die Existenz einer Kraft nicht aus, deren Ursache allein der Punkt ist, an dem sie angreift. Aber

eine solche Kraft käme in keiner unserer Gleichungen vor: man kann daher unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß eine solche Kraft nicht existiert.

§ 3.

Die Symmetrie der Spannungsdyade und der Flächensatz.

Das System der inneren Spannungen ist nach Gleichung (D) (Seite 360) eine *Dyade* im Sinne der Vektoranalysis. Seien die rechtwinkligen Komponenten

$$\begin{aligned} &\text{von } \bar{\sigma}_x : X_x,\ Y_x,\ Z_x, \\ &\text{von } \bar{\sigma}_y : X_y,\ Y_y,\ Z_y, \\ &\text{von } \bar{\sigma}_z : X_z,\ Y_z,\ Z_z \end{aligned}$$

so ist die Dyade durch das System dieser neun Größen gegeben.

Die Eigenschaft, symmetrisch zu sein ($X_y = Y_x$, $Z_x = X_z$, $Y_z = Z_y$) oder nicht, ist invariant gegen Drehungen des Koordinatensystems, indem, wie man aus den bekannten Transformationsformeln leicht nachweist, der symmetrische Teil

$$\begin{matrix} X_x, & \frac{1}{2}(Y_x + X_y), & \frac{1}{2}(X_z + Z_x), \\ \frac{1}{2}(Y_x + X_y), & Y_y, & \frac{1}{2}(Y_z + Z_y), \\ \frac{1}{2}(X_z + Z_x), & \frac{1}{2}(Y_z + Z_y), & Z_z \end{matrix}$$

und der antisymmetrische

$$\begin{matrix} 0, & -\frac{1}{2}(Y_x - X_y), & \frac{1}{2}(X_z - Z_x), \\ \frac{1}{2}(Y_x - X_y), & 0, & -\frac{1}{2}(Z_y - Y_z), \\ -\frac{1}{2}(X_z - Z_x), & \frac{1}{2}(Z_y - Y_z), & 0 \end{matrix}$$

sich getrennt linear transformieren, und zwar die Größen

$$\frac{1}{2}(Z_y - Y_z), \quad \frac{1}{2}(X_z - Z_x), \quad \frac{1}{2}(Y_x - X_y)$$

wie die Komponenten eines Vektors, den wir mit $\bar{D}$ bezeichnen wollen. Bilden wir nun das Moment der Massenbeschleunigungen, d. h. den Ausdruck

$$\int \mu \overline{x w}\, dV,$$

das Integral erstreckt über irgend ein materielles System, so folgt nach Gleichung (A) unter Anwendung des Gaußschen Satzes und mit Berücksichtigung von (D)

$$\int \mu \bar{x}\bar{w}\, dV = \int \sum \overline{\bar{x}\bar{\varkappa}_a}\, dV + \int \overline{\bar{x}\bar{\sigma}_\nu}\, dF - \int (\overline{\bar{\varepsilon}_x\bar{\sigma}_x} + \overline{\bar{\varepsilon}_y\bar{\sigma}_y} + \overline{\bar{\varepsilon}_z\bar{\sigma}_z})\, dV,$$

wenn $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$, $\bar{\varepsilon}_z$ die Einheitsvektoren in den drei Koordinatenrichtungen bedeuten. Denn es ist

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \bar{\varepsilon}, \cdots.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \overline{\bar{\varepsilon}_x\bar{\sigma}_x} &= -\bar{\varepsilon}_y Z_x + \bar{\varepsilon}_z Y_x, \\ \overline{\bar{\varepsilon}_y\bar{\sigma}_y} &= -\bar{\varepsilon}_z X_y + \bar{\varepsilon}_x Z_y, \\ \overline{\bar{\varepsilon}_z\bar{\sigma}_z} &= -\bar{\varepsilon}_x Y_z + \bar{\varepsilon}_y X_z. \end{aligned}$$

Die Summe dieser drei Ausdrücke aber ist:

$$\bar{\varepsilon}_x(Z_y - Y_z) + \bar{\varepsilon}_y(X_z - Z_x) + \bar{\varepsilon}_z(Y_x - X_y) = 2\bar{D}.$$

Somit lautet die Gleichung für das Moment der Massenbeschleunigung:

$$\text{(E)} \qquad \int \mu \overline{\bar{x}\bar{w}}\, dV = \int \sum \overline{\bar{x}\bar{\varkappa}_a}\, dV + \int \overline{\bar{x}\bar{\sigma}_\nu}\, dF - 2\int \bar{D}\, dV.$$

Daraus aber erkennt man, daß dann und nur dann der Flächensatz „das Moment der Massenbeschleunigungen ist gleich dem Moment der räumlich verteilten Kräfte vermehrt um das Moment der an der Oberfläche angreifenden äußeren Spannungen“ *gilt, wenn*

$$\bar{D} = 0$$

ist, wenn also die Spannungsdyade als symmetrisch vorausgesetzt wird.

Der Satz aber: „Die Dyade der inneren Spannungen ist für jedes materielle System symmetrisch“ folgt aus dem Axiom VII und umgekehrt.

Denn legen wir den Bezugspunkt in den beliebigen Punkt X hinein, was wir stets tun dürfen, und wenden (E) auf das Volumen ΔV an, so folgt beim Grenzübergange, da $\bar{x}$ unendlich klein wird,

$$2\bar{D} = \lim_{\Delta V = 0} \frac{1}{\Delta V} \int \overline{\bar{x}\bar{\sigma}_\nu}\, dF.$$

Der rechtsstehende Ausdruck verschwindet aber nach Axiom VII. Daß dieses Axiom unabhängig ist, kann leicht gezeigt werden, wenn wir die Widerspruchslosigkeit der Axiome annehmen.

Denn nennen wir den symmetrischen Teil der Spannungsdyade Λ' und bezeichnen wir den für Λ' allein gebildeten Ausdruck

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z'}{\partial z},$$

wie es üblich ist, mit $\Delta \cdot \Lambda'$, so kann man die Gleichung (A) auch so schreiben

$$\mu \bar{w} = \sum \bar{\varkappa}_a - \operatorname{rot} \bar{D} + \Delta \cdot \Lambda'.$$

Diese Gleichung ist aber genau die der gewöhnlichen Mechanik, wenn man $-\operatorname{rot}\bar{D}$ als eine neu hinzukommende Kraft auffaßt, die man willkürlich annehmen kann, nur den Axiomen der Kraft entsprechend.

Der Schwerpunktsatz also lautet:

$$\mu\bar{w}^* = \int\sum \bar{\varkappa}_a\,dV - \int \operatorname{rot}\bar{D}\,dV + \int \bar{\sigma}_\nu{}'\,dF,$$

oder nach Anwendung des Gaußschen Satzes auf das zweite Glied:

$$\mu w^* = \int\sum \bar{\varkappa}_a\,dV + \int(\bar{\sigma}_\nu{}' - \overline{\nu D})\,dF.$$

Man überzeugt sich also leicht, daß

$$\sigma_\nu{}' - \overline{\nu D} = \bar{\sigma}_\nu$$

ist, wie es natürlich sein muß. Ebenso lautet der Flächensatz:

$$\int \mu\,\overline{x w}\,dV = \int\sum \overline{x\varkappa_a}\,dV + \int \overline{x\sigma_\nu{}'}\,dF - \int \overline{x \operatorname{rot}\bar{D}}\,dV,$$

oder nach Anwendung des Gaußschen Satzes auf den letzten Teil:

$$\int \mu\,\overline{x w}\,dV = \int\sum \overline{x\varkappa_a}\,dV - \int \overline{x(\sigma_\nu - \nu D)}\,dF - 2\int \bar{D}\,dV.$$

Man erhält also wieder die alten Resultate.

Ist das Problem so gestellt, daß man sich bei einem materiellen System die räumlich verteilten Kräfte und die am Rande herrschenden Druckkräfte $\bar{\delta}$ gegeben zu denken hat, so daß $\bar{\sigma}_\nu = \bar{\delta}_\nu$ am Rande sein soll, während die Spannungsdyade nicht symmetrisch ist, so ist das Problem mathematisch mit dem anderen vollständig äquivalent, bei dem die Spannungsdyade symmetrisch ist, aber noch eine räumlich verteilte Kraft $-\operatorname{rot} D$ hinzukommt, während am Rande die Spannung

$$\bar{\sigma}_\nu{}' = \bar{\sigma}_\nu + \overline{\nu D} = \bar{\delta}_\nu + \overline{\nu D}$$

herrscht, also noch eine tangentiale Oberflächenspannung $\overline{\nu D}$ hinzukommt.

Damit ist die Frage der Unabhängigkeit des Axioms VII auf die Frage nach der Widerspruchslosigkeit der Axiome zurückgeführt.

Es sei mir erlaubt, noch in anderer Weise die Unabhängigkeit von Axiom VII darzutun, indem ich ein Beispiel ausführe, das schon W. Thomson*) gegeben hat. Es beruht auf der Idee der verborgenen Bewegung.

Wir denken uns das System zusammengesetzt aus einer Reihe zentrierter symmetrischer Kreisel, deren Mittelpunkte und Symmetrieachsen durch ein masseloses System geführt werden. Sei $\bar{\eta}$ ein Einheitsvektor, der die augenblickliche Lage der Rotationsachse angibt, ω_0 die konstante Rotation des Kreisels — eine solche ist möglich —, sei ferner C der geführte Mittelpunkt des Kreisels, $\bar{c}$ der Vektor von dem festen Punkte O

*) S. die in der Einleitung zitierten Arbeiten.

nach C hin und $\bar{z}$ der Vektor von C nach einem beliebigen Punkt X des Kreisels. Endlich sei Δm die ganze Masse eines solchen Kreisels, $\bar{\omega} = \frac{1}{2}$ rot $\bar{c}$ die augenblickliche Rotation des den Punkt C umgebenden masselosen Mediums, das auch $\bar{\eta}$ mitführt, so daß

$$\dot{\bar{\eta}} = \overline{\omega\eta}.$$

$\Delta\bar{k} = \bar{\varkappa}\, dV$ sei die resultierende Kraft, die in C angreift.*) Dann ist

$$\omega - (\bar{\eta} \cdot \bar{\omega})\,\bar{\eta} = \overline{\eta(\omega\eta)}$$

die Drehgeschwindigkeit, die von der Führung dem Kreisel zugegeben wird, also

$$\bar{\eta}\omega_0 + \overline{\eta(\omega\eta)} = \bar{\omega}'$$

die ganze Winkelgeschwindigkeit des Kreisels.

Für die Geschwindigkeit eines Kreiselpunktes ist aber

$$\bar{v} = \bar{c} + \overline{\omega z},$$

also

$$S\, dm\, \overline{xv} = \Delta m\, \overline{c\bar{c}} + \Delta C \cdot \omega_0 \bar{\eta} + \Delta A\, \overline{\eta(\omega\eta)}$$

für *einen* Kreisel (nach bekannten Sätzen über den Impuls), wo $\Delta C = \Delta m s^2$ das zur Symmetrieachse gehörige Trägheitsmoment des Kreisels bedeutet, $\Delta A = \Delta m s'^2$ das andere Hauptträgheitsmoment.

Nun wollen wir die Kreisel als sehr klein, als sozusagen unter der Schwelle der Beobachtungsmöglichkeit gelegen, annehmen. Dann sind ΔA und ΔC sehr klein und da $\overline{\eta(\omega\eta)}$ jedenfalls endlich bleibt, so wird nicht nur $\Delta A\,\overline{\eta(\omega\eta)}$ unmerklich klein, sondern auch noch die Summe über das ganze System.

Dagegen soll nun ω_0 sehr groß werden, derart, daß $\mu\omega_0 s^2 = F$ endlich bleibt $\left(\text{mit } \mu = \frac{\Delta m}{\Delta V}\right)$.

Mathematisch hindert uns nichts, den Grenzprozeß wirklich auszuführen, wenn auch die Anschaulichkeit dabei verloren geht.

Wir bekommen dann für das ganze System, da

$$S dm\, \overline{xw} \equiv \frac{d}{dt}\, S dm\, \overline{xv}$$

ist,

$$S dm\, \overline{xw} \equiv S \Delta m\, \overline{c\ddot{c}} + S\, \Delta V \cdot F \cdot \dot{\bar{\eta}}.$$

Andrerseits ist natürlich

$$S dm\, \overline{xw} = S \Delta V c \varkappa.$$

Nun wollen wir die Kreiselbewegung ω_0 als unsichtbar, als verborgen an-

*) In $\bar{\varkappa}$ steckt schon die Resultierende der inneren Spannungen des tragenden Mediums.

sehen, und dementsprechend jetzt $\bar{c}$ mit $\bar{x}$, $\bar{\bar{c}}$ mit $\bar{w}$ identifizieren, so daß wir die Gleichung erhalten

$$S\,dm\,\overline{x}\overline{w} + S\,dVF\cdot\bar{\eta} = S\,dV\overline{x}\overline{x}.$$

Diese Bewegungsgleichung ist aber ganz von der Art derjenigen, die Axiom VII nicht erfüllt, man braucht nur

$$2\bar{D} = F\cdot\bar{\eta} = F\overline{\omega\eta}$$

zu setzen.

Daß der Schwerpunktsatz ungeändert gilt, dürfte klar sein.

Es ist nicht uninteressant zu bemerken, daß die Zusatzkräfte *keine Arbeit* leisten, da $\omega\cdot\bar{D}=0$ ist, so daß der Energiesatz hier in diesem Beispiel gilt, wie in der gewöhnlichen Mechanik.*)

In wieweit können Beobachtungen lehren, ob die klassische Mechanik richtig ist oder nicht?

Wenn Beobachtungen ein $\bar{D}$ ergeben sollten, so hindert mich zunächst nichts, Axiom VII doch als erfüllt anzusehen und statt dessen eine neue unbekannte räumlich verteilte Kraft — rot $\bar{D}$ und eine ebenfalls an der Oberfläche angreifende Kraft $\overline{\nu D}$ hinzuzufügen. Und es dürfte auch sonst nicht schwer fallen, für solche Kräfte Ursachen zu finden, zumal doch für jene $\bar{D}$ auch Gesetze gesucht werden müßten. Es würde sich dann nur fragen, ob sich für die $\bar{D}$ Ursachen außerhalb des Körpers finden lassen oder nicht.

Mit Aufstellung des Schwerpunkt- und Flächensatzes sind die *allgemeinen* Grundlagen der Mechanik erledigt. Die einzelnen Systeme werden jetzt des weiteren durch die Eigenschaften ihrer Spannungsdyade charakterisiert und damit setzt die von der sonstigen Physik prinzipiell nicht mehr zu trennende *spezielle Mechanik* ein.

§ 4.

Charakterisierung der verschiedenen Systeme durch die Eigenschaften der Spannungsdyade.

In Wirklichkeit bestehen bei allen Körpern für die inneren Spannungen gewisse Naturgesetze, die ihre Abhängigkeit von den Deformationen, dem Bewegungszustande, der Temperatur und von anderen Zuständen und Eigenschaften darstellen, die unserer Terminologie entsprechend als Ursachen jener Spannungen aufzufassen sind.

Daneben hat es aber die Mechanik stets für notwendig gefunden, gewisse *idealisierte Systeme* zu betrachten, bei denen außer einigen a priori

*) Man kann also nicht, wie Voigt (Kompendium) zu glauben scheint, das Axiom VII durch das Energieprinzip begründen.

gegebenen und für das System charakteristischen Beziehungen zwischen den inneren Spannungen von vornherein keinerlei Abhängigkeit von anderen Ursachen bekannt ist, einfach deshalb, weil angenommen wird, daß jene Ursachen nicht da sind, besser gesagt nicht beobachtbar sind oder nicht beachtet werden sollen. Da als Ursachen der inneren Spannungen in erster Linie stets Bewegungsvorgänge oder Deformationen in Frage kommen, so handelt es sich um Systeme, die in ihrer Bewegungsfreiheit eingeschränkt erscheinen.

Wir wollen solche Systeme so suchen, daß wir sie den drei folgenden Prinzipien unterwerfen:

1. Es sei $\delta\bar{x}$ eine unendlich kleine mögliche Verschiebung eines Systempunktes, $d\bar{r}$ die Summe der an der Oberfläche eines Massenelementes dm angreifenden *inneren* Spannungen. Dann sei die über das System genommene Summe

$$S\,d\bar{r}\cdot\delta\bar{x}=0,$$

für alle möglichen unendlich kleinen Verschiebungen des Systems. (Prinzip der virtuellen Arbeiten. Näheres darüber im nächsten Kapitel.)

2. Der Bereich der möglichen Verschiebungen ist a priori gegeben, d. h. er hängt nicht ab von den Werten irgend welcher Kräfte.

3. Die Relation

$$S\,d\bar{r}\cdot\delta\bar{x}=0$$

kann entweder gelten für alle Werte der inneren Spannungen, oder aber es können für diese von vornherein gewisse homogene lineare Relationen bestehen, die aber invariant sein sollen gegen Drehungen des Koordinatensystems.

Wir werden zeigen, daß es nur vier Systeme gibt, die diesen Forderungen genügen:

1. Der starre Körper: $\delta\bar{x}=\delta\bar{c}+\delta\overline{\vartheta(x-c)}$ wo $\delta\bar{c}$ und $\delta\bar{\vartheta}$ beliebige von $\bar{x}$ unabhängige Größen sind; die inneren Spannungen sind hier beliebig.

2. Das System, das die zehngliedrige Gruppe aller konformen Raumtransformationen gestattet

$$\delta\bar{x}=\delta\bar{c}+\delta\overline{\vartheta(x-c)}+\delta\lambda\overline{x-c}-\delta\bar{\varrho}\,\overline{x-c}^2+2\overline{x-c}\,(\delta\bar{\varrho}\cdot\overline{x-c}),$$

wo $\delta\bar{c}$, $\delta\bar{\vartheta}$, $\delta\lambda$, $\delta\bar{\varrho}$ beliebig sind. Die inneren Spannungen sind der einzigen Relationen unterworfen: $X_x+Y_y+Z_z=0$.

3. Die ideale inkompressible Flüssigkeit; div $\delta\bar{x}=0$, die inneren Spannungen sind stets normal zu den Flächenelementen.

4. Der Punkthaufen, frei beweglich, ohne alle innere Spannungen.

Hält man an den unter 1. und 2. genannten Forderungen fest, so bedingt jedesmal die kinematische Charakterisierung die dynamische und umgekehrt.

Beweis: Bilden wir

$$S\Delta\cdot\Lambda\cdot\delta\bar{x}\,dV = S\left\{\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)u+(\cdots)+\cdots\right\}dV,$$

wo u, v, w die Komponenten von $\delta\bar{x}$ seien, so stellt dieser Ausdruck nicht nur die virtuelle Arbeit der inneren Spannungen $Sd\bar{r}\cdot\delta\bar{x}$ dar, sondern er enthält auch noch die Arbeit der Oberflächenkräfte. Diese müssen wir daher absondern. Das geschieht durch die bekannte Umformung des vorstehenden Ausdruckes nach dem Gaußschen Satze in

$$S\bar{\sigma}_\nu\cdot\delta\bar{x}\,dF - S\left\{X_x\frac{\partial u}{\partial x}+Y_y\frac{\partial v}{\partial y}+Y_z\frac{\partial w}{\partial z}+X_y\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\cdots\right\}dV.$$

$Sd\bar{r}\cdot\delta x = 0$ heißt also

$$S\left\{X_x\frac{\partial u}{\partial x}+\cdots+X_y\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\cdots\right\}dV = 0.$$

1. Nun kann zunächst *keine* Beziehung zwischen den $X, \cdots$ vorgeschrieben sein. Dann muß sein

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Aus den drei letzten Gleichungen allein schließt man leicht

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial x}=a(x,z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-b(x,y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial y}=-c(z,y),$$

wo a, b, c zunächst noch willkürliche Funktionen sind.

Die drei ersten Gleichungen ergeben dann, daß a, b, c konstant sind, so daß

$$u = az - by + u_0,$$

$$v = bx - cz + v_0,$$

$$w = cy - ax + w_0,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\delta\bar{x} = \delta\bar{c} + \delta\,\overline{\vartheta(x-c)}.$$

Diese bekannte **Euler**sche Gleichung sagt aber aus, daß der Körper *starr* ist. Die Bewegungsgleichungen desselben hatten wir bereits in dem Schwerpunkts- und Flächensatz. Natürlich können diese Sätze auch aus den neuen Prinzipien dieses Paragraphen gewonnen werden.

2. Nun kann zweitens *eine* homogene lineare Gleichung zwischen den $X, \ldots$ bestehen.

Seien σ_1, σ_2, σ_3 die drei Hauptspannungen, so kann diese Gleichung gemäß Forderung 3) nur die Form haben

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$X_x + Y_y + Z_z = 0.$$

Soll jetzt unter dieser Nebenbedingung $S d\bar{r} \cdot \delta\bar{x}$ verschwinden, so muß sein

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Man kann nun von vornherein leicht einsehen, daß die jetzt möglichen Bewegungen allein die konformen Transformationen sein können. Denn bei einer Ähnlichkeitstransformation eines Elementes leisten die inneren Spannungen keine Arbeit infolge der Beziehung $X_x + Y_y + Z_z = 0$, wohl aber bei jeder anderen Deformation.

Da man aber weiß, daß die einzigen konformen stetigen Abbildungen des Raumes durch die zehngliedrige Gruppe der Transformationen durch reziproke Radien gegeben werden, so ist das Resultat klar.

Auf rechnerischem Wege kommt man aber auch leicht zum Ziele.

Zunächst ergeben die drei letzten der oben angeschriebenen Gleichungen wieder

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} = a(x, z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -b(x, y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} = -c(z, y)$$

oder wenn wir durch einen angesetzten Index 1, 2, 3 die Integration nach x, y, z anzeigen:

$$u = a_3(z, x) - b_2(x, y) + \varphi(x),$$

$$v = b_1(x, y) - c_3(y, z) + \psi(y),$$

$$w = c_2(y, z) - a_1(z, x) + \chi(z);$$

setzt man dies in die ersten Gleichungen ein, so findet man leicht

$$a = -\varkappa z + \mu x + \alpha,$$

$$b = -\nu x + \varkappa y + \beta,$$

$$c = -\mu y + \nu z + \gamma,$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\varkappa x^2 + \lambda' x + u_0,$$

$$\psi = \frac{1}{2}\mu y^2 + \lambda' y + v_0,$$

$$\chi = \frac{1}{2}\nu z^2 + \lambda' z + w_0 .$$

Versteht man unter

$\delta\bar{c}'$ einen Vektor mit den Komponenten u_0, v_0, w_0,

$\delta\bar{\vartheta}'$ " " " " " α, β, γ,

$\delta\bar{\varrho}$ " " " " " $\frac{1}{2}\varkappa, \frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\nu$,

so erhält man für $\delta\bar{x}$

$$\delta\bar{x} = \delta\bar{c}' + \delta\bar{\vartheta}' x + \delta\lambda'\bar{x} - \delta\bar{\varrho}\bar{x}^2 + 2\bar{x}(\delta\bar{\varrho}\cdot\bar{x}).$$

Man kann diesen Ausdruck auf die bequemere Form bringen:

$$\delta\bar{x} = \delta\bar{c} + \overline{\delta\bar{\vartheta}(x-c)} + \delta\lambda(\overline{x-c}) - \delta\bar{\varrho}\,\overline{x-c}^2 + 2\overline{x-c}\,(\delta\bar{\varrho}\cdot\overline{x-c}),$$

wo $\bar{c}$ einen beliebigen, aber festen Punkt des Körpers bedeutet, $\delta\bar{c}$ dessen Verschiebung.

Das erste Glied $\delta\bar{c}$ bedeutet offenbar eine Translation, das zweite eine Rotation, das dritte eine Ähnlichkeitstransformation. Ich will zeigen, daß das erste und die beiden letzten zusammen eine zweimalige Transformation durch reziproke Radien darstellen.

$\delta\bar{\vartheta}$ und $\delta\lambda$ null gesetzt, gibt

$$\delta\bar{x} - \delta\bar{c} = -\delta\bar{\varrho}\,\overline{x-c}^2 + 2\overline{x-c}(\delta\bar{\varrho}\cdot\overline{x-c}).$$

Bildet man das innere Produkt mit $\overline{x-c}$, so folgt

$$\overline{x-c}\cdot\delta(\overline{x-c}) = \overline{x-c}^2\,(\delta\bar{\varrho}\cdot\overline{x-c}).$$

Setzt man den so zu berechnenden Wert für $\delta\bar{\varrho}\cdot\overline{x-c}$ in den Ausdruck

$$\overline{x-c}(\delta\bar{\varrho}\cdot\overline{x-c})$$

ein, und faßt ihn mit der linken Seite zusammen, so erhält man

$$\frac{1}{\overline{x-c}^2}\,\overline{[x-c]\,[(\delta x-\delta c)\,(x-c)]} = \overline{(x-c)\,(\delta\varrho\,[x-c])},$$

woraus folgt

$$\frac{\delta\bar{x}-\delta\bar{c}}{\overline{x-c}^2} = \delta\bar{\varrho}$$

$$\bar{\varrho} = -\frac{\overline{x-c}}{\overline{x-c}^2} + \frac{\overline{a-c}}{\overline{a-c}^2}.$$

$\frac{\overline{a-c}}{\overline{a-c}^2}$ bedeutet eine Integrationskonstante.

Löst man nach $\overline{x-c}$ auf, so erhält man

$$\overline{x-c} = \frac{\frac{\overline{a-c}}{\overline{a-c}^2} - \bar{\varrho}}{\left(\frac{\overline{a-c}}{\overline{a-c}^2} - \bar{\varrho}\right)^2}.$$

Diese Transformation bedeutet aber: der Punkt $\bar{a}$ wird erst durch die

reziproke Transformation mit $\bar{c}$ als Mittelpunkt in $\frac{\overline{a-c}}{\overline{a-c}^2}$ übergeführt; dann durch nochmalige reziproke Transformation mit dem durch $\bar{\varrho}$ gegebenen Mittelpunkt in $\overline{x-c}$.

$\bar{\varrho}=0$ bedeutet die identische Transformation.

3. Drittens können *zwei* Gleichungen zwischen den Hauptspannungen $\bar{\sigma}$ bestehen, die dann wegen Voraussetzung 3. die Form haben müssen

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=-p.$$

Es folgt dann

$$X_x=Y_y=Z_z=-p,$$
$$X_y=Y_z=Z_x=0,$$

und $S\,d\bar{r}\cdot\delta\bar{x}=0$ verlangt also

$$\mathrm{S}\,p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dV=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\qquad=0.$$

Das ist aber das kinematische Charakteristikum der inkompressiblen Flüssigkeit.

4. Endlich können *drei* Gleichungen bestehen, die dann notwendig ergeben

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0,$$

oder alle inneren Spannnngen sind null. Die $\delta\bar{x}$ sind dann ganz beliebig; wir haben den Punkthaufen vor uns.

Ich will nun noch für den zweiten Fall — die anderen sind bekannt genug — die Bewegungsgleichungen aufstellen, die von den inneren Spannungen frei sind.

Es möge $d\bar{k}$ die äußeren auf das Massenelement dm wirkenden Kräfte bezeichnen, so daß

$$dm\,\bar{w}=d\bar{k}+d\bar{r}.$$

Dann folgt aus $S\,d\bar{r}\cdot\delta\bar{x}=0$:

$$S\,dm\,\bar{w}\cdot\delta\bar{x}=S\,d\bar{k}\cdot\delta\bar{x},$$

für alle möglichen Verschiebungen $\delta\bar{x}$.

Setzt man darin den Ausdruck

$$\delta\bar{x}=\delta\bar{c}+\delta\bar{\vartheta}(\overline{x-c})+\delta\lambda\,\overline{x-c}-\delta\bar{\varrho}\,\overline{x-c}^2+2\overline{x-c}(\delta\bar{\varrho}\cdot\overline{x-c})$$

ein und bedenkt, daß die Relation in eine Identität für die $\delta\bar{c}$, $\delta\bar{\vartheta}$, $\delta\lambda$, $\delta\bar{\varrho}$ übergehen muß, so erhält man die zehn Gleichungen:

den Schwerpunktsatz

$$S\,dm\,\bar{w}=S\,d\bar{k},$$

den Flächensatz

$$S\,dm\,\overline{(x-c)\,w} = S\,\overline{(x-c)\,dk},$$

dann drittens

$$S\,dm\,\overline{x-c}\cdot\bar{w} = S\,\overline{x-c}\cdot d\bar{k}$$

und endlich

$$S\,dm[-\bar{w}\,\overline{x-c}^2 + 2\overline{x-c}\,(\overline{x-c}\cdot\bar{w})] = S[-d\bar{k}\,\overline{x-c}^2 + 2\overline{x-c}\,(\overline{x-c}\cdot d\bar{k})].$$

Dabei ist

$$\bar{v} = \dot{\bar{c}} + \overline{\omega\,(x-c)} + \dot{\lambda}\,\overline{x-c} - \bar{\sigma}\,\overline{x-c}^2 + 2\overline{x-c}\,(\bar{\sigma}\cdot\overline{x-c}),$$

wobei $\bar{\omega}$, $\bar{\sigma}$ zwei vektorielle Geschwindigkeitsparameter bedeuten, die aber keine Ableitungen von ortsbestimmenden Vektoren darstellen; vielmehr lauten die Übergangsgleichungen*), wie man leicht ausrechnen kann,

$$d\delta\bar{c} - \delta d\bar{c} = 0,$$

$$d\delta\lambda - \delta d\lambda = 0,$$

$$d\delta\bar{\vartheta} - \delta d\bar{\vartheta} = \overline{d\vartheta\,\delta\vartheta},$$

$$d\delta\bar{\varrho} - \delta d\bar{\varrho} = \delta v\,d\bar{\varrho} - \delta v\,\delta\bar{\varrho} + \overline{d\vartheta\,\delta\varrho} - \overline{\delta\vartheta\,d\varrho},$$

wo

$$d\bar{\varrho} = \bar{\sigma}\,dt, \quad d\bar{\vartheta} = \bar{\omega}\,dt$$

gesetzt ist.

Man könnte die Bewegungsgleichungen auch explizit**) aufstellen, doch würde uns das hier zu weit führen. Die oben gegebenen Bewegungsgleichungen folgen übrigens, wie man leicht zeigen kann, ebenso wie die eines starren Körpers schon allein aus der dynamischen Charakteristik des Systems; nur um das System auch kinematisch zu kennzeichnen, bedarf es des ersten Postulates dieses Paragraphen.

Ich will hinzufügen, daß dieses meines Wissens bis jetzt in der Mechanik noch nicht behandelte System doch einen wesentlichen Unterschied gegen die drei anderen zeigt: bei den drei andern Systemen kann die charakteristische dynamische Eigenschaft an einem *einzelnen* herausgegriffenen Flächenelement aufgewiesen werden; bei dem neuen System bedarf es zur Charakterisierung der *ganzen* Spannungsdyade.

Man kann *allgemeinere Systeme* betrachten, welche die kinematischen Bedingungen der vorgenannten erfüllen, bei denen aber zu den oben mitcharakterisierten inneren Spannungen noch andere hinzukommen.

Bei einem starren Körper hat eine solche Hinzunahme keinen Sinn,

---

*) **Hamel**, Die virt. Verschieb. in d. Mechanik. Math. Ann. Bd. 59.

) **Hamel, Die Lagr.-Eul. Gleich. d. Mechanik. Z. Math. u. Phys. Bd. 50.

aus einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit entsteht auf diese Weise die *zähe* inkompressible Flüssigkeit, zu dem Punkthaufen tritt das wirkliche physikalische System hinzu: der elastische und der plastische Körper, sowie die kompressible Flüssigkeit.

Für diese hinzukommenden inneren Spannungen müssen natürlich Ursachen bekannt sein, denn sie werden im allgemeinen für die Bewegung nicht gleichgültig sein, wie die oben behandelten inneren Spannungen. Will man aber auch für diese Kräfte Ursachen angeben, so kann man solche *nur* in der kinematischen Konstitution des Systems erblicken. Allerdings bestimmt die kinematische Konstitution die Kräfte nicht vollständig, diese treten z. T. als Unbekannte in die Newtonsche Grundgleichung (A) (Seite 8) ein. Derartige Kräfte wollen wir dann *Reaktionskräfte* nennen. Alle andern Kräfte sollen *eingeprägte Kräfte* heißen. Näheres darüber im zweiten Kapitel.

Außerdem soll der Zweck des folgenden Kapitels sein, für die Mechanik der Systeme starrer Körper einen neuen Aufbau zu geben. Ein solcher neuer Aufbau ist durchaus wünschenswert, da die Abstraktion des starren Körpers schon an sich gewisse Verletzungen unserer Axiome verlangt, wenn man mehrere sich berührende starre Körper betrachtet, indem die Resultate dieses ersten Kapitels doch nicht wörtlich, wenn auch in leicht zu modifizierender Form, übertragen werden könnten.

Die Änderungen, deren die Axiome I bis VI bedürfen, werden im folgenden § 1 angegeben werden.

Daß dann unsere bisherigen Axiome die Mechanik des einzelnen starren Körpers ergeben, ist klar, da wir Schwerpunkts- und Flächensatz haben.

Zur Begründung der Systemmechanik bedarf es weiter noch der Einführung der Unterscheidung zwischen *Reaktions- und eingeprägter Kraft*, die im folgenden (Gruppe V und VII) gegeben werden soll.

Kapitel 2.

Begründung der Mechanik starrer Körper.

§ 1.

Aufstellung der Axiome.

Die Axiome der Gruppe I, II, III mögen dieselben bleiben wie in Kapitel 1, mit folgenden Zusätzen:

Es gibt Körper, die sich bei der Bewegung dauernd kongruent bleiben, sogen. starre Körper. Wir beschäftigen uns hier ausschließlich

mit Systemen, die aus einer endlichen Anzahl solcher starrer Körper bestehen. Die durchgängige Stetigkeit der Bewegung sei insofern aufgehoben, als wir zulassen wollen, daß an der Berührungsstelle zweier Körper endlich verschiedene Geschwindigkeiten herrschen können. Um die Eindeutigkeit und Stetigkeit im Körper zu retten, müssen wir jeden Berührungspunkt doppelt d. h. als zu beiden Körpern gehörig rechnen. Durch die Voraussetzung der Starrheit oder durch die Annahme, daß die Teilkörper des Systems dauernd in Berührung miteinander bleiben — wobei noch ein Gleiten resp. Rollen oder Bohren als an sich möglich oder aber als von vornherein ausgeschlossen gelten kann —, oder durch die Festsetzung, daß einige der Körper durch im absoluten Raume feste oder in bestimmter Weise bewegte starre Stützflächen an der Bewegung gehindert werden, sind der Beweglichkeit des Systems von vornherein gewisse Schranken gezogen. Den Inbegriff dieser Bewegungsbedingungen, oder was als das Gegenteil auf dasselbe hinauskommt, den Inbegriff aller Bewegungsmöglichkeiten des Systems nennen wir seine *kinematische Konstitution.*

Es ist bekannt, daß ein freier starrer Körper sechs Grade der Freiheit besitzt, d. h. daß jedes $\bar{x}$ in der Form

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{a}, q_1, q_2, \cdots, q_6)$$

dargestellt werden kann, und zwar derart, daß diese Darstellung für alle Werte der q und für alle $\bar{a}$ regulär ist und daß

$$\bar{v} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial q} \dot{q}$$

identisch in $\bar{a}$ nur verschwindet, wenn alle $\dot{q}$ Null sind.

Diese Darstellung erhalten wir, wenn wir nach Lie aus der infinitesimalen Transformation, welche der starre Körper gestattet

$$\delta \bar{x} = \delta \bar{c} + \overline{\omega(x - c)} \cdot \varepsilon, \quad \delta \bar{c} = \bar{b}\varepsilon,$$

die endliche Transformation herstellen.

Wir erhalten so (mit $\bar{x} = \bar{a}$, $\bar{c} = 0$ als Ausgangslage)

$$\bar{x} = \bar{b} + \bar{a} + \overline{\omega a} + \frac{1}{2!}\overline{\omega(\omega a)} + \frac{1}{3!}\overline{\omega(\omega(\omega a))} + \cdots,$$

oder in leicht verständlicher Symbolik:

$$\bar{x} = \bar{b} + \bar{a} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Omega_\lambda(\bar{a}) \frac{1}{\lambda!} \cdot$$

Nun ist aber

$$\Omega_2 = (\bar{\omega} \cdot \bar{a})\,\bar{\omega} - \omega^2 \bar{a},$$
$$\Omega_3 = -\,\omega^2 \Omega_1,$$

$$\Omega_4 = -\omega^2 \Omega_2,$$
$$\Omega_5 = -\omega^2 \Omega_3 \quad \text{usw.}$$

und somit

$$\bar{x} = \bar{b} + \bar{a}\left(1 - \frac{1}{2!}\omega^2 + \frac{1}{4!}\omega^4 - + \cdots\right)$$
$$+ \overline{\omega a}\left(1 - \frac{1}{3!}\omega^2 + \frac{1}{5!}\omega^4 - + \cdots\right)$$
$$+ (\bar{\omega}\cdot\bar{a})\,\bar{\omega}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\omega^2 + \frac{1}{6!}\omega^4 + \cdots\right),$$

oder

$$\bar{x} = \bar{b} + \bar{a}\cos\omega + \overline{\omega a}\,\frac{\sin\omega}{\omega} + \bar{\omega}(\bar{\omega}\cdot\bar{a})\,\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}.$$

Nimmt man noch die drei Komponenten von $\bar{b}$ als q_1, q_2, q_3, die von $\bar{\omega}$ als q_4, q_5, q_6, so erkennt man leicht die Richtigkeit der Behauptung. Darin besteht der Vorteil dieser Koordinaten vor den Eulerschen Winkeln oder den Rodriguesschen Koordinaten*), daß die vorstehende Formel für alle endlichen $\bar{a}$ und $\bar{\omega}$ regulär ist, dabei den ganzen Bewegungsbereich umfaßt, und daß $\bar{x}$ nur verschwindet für alle $\bar{a}$, wenn $\bar{b}$ und $\bar{\omega}$ Null sind.

Nun gibt bekanntlich**) die Bedingung, daß zwei Körper sich berühren sollen, eine oder mehrere Gleichungen zwischen den 12 Koordinaten q der beiden Körper:

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_{12}) = 0,$$

woraus für die Parametergeschwindigkeiten $\dot{q}$ eine oder mehrere Gleichungen der Art folgen:

$$a_1\dot{q}_1 + a_2\dot{q}_2 + \cdots + a_{12}\dot{q}_{12} = 0.$$

Wird aber noch Gleiten, Rollen oder Bohren ausgeschlossen, so ergibt dies noch eine Reihe weiterer linearer homogener Differentialgleichungen erster Ordnung für die q, die im allgemeinen nicht integrabel sind***) (nicht holonom).

Ist endlich ein Körper gezwungen, auf einer festen oder in bestimmter Weise geführten Fläche zu bleiben, und ist eventuell auch das Gleiten,

---

*) Übrigens ist die vorstehende Formel im wesentlichen mit der Rodriguesschen identisch: man braucht nur

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\omega}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\,\bar{\omega} \quad \text{statt } \bar{\omega} \text{ einzuführen.}$$

) Siehe z. B. die Darstellung bei **Heun, Lehrb. d. Mech., I. B. Kinematik, S. 246 ff.

***) Siehe z. B. **Appell**, Les mouvements de roulement en Dynamique (Scientia), vgl. auch den Zusatz von **Hadamard**.

Rollen oder Bohren ausgeschlossen, so sind die Bedingungen genau analoge: der Unterschied ist ja nur der, daß der stützende Körper nicht mit zum System gerechnet wird und daß seine q, etwa $q_7, \cdots, q_{12}$ als Funktionen von t bekannt sind. Man erhält somit Gleichungen der Form:

$$a_1\dot{q}_1 + a_2\dot{q}_2 + \cdots + a_6\dot{q}_6 + g = 0,$$

wo g eine bekannte Funktion von $q_1, \cdots, q_6,\ t$ ist.

Wir können also so zusammenfassen: Man kann jede Lage des Systems durch n unabhängige Parameter darstellen

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{a}, q_1, \cdots, q_n, t)$$

derart, daß $\bar{v}$ nur dann identisch in $\bar{a}$ verschwindet, wenn alle $\dot{q}$ dies tun. Zwischen den $\dot{q}$ bestehen dann noch eine Reihe von Gleichungen

$$\sum_{x=1}^{n} f_{\iota,x}\dot{q}_x + g_\iota = 0 \qquad (\iota = \nu+1,\ \nu+2, \cdots, n).$$

Sind alle Stützflächen fest, so verschwinden die g_ι, und $\bar{x}$ sowohl als die $f_{\iota x}$ enthalten t nicht explizit. Das System heißt dann *skleronom* (nach Boltzmann). Im anderen Fall nennt Boltzmann es *rheonom*; man kann vielleicht einfacher *nicht-skleronom* sagen.

Noch eine prinzipielle Bemerkung: Im allgemeinen werden unabhängige endliche Bedingungsgleichungen ebensolche unabhängige Gleichungen für die $\dot{q}$ ergeben. Es kann jedoch auch das Gegenteil vorkommen, z. B. daß die endlichen Gleichungen gar keine Bewegung zulassen, die Gleichungen für die $\dot{q}$ dagegen wohl. (Beispiel: die geradlinig ausgespannte Kette.) Solche Fälle wollen wir *prinzipiell aus der Mechanik starrer Körper ausschließen*, da sie unendliche Spannungen erzeugen, d. h. in Wahrheit die Fiktion des starren Körpers unmöglich machen.

Axiomgruppe IV soll auch dieselbe bleiben, nur mit dem Unterschied, daß wir an einzelnen diskreten Stellen des starren Körpers auch endliche Kräfte $\bar{k}$ zulassen wollen, oder Kräfte, die längs einzelner Kurven stetig verteilt sind. Solche Kräfte treten aber nur an den Berührungsstellen zweier Körper auf

An Stelle von Gruppe V soll die folgende treten*):

Gruppe V. Reaktions- und eingeprägte Kräfte.

a) Es gibt Kräfte, deren Ursachen ausschließlich in der kinematischen Konstitution des Systems selbst zu suchen sind, die also, sofern sie über-

*) Die in Kapitel 1, Gruppe V ausgesprochene Unterscheidung zwischen äußern und innern Kräften soll natürlich bestehen bleiben; sie ist hier nur nicht so wichtig, daß sie besonders aufgezählt werden müßte. Die Newtonsche Grundgleichung (A) dagegen bekommt hier eine etwas andere, wenn auch sachlich nicht verschiedene Fassung.

haupt vor Kenntnis des Beschleunigungsvorganges bestimmt sind, allein durch die obengenannten Bewegungsbedingungen verursacht erscheinen. Solche Kräfte sollen *Reaktionskräfte* heißen, alle anderen aber *eingeprägte Kräfte*.

b) Eingeprägte Kräfte sind entweder räumlich verteilte Kräfte, oder sie greifen an den Oberflächen der einzelnen Körper an.

c) Bezeichnen wir mit $d\bar{k}$ die Resultierende (geometrische Summe) aller auf das Volumelement dV wirkenden eingeprägten Kräfte, mit $d\bar{r}$ die Resultierende aller Reaktionskräfte, die auf das Element wirken, so ist

$$\mu \bar{w} = \lim_{\Delta V = 0} \frac{1}{\Delta V} (d\bar{k} + d\bar{r}).$$

Sollte an der Stelle eine endliche Kraft $\bar{k}$ angreifen, sodaß $\bar{k} + d\bar{k}$ die Resultierende der eingeprägten Kräfte ist, so sei die Resultierende der Reaktionskräfte $-\bar{k} + d\bar{r}$, und es gelte wieder die vorstehende Gleichung.

Gruppe VI. Axiome der Statik des starren Körpers.

Wir nennen zwei Kräftesysteme gleichwertig für den starren Körper, wenn sie jedem seiner Punkte dieselbe Beschleunigung erteilen.

a) Axiom der Verschiebbarkeit. Gehen die Angriffslinien einer Reihe von Kräften durch einen Punkt, so sind sie alle einer Kraft gleichwertig, die gleich ist der geometrischen Summe der genannten Kräfte, und deren Angriffslinie ebenfalls durch den Punkt hindurchgeht.

Daraus können wir die Sätze über die Reduktion der Kräfte am starren Körper beweisen:

Wir wählen irgend drei nicht in einer Graden gelegene Punkte O, O', O'' so, daß ihre Ebene keinen Punkt des starren Körpers enthält. Dann zerlegen wir die in einem Punkte X angreifende Kraft $d\bar{k}$ (resp. $\bar{k}$) in drei Komponenten nach den Richtungen XO, XO', XO'', was stets möglich ist. Auch ist das neue System der Komponenten dem alten gleichwertig, gemäß Axiom VIa. Jetzt setzt man die Kräfte durch O, O', O'' zusammen, so daß man drei endliche Kräfte $\bar{k}$, $\bar{k}'$, $\bar{k}''$ erhält, welche nach VIa dem alten Kräftesystem gleichwertig sind. Man kann jetzt, nach bekannten Methoden, leicht zeigen, daß diese Kräfte noch auf zwei Kräfte oder auf eine Einzelkraft gleich der Summe aller Kräfte, in einem beliebigen Punkt O angreifend, und auf ein Kräftepaar zurückgeführt werden können, dessen Moment gleich der Summe der Momente der ursprünglichen Kräfte in bezug auf O ist.

Will man nun die Statik des starren Körpers allein begründen, so braucht man noch die Axiome:

b) Ein freier starrer Körper ist sicher nicht im Gleichgewicht, wenn die Summe oder das resultierende Moment der Kräfte nicht verschwinden.

c) Ein starrer Körper ist im Gleichgewicht — d. h. er bleibt in Ruhe, wenn er sich augenblicklich in Ruhe befindet —, falls keine Kraft auf ihn wirkt.

Gruppe VII. Über die Druckkräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben.

a) Berühren sich zwei Körper in einem Punkte, so können die sich berührenden Volumelemente Kraftwirkungen aufeinander ausüben, die nach dem vorhergehenden stets als eine in dem Punkt angreifende Einzelkraft und ein Kräftepaar aufgefaßt werden können. Wenn die Berührung längs einer Kurve oder längs eines Flächenstückes stattfindet, sind diese Kräfte, resp. Kräftepaare, stetig längs der Kurve, oder stetig auf der Fläche verteilt.

b) Die Normalkomponente der Kraft ist stets ein Druck, d. h. auf denjenigen Körper zu gerichtet, auf den sie wirkt, sie heiße der *Normaldruck*.

Die tangentiale Komponente heiße *Gleitreibung*, die normale des Kräftepaares *Bohrreibung*, die tangentiale desselben *Rollreibung*.

c) Der Normaldruck ist stets eine Reaktionskraft.

d) Gleitreibung oder Bohrreibung oder Rollreibung sind dann und nur dann Reaktionskräfte, wenn Gleiten der Körper oder wenn Bohren, d. h. eine Drehung der Körper um die gemeinsame Normale der Berührungsstelle gegeneinander, oder wenn Rollen, d. h. eine Drehung der Körper um eine tangentiale Achse gegeneinander, von vornherein ausgeschlossen wird. (Siehe S. 377.) Die Reibungen mögen in diesen Fällen als *haftende Reibungen* bezeichnet werden.

e) Es gibt jedoch für die haftenden Reibungskräfte (Momente) je eine obere Grenze, die verschwindet, wenn der Normaldruck an der Berührungsstelle verschwindet.

Dieselben Axiome gelten für die Berührung eines Körpers mit einer festen ruhenden oder in bestimmter Weise bewegten Fläche.

Wir sprechen jetzt das Axiom aus:

Axiom VIII. Erstarrungsprinzip.

Ein System ist dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn für jeden Teil desselben, also auch für jeden einzelnen starren Körper, die Summe selbst und die Summe der Momente der eingeprägten Kräfte und der äußeren Reaktionskräfte, also derjenigen unter VII genannten Reaktionskräfte verschwindet, die von nicht zu dem betreffenden Teil gehörenden Körpern auf ihn ausgeübt werden.

Das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung brauchen wir nicht. Soweit es überhaupt für die Statik starrer Körper Bedeutung hat, folgt es aus Axiom VIII durch Anwendung auf je zwei Körper. Nämlich es ergibt sich: Für die Reaktionen zweier Körper aufeinander ist die Summe der Reaktionskräfte und ihrer Momente einander entgegengesetzt gleich.

Ist die Berührung einpunktig, so folgt vollständig Newtons drittes Gesetz für die Reaktionskräfte, sonst nicht. Umgekehrt genügt aber der vorstehende Teilsatz vollständig als Ersatz für Axiom VIII.

Erläuterung: Axiom VIII ergibt eine endliche Anzahl von Bedingungsgleichungen, in denen außer den eingeprägten Kräften nur die Summen selbst und die Summen der Momente der Reaktionen vorkommen, die die einzelnen Körper und Stützflächen je aufeinander ausüben.

Eliminieren wir diese resultierenden Reaktionskräfte und Momente, so bleiben gewisse Bedingungen des Gleichgewichtes übrig, in denen nur noch eingeprägte Kräfte vorkommen. Außerdem haben wir möglicherweise infolge VII b) eine Reihe von Ungleichheitsbedingungen. *Wir wollen sagen, daß* — sei es nun in der Ruhe oder in der Bewegung — *irgend eine Kräftegruppe an dem System im Gleichgewicht sei oder sich aufhebe, wenn sie alle vorstehend genannten Gleichgewichtsbedingungen befriedigt, soweit es sich um Gleichheiten, nicht aber um Ungleichheiten handelt.*

Axiom IX. Das D'Alembertsche Prinzip.

Während der Bewegung eines Systems halten sich die Reaktionskräfte an dem System das Gleichgewicht (im Sinn der vorstehenden Erläuterung).

Axiom VII b) entscheidet darüber, ob dabei die Berührung zweier Körper aufrecht erhalten bleibt oder nicht. (Siehe § 4 dieses Kapitels.)

Dieses Prinzip gilt auch für jeden Teil eines Systems, wenn man von gewissen kinematischen Bedingungen abstrahiert, wenn die äußeren Reaktionskräfte, welche von diesen kinematischen Bedingungen herrühren, zu den eingeprägten Kräften hinzugerechnet werden, und wenn natürlich nur die für diesen Teil allein resultierenden dynamischen Bedingungsgleichungen berücksichtigt werden. Wendet man das Axiom in dieser Ausdehnung an, so sagt man wohl auch, man habe den Teil „freigemacht".

Dieses Axiom genügt vollkommen, um die Bewegung des Systems aus dem Anfangszustande (Angabe des Ortes und der Geschwindigkeit zu irgend einer Zeit) und aus der Gruppe der eingeprägten Kräfte zu bestimmen.

Es folgen insbesondere für den freien, einzelnen, starren Körper

der Schwerpunktsatz

$$S\,dm\,\bar{w} = S\bar{k}$$

und der Momentensatz

$$S\,dm\,\overline{\bar{x}\bar{w}} = S\,\overline{\bar{x}\bar{k}},$$

wo unter den $\bar{k}$ die eingeprägten Kräfte zu verstehen sind.

Dieselben Gleichungen gelten auch für den starren Körper, der einem System angehört, wenn zu den $\bar{k}$ noch die äußeren Reaktionskräfte zugerechnet werden.

Was vorhin über das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gesagt wurde, bleibt auch für die Bewegung in Geltung. Eliminiert man mit Hilfe dieses Prinzipes die Reaktionen aus Schwerpunkts- und Momentensätzen, so erhält man die reaktionsfreien Bewegungsgleichungen (die synthetische Methode). Im folgenden Paragraphen werden wir die analytischen Methoden besprechen.

Noch eine Bemerkung sei erlaubt.

Häufig wird in der Lehrbuchliteratur dem D'Alembertschen Prinzip eine recht unbefriedigende Fassung gegeben. Man spricht es oft so aus: Hat man eine Gleichgewichtsbedingung, so setze man an Stelle jeder Kraft die Differenz aus Kraft und Massenbeschleunigung, und erhält so die Bewegungsgleichungen. Wörtlich genommen ist dieser Satz falsch, richtig ist er nur, wenn man Gleichgewichtsbedingungen mit ganz allgemeinem Kraftsystem nimmt und offen läßt, was man während der Bewegung unter Kraft versteht. Dann aber ist der Satz wieder viel zu unbestimmt; wie man ihn oft anwendet, z. B. zur Gewinnung der elastischen Bewegungsgleichungen, ist er nichts anderes als das Newtonsche Grundgesetz Gl. (A) (Seite 9), unter stillschweigender Übernahme des Axioms der Symmetrie der Spannungsdyade, das für die Statik durch eine leichte Ausdehnung des Axioms VIII auf beliebige Systeme gewonnen werden kann.

§ 2.

Das Prinzip der virtuellen Arbeiten.

Dieses wird uns einen expliziten Ausdruck für die in der Erläuterung zu VIII des § 1 genannten dynamischen Bedingungsgleichungen geben.

Es seien $q_1, \cdots, q_n$ n Koordinaten, welche die Lage des Systems bestimmen, sodaß

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{a}, q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$

mit den Bedingungsgleichungen zusammen die kinematische Konstitution des Systems bestimmt. Dann definieren wir *virtuelle* Verschiebungen durch

$$\delta\bar{x} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_\lambda}\,\delta q_\lambda,$$

wo die δq_λ durch die Bedingungen beschränkte, sonst willkürliche (unendlich kleine) Werte annehmen können.

Virtuelle Verschiebungen sind also zeitlose ($\delta t = 0$), bloß gedachte simultane Verschiebungen des Systems, die mit den Bedingungen des Systems verträglich sind, d. h. wenn noch $n - \nu$ unabhängige Bedingungsgleichungen vorliegen:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{\iota\varkappa} \dot{q}_\varkappa + g_\iota = 0, \qquad (\iota = \nu + 1,\ \nu + 2, \cdots, n),$$

so sollen die δq den Bedingungen genügen

$$\sum_{k=1}^{n} f_{\iota\varkappa} \delta q_\varkappa = 0, \qquad (\iota = \nu + 1,\ \nu + 2, \cdots, n),$$

sonst aber ganz beliebig sein.

Ich behaupte jetzt, daß bei allen erlaubten virtuellen Verschiebungen die Reaktionen in ihrer Gesamtheit keine Arbeit leisten, d. h. daß

$$S \delta \bar{r} \cdot \delta \bar{x} = 0$$

für alle erlaubten δq. Den Beweis führe ich so, daß ich zeige, daß zunächst bei irgend einer virtuellen Verschiebung eines starren Körpers die Reaktionskräfte mit Ausnahme eventueller äußerer Reaktionskräfte für sich keine Arbeit leisten, also auch nicht, wenn die Bewegungsfreiheit des Körpers eingeschränkt wird.

1. Für einen freien Körper ist bekanntlich nach Euler

$$\delta \bar{x} = \delta \bar{c} + \delta \overline{\vartheta (x - c)},$$

wo $\bar{c}$ einen willkürlich gewählten Punkt des Körpers angibt, $\delta \bar{c}, \delta \bar{\vartheta}$ aber beliebig sind.

Dann folgt aus Vc

$$S\, dm\, \bar{w} \cdot \delta \bar{x} = S\, d\bar{k} \cdot \delta x + S\, d\bar{r} \cdot \delta \bar{x}.$$

Es ist aber

$$S\, d\bar{k} \cdot \delta \bar{x} = \delta \bar{c}\ S\, d\bar{k} + \delta \bar{\vartheta} \cdot S \overline{(x - c)\, dk},$$

analog

$$S\, dm\, \bar{w} \cdot \delta \bar{x} = \delta \bar{c}\ S\, dm\, \bar{w} + \delta \bar{\vartheta} \cdot S \overline{(x - c)\, dm\, w}.$$

Nun ist aber nach IX

$$S\, dm\, \bar{w} = S\, d\bar{k},$$

$$S\, dm \overline{(x - c)\, w} = S \overline{(x - c)\, dk},$$

also auch

$$S\, dm\, \bar{w} \cdot \delta \bar{x} = S\, d\bar{k} \cdot \delta \bar{x},$$

und somit

$$S\, d\bar{r} \cdot \delta \bar{x} = 0.$$

2. Zweitens zeige ich, daß die Reaktionen, die ein starrer Körper von einer festen oder in bestimmter Weise bewegten Fläche erfährt, in

ihrer Gesamtheit keine Arbeit leisten. Dabei kann die Stützfläche ruhig als fest angesehen werden, da $\delta t = 0$ ist, d. h. bei der virtuellen Verschiebung die Stützfläche in ihrer augenblicklichen Lage zu halten ist.

Nun leisten aber die Normaldrucke keine Arbeit, weil sie auf jeder Verschiebung ihres Angriffspunktes senkrecht stehen.

Die haftende Gleitreibung leistet keine Arbeit, weil überhaupt das zugehörige $\delta \bar{x} = 0$ ist.

Die haftenden Roll- und Bohrreibungen leisten keine Arbeit, weil die zugehörenden $\delta \bar{\vartheta}$ auf ihnen senkrecht stehen.

3. Drittens zeige ich, daß die Reaktionen, die zwei Körper des Systems aufeinander ausüben, insgesamt keine virtuelle Arbeit leisten.

Man kann die Bewegung des zweiten Körpers in zwei Bestandteile zerlegen, die geometrisch addiert die ganze Verschiebung ergeben: die Verschiebung des ersten Körpers und die relative Verschiebung des zweiten Körpers gegen den ersten.

Entsprechend zerlegt sich die Arbeit der am zweiten Körper angreifenden und vom ersten Körper herrührenden Reaktionskräfte in zwei algebraisch zu addierende Bestandteile. Bei der Relativbewegung aber leisten die Reaktionskräfte keine Arbeit, nach dem unter 2) Gesagten. Haben aber die gegenseitig ausgeübten Reaktionskräfte die Summen $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_2$ und die Momente (bezogen auf irgend einen Punkt C, $\bar{c}$ des ersten Körpers) $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$, so ist nach 1) die gesamte, bei der gemeinsamen Verschiebung geleistete Arbeit

$$(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) \cdot \delta \bar{c} + (\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \cdot \delta \bar{\vartheta}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber, da nach der Bemerkung über das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (VIII und IX)

$$\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = 0, \quad \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = 0$$

sind.

*Damit ist die Behauptung erwiesen.**)

Führt man nun neue geschwindigkeitsbestimmende Parameter ein, indem man setzt

$$\omega_\iota = \sum_{k=1}^{n} f_{\iota,\varkappa} \dot{q}_\varkappa + g_\iota \dot{q}_{n+1} \qquad (\iota = \nu + 1, \cdots n), \quad \dot{q}_{n+1} = \omega_{n+1} = 1,$$

während man $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$ so als homogene lineare Funktionen der $\dot{q}$ wählt, daß die $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ linear unabhängig voneinander werden:

$$\omega_\lambda = \sum_{k=1}^{n} f_{\lambda,\varkappa} \dot{q}_\varkappa \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \nu),$$

*) Ich bemerke nachträglich, daß sich der vorstehende Beweis wesentlich bereits in einer Arbeit von C. Neumann, Sächsische Berichte 1887, findet.

bestimmt man weiter Größen $\delta\vartheta_\lambda$ durch

$$\delta\vartheta_\lambda = \sum f_{\lambda,\varkappa}\,\delta q_\varkappa, \qquad \delta\vartheta_\iota = \sum f_{\iota,\varkappa}\,\delta q_\varkappa,$$

so erhält man als die in der Erläuterung genannten expliziten Bedingungen des Gleichgewichtes die folgenden

$$K_\lambda \equiv S\, d\bar{k}\cdot \bar{e}_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \nu),$$

wo die $\bar{e}$ definiert sind durch

$$\delta\bar{x} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \bar{e}_\lambda\,\delta\vartheta_\lambda.$$

Die Bewegungsgleichungen aber sind die sogen. Lagrange-Eulerschen Gleichungen

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} + \sum_{\mu,\varrho=1}^{n+1} \beta_{\lambda,\mu,\varrho}\,\omega_\mu J_\varrho - \left(\frac{\partial E}{\partial\vartheta_\lambda}\right) = K_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \nu),$$

wo $E = \frac{1}{2} S\, dm\, v^2$ die kinetische Energie (homogene quadratische Form von $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n+1}$),

$$J_\lambda = \frac{\partial E}{\partial \omega_\lambda}$$

die Impulskomponenten,

$$\beta_{\lambda,\mu,\varrho}$$

die Koeffizienten der Übergangsgleichungen

$$d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x} = \sum_{\varrho=1}^{n+1} \bar{e}_\varrho (d\delta\vartheta_\varrho - \delta d\vartheta_\varrho) - \sum_{\varrho=1}^{n+1} \bar{e}_\varrho \sum_{\mu,\nu=1}^{n+1} \beta_{\mu,\nu,\varrho}\,\delta\vartheta_\mu\, d\vartheta_\nu$$

bedeuten, worin

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \sum_{\lambda=1}^{n+1} \bar{e}_\lambda\, d\vartheta_\lambda, \\ d\vartheta_\lambda &= \omega_\lambda\, dt, \\ \omega_{n+1} &= 1, \quad \delta\vartheta_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

zu setzen ist. Die Werte für $\omega_{\nu+1} \cdots \omega_{n+1}$ sind aber erst nach der Bestimmung der J aus dem E in diese einzusetzen.*)

Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen entstehen aus dem D'Alembertschen Prinzip in der Lagrangeschen Form:

---

*) Siehe Hamel, Die Lagr.-Eulerschen Gleichungen d. Mech. Z. f. M. u. Ph. Bd. 50, § 5 und 7. Hamel, Über die virtuellen Verschieb. i. d. Mechanik. Math. Ann. Bd. 59, § 1 und 2 und Schluß von § 3. Die L.-E. Gl. wurden zuerst von Volterra 1898, Woronetz 1901 und Boltzmann 1902, für einen speziellen Fall auch von Poincaré (C. R. 1901) abgeleitet.

$$S\,dm\,\overline{w}\cdot\delta\overline{x} = S\,dk\cdot\delta\overline{x},$$

die aus Vc in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten folgt. Die linken Seiten sind nichts anderes als die Faktoren der $\delta\vartheta$ in $S\,dm\,\overline{w}\cdot\delta\overline{x}$.

Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen stellen im allgemeinen zusammen mit den kinematischen

$$\omega_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} f_{\lambda,\varkappa}\dot{q}_\varkappa \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \nu),$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} f_{\iota,\varkappa}\dot{q}_\varkappa + g_\iota = 0 \qquad (\iota = \nu + 1, \cdots, n),$$

$n + \nu$ unabhängige Differentialgleichungen erster Ordnung für die $n + \nu$ Größen $\omega_1, \cdots, \omega_\nu$, $q_1, \cdots, q_\nu$ dar; zufolge der bekannten Eigenschaften von E können sie nach den $\dot{\omega}$, $\dot{q}$ aufgelöst werden. (Genaueres darüber siehe § 4.)

Man kann auch *umgekehrt* aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten und den Axiomen I bis V sowie VII die Axiome VI, VIII und IX zurückgewinnen, wenn man ihm die Fassung gibt:

Auch für jeden Teil gilt das Prinzip der virtuellen Arbeiten dann, wenn man diesen Teil als frei oder teilweise frei beweglich ansieht und die entsprechenden äußeren Reaktionskräfte zu den eingeprägten Kräften hinzurechnet. (Das *Schnittprinzip.*)

Denn man gewinnt sofort in bekannter Weise die Axiome VI und IX für den einzelnen starren Körper und dann auch Axiom VIII für jedes Teilsystem, das aus mehreren starren Körpern besteht.

§ 3.

Die Unabhängigkeit der Axiome.

Die Unabhängigkeit der Axiomgruppen I bis V bedarf wohl kaum der Erörterung. Daß die Axiome VI und IX unabhängig sind, zeigt ein Beispiel, das dem im ersten Kapitel behandelten analog ist.

Man setze für einen starren Körper an:

$$m\,\overline{w}^* = S\,d\overline{k}, \qquad S\,dm\,\overline{x}\overline{w} = S\,\overline{x}\,d\overline{k} - 2\,S\,\overline{D}\,dV,$$

wo die $\overline{dk}$ die eingeprägten Kräfte, $\overline{D}$ einen willkürlich zu wählenden Vektor bedeuten. Man erhält natürlich gemäß Vc

$$-2\int \overline{D}\,dV = \int \overline{x\,dr}.$$

Nimmt man an, daß $\overline{D}$ in der Ruhelage nicht verschwindet, so sind die Axiome der Gruppe VI nicht erfüllt, verschwindet aber $\overline{D}$ in der Ruhelage, jedoch nicht in der Bewegung, wählt man z. B.

$$2\overline{D} = F\overline{\omega\eta},$$

wo $F\overline{\eta}$ ein an jeder Stelle willkürlich gewählter, im Körper fester Vektor ist, so sind die Axiome VI erfüllt, IX (das D'Alembertsche Prinzip) aber nicht.*)

Daß Axiom VIII oder der ihm äquivalente Teil des Prinzips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung nicht abhängig ist von den anderen, erkennt man leicht so: Man setze für je zwei starre Körper eine positive Verhältniszahl $\lambda_{1,2} \neq 1$ fest, derart, daß $\lambda_{1,2} \cdot \lambda_{2,1} = 1$ ist, und bestimmt jetzt, daß für die beiden Normaldrucke N_1 und N_2, welche die Körper an der Berührungsstelle aufeinander ausüben, ebenso aber für die haftende Reibung die Relationen gelten

$$\overline{N}_1 \lambda_{1,2} + \overline{N}_2 \lambda_{2,1} = 0.$$

Die λ können von irgend welchen physikalischen Eigenschaften der Körper abhängen, z. B. von dem Verhältnis ihrer Massen. Man erhält z. B. eine widerspruchsfreie Mechanik — sofern die konventionelle Mechanik dies ist —, wenn man jede eingeprägte Kraft und die spezifische Masse durch die gesamte Masse m des entsprechenden Körpers dividiert und nun den Körper in seiner Beziehung zu anderen Körpern so behandelt wie einen Körper der Masse 1, auf den die eingeprägten Kräfte $\frac{1}{m}\, d\overline{k}$ wirken. Man erhält dann eine Mechanik, in der alle Axiome bis auf Axiom VIII erfüllt sind.

Über die Axiome VII ist dagegen noch einiges zu sagen; sie sind nicht völlig unabhängig. Nehmen wir z. B. an, daß sich ein einzelner starrer Körper auf einer festen Ebene bewegt, die er stets in einem Punkte berührt, während er sonst frei gleiten, rollen und bohren kann. Der eine Normaldruck an der jeweiligen Berührungsstelle ist dann die einzige äußere Reaktionskraft.

Daß er aber Reaktionskraft ist, ist hier beweisbar.

Denn die Bewegung des Körpers ist nach § 2 durch die eingeprägten Kräfte vollständig bestimmt.

Schreiben wir aber den Schwerpunktsatz für die Richtung senkrecht zur Ebene hin, so bekommen wir

$$N = m\ddot{x} - X,$$

wo $\ddot{x}$ die Schwerpunktsbeschleunigung des Körpers senkrecht zur Ebene bedeutet, X die entsprechende Komponente der eingeprägten Kräfte.

N bestimmt sich also vollständig aus der Bewegungsgleichung, denn

---

*) Die verschiedenen Beweisversuche D'Alemberts und anderer Autoren (vgl. Voß, Encykl. IV 1) sind also falsch. (Siehe Einleitung.)

x ist ja völlig bekannt, N kann also keine anderen Ursachen haben, als die kinematische Konstitution des Systems, N ist somit eine Reaktionskraft. Dasselbe wird in allen den Fällen gelten, wo die Reaktionskräfte durch unsere Prinzipien hinterher bestimmbar sind. In allen anderen Fällen (statisch unbestimmte Systeme) trifft das jedoch nicht zu, in diesen sind die Axiome VII c, d unabhängig. Man könnte z. B. festsetzen, daß für jedes System und irgend eine Gruppe von Kräften $d\bar{r}$

$$S\lambda|d\bar{r}|^2$$

ein Minimum werde, unter Berücksichtigung der Axiome I bis IX, wobei die λ irgendwelche positive, mit dem Ort veränderliche Funktionen darstellen, die von den Eigenschaften des Volumelementes abhängen.

Diese Eigenschaften würden somit auch als Ursachen der $d\bar{r}$ auftreten, diese also keine Reaktionskräfte sein.

Daß es statisch unbestimmte Systeme gibt, ist wohl so bekannt und einleuchtend, daß es nicht nötig ist, dies hier nachzuweisen.

§ 4.

Die Widerspruchslosigkeit der Axiome.

Die kinetische Energie E des einzelnen starren Körpers ist eine definite quadratische Form der $\dot{q}$. Man kann die q, wie oben (Seite 376 und 377) angedeutet wurde, so wählen, daß alle $\dot{q}$ (und alle $\bar{v}$) unterhalb einer angebbaren bestimmten Grenze bleiben, wenn man weiß, daß E unterhalb einer solchen Grenze bleibt. Dasselbe gilt natürlich für jedes System, bestehend aus einer endlichen Anzahl von starren Körpern.

Von den Bedingungsgleichungen betrachten wir nur die voneinander unabhängigen. Schreiben wir sie, sofern sie nicht schon als nichtholonom von vornherein diese Form haben, als lineare Differentialgleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} f_{\iota,\varkappa}\dot{q}_\varkappa + g_\iota = 0 \qquad (\iota = r+1 \cdots n)$$

und nehmen wir die Differentialgleichungen der Bewegung in der Lagrangeschen Form so, daß die zu den obigen Bedingungsgleichungen gehörenden Reaktionsgrößen N_ι $(\iota = \nu + 1 \cdots n)$ (Lagrangesche Multiplikatoren) darin vorkommen, d. h. eliminieren wir keine q oder $\dot{q}$ aus E, so erhalten wir ein System von $n + n - \nu = 2n - \nu$ Gleichungen, linear in den $2n - \nu$ Unbekannten $\ddot{q}_1 \cdots \ddot{q}_n$ und $N_{\nu+1} \cdots N_n$.

Die n Lagrangeschen Gleichungen sind unter diesen $2n - \nu$ jedenfalls linear unabhängig, nach dem was oben über E gesagt wurde. Sind nun die Bedingungsgleichungen in der obigen Form auch voneinander unab-

hängig, so lassen sich die Lagrange-Eulerschen Gleichungen bilden und mitsamt den Bedingungsgleichungen nach der $\dot{\omega}$ und $\dot{q}$ auflösen.

Trotzdem aber die endlichen Bedingungsgleichungen voneinander unabhängig sein sollten, kann es doch geschehen, daß die Gleichungen $\sum f_{\iota,\varkappa}\dot{q}_\varkappa + g_\iota = 0$ für singuläre q voneinander abhängig werden.*) (Siehe die Bem. Seite 378.)

Sei z. B. die letzte Bedingungsgleichung für gewisse Werte der Variabeln q von den andern abhängig. Wir können also annehmen, daß die $f_{n,\varkappa}$ und g_n für gewisse q verschwinden.

Nun ist jedenfalls die virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte zwischen den einzelnen starren Körpern

$$\delta \mathsf{A}_r = \sum_{\iota,\varkappa} N_\iota f_{\iota,\varkappa}\,\delta q_\varkappa = \sum_\varkappa \delta q_\varkappa \sum_\iota N_\iota f_{\iota,\varkappa}.$$

Seien die Reaktionskräfte zwischen den Körpern durch $\bar{r}$ bezeichnet, so ist andererseits

$$\delta \mathsf{A}_r = \mathbf{S}\,\bar{r}\cdot\delta\bar{x} = \sum_\varkappa \delta q_\varkappa \mathbf{S}\,\bar{r}\cdot\frac{\partial \bar{x}}{\partial q_\varkappa},$$

somit

$$\mathbf{S}\,\bar{r}\cdot\frac{\partial \bar{x}}{\partial q_\varkappa} = \sum_{\iota=r+1}^{n} N_\iota f_{\iota,\varkappa}.$$

Sollen also die $\bar{r}$ endlich bleiben, so müssen jedenfalls $N_{r+1}\cdots N_{n-1}$ und $N_n\cdot f_{n,\varkappa}$ dasselbe tun.

Da aber das Prinzip der virtuellen Arbeiten auch an der singulären Stelle (wo $f_{n,\varkappa}$, g_n Null sind) gelten soll, so muß sogar $N_n f_{n,\varkappa}$ verschwinden.

In den Lagrangeschen Gleichungen stehen nun die $N_\iota f_{\iota,\varkappa}$.

Läßt man also an der singulären Stelle die letzte Bedingungsgleichung einfach fort und setzt $N_n f_{n,\varkappa} = 0$, so hat man genau den Fall, als ob die letzte Bedingungsgleichung nicht da wäre; man kann die Beschleunigungen wieder eindeutig bestimmen.

Wenn also t zunehmend oder abnehmend gegen die Zeit konvergiert, zu der sich das System an einer singulären Stelle befindet, und dabei $N_{r+1}\cdots N_{n-1}$ gegen eine endliche Grenze gehen, die $N_n f_{n,\varkappa}$ aber gegen Null, so bedeutet die singuläre Stelle keine Ausnahmestelle, d. h. die Bewegung ist auch weiterhin eindeutig bestimmt. Denn mit den N berechnen sich ja die $\dot{q}$ auf jeden Fall eindeutig.

---

*) Den Fall, daß sie sich widersprechen, können wir a priori ausschließen, da man leicht nach derselben Methode, die im folgenden angewendet werden soll, zeigen kann, daß dann die von den gegebenen Führungen ausgehenden Reaktionskräfte unendlich werden.

Wenn sich aber die N nicht so verhalten, so können nach obigem die $\bar{r}$, die Reaktionskräfte zwischen den Körpern, nicht endlich bleiben. Diesen Fall aber müssen wir wohl sachgemäß aus der Mechanik der Systeme starrer Körper ausschließen. (Siehe die Bem. Seite 378.)

Lassen wir also diesen Fall beiseite und machen wir nun die *Voraussetzung*, daß die eingeprägten Kräfte als reguläre Funktionen des Ortes, der Geschwindigkeiten und der Zeit, also der q, ω und t gegeben sind, daß sie also insbesondere nicht mehr von den Reaktionskräften abhängen, so gibt es nach den Existenzsätzen über Differentialgleichungen jedenfalls *eine* und nur *eine* Bewegung, die gegebenen, möglichen Anfangsbedingungen genügt.

Wir können noch zeigen, daß die Bewegung für alle Zeiten regulär bleibt, wenn wir noch die weiteren *Voraussetzungen* machen: daß die Kräfte für alle endlichen Orte, Zeiten und Geschwindigkeiten regulär bleiben, daß sie in zwei Gruppen zerfallen, so daß die Kräfte der ersten Gruppe ein bloß vom Orte abhängiges Potential U haben, dessen Absolutwert stets unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze U_0 bleibt, die anderen Kräften aber Widerstandskräfte sind, die in ihrer Gesamtheit negative Arbeit leisten. Außerdem sei das System skleronom, eine Voraussetzung, die bei genügender Erweiterung des Systems immer als erfüllt angesehen werden kann.

Denn dann gilt bekanntlich der Energiesatz

$$E + U + V = h,$$

wo h eine Konstante, $-V$ die stets negative Arbeit der Widerstandskräfte bedeutet. Daraus folgt nun

$$E < |h - U| < |h| + U_0,$$

d. h. E bleibt stets endlich.

Daraus aber folgt nach dem zu Anfang Gesagten, daß alle Einzelgeschwindigkeiten endlich und jede einzelne unterhalb einer endlichen Grenze bleiben. Und daraus folgt wieder, daß die ganze Bewegung stets regulär bleibt, daß sich insbesondere auch in endlicher Zeit das System nie ins Unendliche verlieren kann, und daß die Bewegung bei Annäherung an einen bestimmten Zeitpunkt nie unbestimmt wird.*) (Das Gegenteil würde nämlich über alle Grenzen wachsende $\dot{q}$ nach sich ziehen.)

---

*) Sätze, die sich auf allgemeinere Systeme beziehen und die Rolle gewisser Singularitäten dartun, siehe in Painlevés Stockholmer Vorlesungen (1895) Seite 541 ff. Das von Painlevé auf S. 574 gegebene Beispiel widerspricht nicht unserem obigen Satze, weil bei dem Beispiel weder $|U|$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, noch auch E oberhalb einer solchen, wenn die $\dot{q}$ es tun.

Dagegen führt die Mechanik der Systeme starrer Körper in zwei Punkten auf Schwierigkeiten:

1. Beim Auftreten nicht-haftender Gleitreibung stößt man, wie Painlevé*) gezeigt hat, auf Widersprüche, wenn man die *Coulombschen Gesetze* als richtig annimmt. Man ist also jedenfalls nicht mehr frei in der Annahme über eine eventuelle Abhängigkeit der eingeprägten Kräfte von den Reaktionskräften.

2. Das Axiom der Undurchdringlichkeit kann verletzt werden, d. h. es müssen, um die Verletzung dieses Axioms doch zu verhüten, *Stoßprozesse* mit plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen zugelassen werden, deren Behandlung aber nicht im Bereiche der Mechanik starrer Körper verlangt werden kann.

Wir sehen daher von diesen Möglichkeiten hier des weiteren ab.

Im übrigen ist dann die Widerspruchslosigkeit dargetan, wenn noch gezeigt worden ist, daß man die Reaktionskräfte, soweit sie überhaupt bestimmbar sind, als reguläre Größen berechnen kann und insbesondere, daß der Normaldruck an zwei Berührungsstellen stets wirklich als Druck bestimmt werden kann, oder daß, wenn die Rechnung unter Beibehaltung der Berührungsbedingung einen negativen Druck ergeben würde, eine Bewegung möglich ist, bei der die Körper sich trennen.

Der Beweis für diese beiden Behauptungen soll jetzt noch geliefert werden.

Zunächst bestimmt sich aus der Gleichung Vc

$$dm\bar{w} = d\bar{k} + d\bar{r}$$

für jeden Punkt die Resultierende aller Reaktionskräfte $d\bar{r}$ in bestimmter, regulärer und eindeutiger Weise. (Wir machen andauernd die Voraussetzung, daß die $d\bar{k}$ als reguläre Funktionen des Ortes, der Geschwindigkeit und der Zeit angesehen werden können und nicht ihrerseits von den Reaktionskräften abhängen.)

Jetzt zeigen wir, daß eine reguläre Bestimmung der zwischen den einzelnen Körpern wirkenden Reaktionen möglich ist.

Es gibt für die q gewisse Bedingungsgleichungen, die ausdrücken, daß eine relative Normalverschiebung, ein relatives Gleiten oder Rollen oder Bohren ausgeschlossen ist. Die zugehörigen Bedingungen für die virtuellen Verschiebungen lassen sich stets auf die Form bringen

$$\delta\vartheta_{r+1} = 0, \quad \delta\vartheta_{r+2} = 0, \cdots .$$

Sie selbst dagegen lauten

$$\omega_{r+1} + g_{r+1} = 0, \cdots .$$

---

*) Painlevé, C. R. t. 121, 140 und 141.

Zu jeder solchen Bedingung gehört eine bestimmte Reaktionskomponente (resp. ein Moment), allgemein mit $N_{\nu+\lambda}$ bezeichnet, wenn wir voraussetzen, daß durchwegs das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung erfüllt ist, was wir ja bei dieser Betrachtung tun dürfen.

Wir wollen nun unter den Bedingungsgleichungen uns ein System von unabhängigen heraussuchen und alle N gleich Null setzen, die nicht zu diesen gehören.

Jetzt aber leisten die N nur bei den ihnen zugehörigen Verschiebungen $\delta\vartheta$ Arbeit u. zw. die Arbeit

$$N_{\nu+\lambda}\,\delta\vartheta_{\nu+\lambda},$$

aber bei keiner anderen; denn es ist klar, daß der Normaldruck und die Gleitreibung nur bei den ihnen zugehörigen Verschiebungen Arbeit leisten, desgleichen die Roll- und Bohrreibungen.

Heben wir nun eine Bedingung auf, fügen statt dessen die zugehörige Reaktionskraft als eingeprägte Kraft hinzu und wenden das Prinzip der virtuellen Arbeiten an, was wir tun dürfen, so erhalten wir eine neue Lagrange-Eulersche Gleichung, auf deren dynamischer Seite das $N_{\nu+\lambda}$ additiv vorkommt, während alle andern Glieder eindeutig durch die Bewegung bestimmt sind.

Wir können also jedes $N_{\nu+\lambda}$ als reguläre Funktion von Ort, Zeit und Geschwindigkeit berechnen, wenn wir eine geeignete Anzahl unter ihnen Null setzen.

Endlich soll jetzt gezeigt werden: daß sich entweder die Normaldrucke wirklich als Drucke berechnen lassen, oder daß, falls dies nicht zutrifft, eine Bewegung möglich ist, bei der die Körper sich an den momentanen Berührungsstellen abheben und der Normaldruck gleich Null ist, wie es dann natürlich sein muß, wenn die Berührung aufgehoben ist.

Es bedeute speziell

$$\omega_{\nu+\lambda} + g_{\nu+\lambda} = 0, \quad \text{resp.} \quad \delta\vartheta_{\nu+\lambda} = 0$$

die Bedingung einer Berührung. Man kann dann festsetzen, daß

$$\delta\vartheta_{\nu+\lambda} > 0, \quad \text{resp.} \quad \omega_{\nu+\lambda} + g_{\nu+\lambda} > 0$$

eine *Trennung* der Körper an der Berührungsstelle,

$$\delta\vartheta_{\nu+\lambda} < 0, \quad \text{resp.} \quad \omega_{\nu+\lambda} + g_{\nu+\lambda} < 0$$

ein gegenseitiges Eindringen, also auf jeden Fall eine unmögliche Bewegung darstelle. $N_{\nu+\lambda} > 0$ bedeutet dann einen wirklichen Druck, denn dieser leistet bei einer gedachten Trennung positive Arbeit.

Nun lautet die zugehörige Lagrange-Eulersche Gleichung:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \omega_{\nu+\lambda}^2}\,\frac{d}{dt}\,(\omega_{\nu+\lambda} + g_{\nu+\lambda}) + Gl. = N_{\nu+\lambda},$$

wo die $Gl.$ unter der Annahme, daß $\omega_{\nu+\lambda} + g_{\nu+\lambda}$ augenblicklich noch Null ist, bekannte Größen sind.

$\frac{\partial^2 E}{\partial \omega^2_{\nu+\lambda}}$ ist sicher positiv.

Wenn nun *keine* Trennung stattfindet, also

$$\omega_{\nu+\lambda} + g_{\nu+\lambda} = 0$$

bleibt, so ergibt sich

$$N_{\nu+\lambda} = Gl.$$

Ist $Gl. > 0$, so ist der Satz bewiesen. Ist aber $Gl. < 0$, so ist es möglich

$$N_{\nu+\lambda} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \omega^2_{\nu+\lambda}} \frac{d}{dt} (\omega_{\nu+\lambda} + g_{\nu+\lambda}) = - Gl. > 0$$

zu setzen, so daß

$$\omega_{\nu+\lambda} + g_{\nu+\lambda}$$

größer als Null wird, so daß also eine Trennung eintritt.

Damit wäre der Satz bewiesen, wenn nicht noch zwei Einwendungen zu widerlegen wären:

1. Es könnte sein, daß die Trennungsbewegungen durch andere Bedingungen unmöglich gemacht werden, die wir im Vertrauen auf die Zulässigkeit der Bedingung

$$\delta \vartheta_{\nu+\lambda} = 0$$

weggelassen haben.

2. Es ist denkbar, daß gleichzeitig bei Aufhebung einer Berührungsbedingung, also bei einer Trennung, noch andere Bewegungsbeschränkungen fraglich werden, daß wir also nicht allein $\delta \vartheta_{\nu+\lambda} \neq 0$ annehmen dürfen und $\omega_{\nu+\lambda} + g_{\nu+\lambda} \neq 0$, sondern *gleichzeitig* noch eine Reihe anderer Beschränkungen aufheben müssen.

Diese Bedenken aber lassen sich leicht in folgender Weise beheben:

Ist $Gl. < 0$, eine Trennung aber durch andere Bedingungen nicht möglich, so lasse man $\delta \vartheta_{\nu+\lambda} = 0$ fort (denn es gibt ja andere gleichwertige unabhängige Bedingungen), setze $N_{\nu+\lambda} = 0$ und operiere mit einer anderen gleichwertigen Bedingung. Diese sei $\delta \vartheta_{\nu+\lambda'} = 0$ mit $\omega_{\nu+\lambda'} + g_{\nu+\lambda'} = 0$. Es bedeute wieder $\delta \vartheta_{\nu+\lambda'} > 0$, $\omega_{\nu+\lambda'} + g_{\nu+\lambda'} > 0$ eine mögliche Trennung. Nun muß aber unter Berücksichtigung der anderen Bedingungen sein:

$$\delta \vartheta_{\nu+\lambda'} = A \delta \vartheta_{\nu+\lambda},$$

wo A irgend ein nicht verschwindender Faktor ist*), und dieselbe Relation muß für die $\omega_{\nu+\lambda} + g_{\nu+\lambda}$, $\omega_{\nu+\lambda'} + g_{\nu+\lambda'}$ gelten.

*) Auf verschwindendes A sind die Ausführungen zu Anfang dieses Paragraphen anzuwenden.

Ist nun $A > 0$, so ist eine Trennung möglich, ist aber $A < 0$, so ist sie unmöglich.

Nun lautet die Lagrange-Eulersche Gleichung für $\omega_{\nu+\lambda'}$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \omega^2_{\nu+\lambda'}} \frac{d}{dt}(\omega_{\nu+\lambda'} + g_{\nu+\lambda'}) + Gl'. = N_{\nu+\lambda'}.$$

Dabei ist aber vermöge des Umstandes, daß die linke Seite gleich dem Faktor von $\delta\vartheta_{\nu+\lambda'}$ in $S(\delta m \overline{w} - \delta \overline{k}) \cdot \delta \overline{x}$ ist, diese linke Seite das A-fache der linken Seite der Gleichung für $N_{\nu+\lambda}$.

Ist also $A > 0$, die Bewegung also wirklich möglich, so ist auch Gl'. negativ und $\omega_{\nu+\lambda'} + g_{\nu+\lambda'}$ wächst, wenn $N_{\nu+\lambda'} = 0$ gesetzt wird. Ist aber $A < 0$, die Bewegung also unmöglich, so ist $Gl'. > 0$ und $N_{\nu+\lambda'} > 0$, während dauernd $\omega_{\nu+\lambda'} + g_{\nu+\lambda'} = 0$ bleibt.

Lassen beide Bedingungen die Bewegung gleichzeitig zu, ist aber gleichzeitig noch eine dritte äquivalente da, so wird die Schlußweise entsprechend fortgesetzt. Damit ist der erste Punkt erledigt.

2. Das zweite Bedenken ist so zu beheben: Muß man gleichzeitig außer der Bedingung $\delta\vartheta_{\nu+\lambda} = 0$ noch die Bedingung $\delta\vartheta_{\nu+\lambda+1} = 0$ etc. fallen lassen, so nehmen die hinzukommenden Lagrange-Eulerschen Gleichungen die Form an

$$A\frac{d}{dt}(\omega_{\nu+\lambda}+g_{\nu+\lambda}) + B\frac{d}{dt}(\omega_{\nu+\lambda+1}+g_{\nu+\lambda+1}) + \cdots + Gl_0 = N_{\nu+\lambda},$$

$$B\frac{d}{dt}(\omega_{\nu+\lambda}+g_{\nu+\lambda}) + C\frac{d}{dt}(\omega_{\nu+\lambda+1}+g_{\nu+\lambda+1}) + \cdots + Gl_1 = N_{\nu+\lambda+1},$$

. . . .

wo

$$\begin{array}{l} A,\ B,\ \cdots, \\ B,\ C,\ \cdots \end{array}$$

die Koeffizienten einer regulären positiv definiten homogenen quadratischen Form sind (nach den Eigenschaften von E).

Nehmen wir zunächst den Fall an, daß es sich um lauter Bedingungen des gegenseitigen Berührens handelt, daß also die N alle Normaldrucke seien.

Dann ist zu zeigen, daß sich entweder alle N positiv bestimmen lassen, während alle Ableitungen der $\omega + g$ verschwinden — was offenbar nur möglich ist, wenn alle $Gl.$ positiv sind —, oder daß sich eine Reihe von N als positiv bestimmen lassen, die anderen als Null, während die zu den ersten N gehörenden $\frac{d}{dt}(\omega + g)$ verschwinden, die zu den letzten N gehörenden aber positive Werte annehmen.

Der zu beweisende Satz ist also offenbar mit folgendem *algebraischen Satze* identisch:

Man kann ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 + y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 + y_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n + y_n, \end{aligned}$$

wo

$$\frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2) = F$$

eine reguläre positiv definite Form ist, während die b beliebige gegebene reelle Konstanten sind, stets so auflösen, daß eine Anzahl der x verschwinden, die andern aber positiv sind, während die der ersten Klasse der x entsprechenden y nicht negativ sind, die andern aber verschwinden. (Dem x_1 „entspricht“ y_1, usw.)

Beweis: Beschränken wir uns auf den Bereich nicht-negativer x, so hat die Form

$$G = F - b_1x_1 - b_2x_2 - \cdots - b_nx_n$$

jedenfalls in diesem Bereich ein Minimum. Es kann sein, daß dieses Minimum im Innern des Bereiches liegt; es kann aber auch auf dem Rande liegen, d. h. es können einige x verschwinden.

Nehmen wir an, daß $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ verschwinden*) — wo aber auch $\nu = 0$ sein kann —, so muß für das Minimum gelten:

$$\frac{\partial G}{\partial x_{\nu+1}} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x_{\nu+2}} = 0, \cdots, \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)_{x_1 = \cdots = x_\nu = 0} \leqq 0, \cdots, \left(\frac{\partial G}{\partial x_\nu}\right)_{x_1 = \cdots = x_\nu = 0} \leqq 0.$$

Nun sind aber diese Ableitungen eben unsere y und damit ist der Satz bewiesen.

Es kann ferner nur *eine* Lösung geben, so daß das *mechanische Geschehen eindeutig bestimmt ist.*

Denn die Gleichungen $G = \text{const.}$ bedeuten ähnliche und ähnlich-gelegene ellipsoidartige Mannigfaltigkeiten $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension, d. h. M_{n-1} zweiten Grades mit Mittelpunkt, die überall konvex sind. In dem gemeinsamen Mittelpunkt nimmt somit G ihren bedingungslos kleinsten Wert an; liegt er im positiven Bereiche der Variablen, so gibt er allein auch die Lösung unseres Problems. Liegt er aber außerhalb des positiven Bereiches der x, so gibt es ein und nur ein kleinstes unter den „Ellipsoiden“, das gerade noch Punkte mit dem Bereiche gemein hat, da die „Ellipsoide“

*) Es bedeutet dies offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit, da sich die x, a, b, y umnumerieren lassen.

der Schar sich einschließen. Die gemeinsamen Punkte liegen jetzt natürlich auf den Grenzen des Bereiches, es kann aber nur einen geben, denn sonst gehörte die Verbindungsstrecke zweier gemeinsamer Punkte dem positiven Bereiche an und auch dem Innern des „Ellipsoides", wo G kleinere Werte hat, entgegen der Annahme, daß es sich um das kleinste Ellipsoid handelt, das Punkte mit dem Bereich gemein hat. Damit ist auch diese Behauptung erwiesen.

Wenn nun *Gleit-, Roll- und Bohrbedingungen* dabei sind, so modifiziert sich die Sache in folgender Weise:

Wenn eine Berührungsbedingung aufgehoben wird, so müssen offenbar auch gleichzeitig die zugehörigen Gleit- etc. Bedingungen aufgehoben werden, denn es bestehen für deren N obere Schranken, die mit verschwindendem Normaldruck selbst verschwinden (Axiom VII c). Im allgemeinen freilich werden diese Grenzen schon vorher überschritten, dann nämlich sicher, wenn die entsprechenden *Gl.* nicht verschwinden. Ein gleichzeitiges Aufhören der Gleit- etc. Bedingungen mit der entsprechenden Berührungsbedingung wird also nur dann stattfinden, wenn die entsprechenden *Gl.* Null sind.

Somit verändert sich der zu beweisende mechanische Satz in folgender Weise:

Mit einem Normaldruck verschwinden gewisse andere N gleichzeitig und zwangsweise. Dafür aber sind die den letzteren entsprechenden *Gl.* Null, auch besteht keine einzuhaltende Zeichenvorschrift für die zugehörenden $\frac{d}{dt}(\omega+g)$. Der modifizierte algebraische Satz heißt dann so: Wenn in dem Gleichungssystem einige b verschwinden, beispielsweise $b_1, b_2, \cdots, b_\varkappa$, so kann man stets ein Lösungssystem finden, sodaß $y_1, y_2, \cdots, y_\varkappa$ verschwinden, $x_1, x_2, \cdots, x_\varkappa$ beliebige Zeichen haben, während die anderen x und y nicht negativ sind und zwar derart, daß jedes verschwindet, wenn das zugehörende andere nicht Null wird.

Zum Beweise betrachten wir das sicher existierende Minimum der Form G im Bereiche

$$-\infty \leqq x_1, x_2, \cdots, x_\varkappa \leqq \infty, \qquad 0 \leqq x_{\varkappa+1}, \cdots, x_n \leqq \infty.$$

Von den letzteren mögen $x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \cdots, x_\nu$ $(\nu \geqq \varkappa+1)$ verschwinden an der Minimalstelle, die anderen nicht. Dann ist

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0, \cdots, \frac{\partial G}{\partial x_\varkappa} = 0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial x_{\varkappa+1}} \leqq 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x_{\varkappa+2}} \leqq 0, \cdots, \frac{\partial G}{\partial x_\nu} \leqq 0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial x_{\nu+1}} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x_{\nu+2}} = 0, \cdots, \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0.$$

Da diese Ableitungen gleich unseren y sind, so ist der Satz bewiesen. Es gibt hier natürlich wieder eine Lösung.

Auch hier können zunächst unberücksichtigt gebliebene Bedingungen das Loslösen der Körper verhindern. Diesem Umstande begegnet man durch analoge Betrachtungen wie vorhin, wo es sich nur um eine Bedingungsgleichung handelte. Man beachte nur wieder, daß die neuen Lagrange-Eulerschen Gleichungen aus den alten durch dieselbe lineare Transformation hervorgehen wie die neuen Bedingungsgleichungen aus den alten.

Ich will bemerken, daß den vorstehenden Satz im wesentlichen bereits A. Mayer und E. Zermelo*) für den speziellen Fall eines Punktsystems mit Hilfe des Prinzips vom kleinsten Zwange bewiesen haben.

Wollte man den Beweis der Widerspruchslosigkeit für den starren Körper nach den in Kapitel I aufgestellten Axiomen führen, so müßte noch gezeigt werden, daß die Gleichungen

$$\mu \bar{w} = \bar{x} + \nabla \cdot \Lambda$$

gestatten, wenigstens ein Λ zu bestimmen, das die Randbedingungen erfüllt. Dieses Problem an sich ist unbestimmt, d. h. es gibt sicher unendlich viele Lösungen, und bietet zu wenig Interesse; da es überdies durch die Untersuchungen und Existenztheoreme Korns (Münchener Berichte) und anderer über elastische Körper**) miterledigt wird, sei hier nicht weiter die Rede davon.

Brünn, im Mai 1908.

---

*) A. Mayer, Sächsische Berichte 1899.
E. Zermelo, Göttinger Nachrichten 1899.

**) Literatur siehe in dem Encyklopädieartikel von Tedone IV 24.

Sulla integrazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili.

Di

Francesco Aurelio Dall' Acqua a Mantova.

Introduzione.

Lo Stäckel poneva, anni sono*), il problema: „*Sotto quali condizioni l'equazione di Hamilton-Jacobi*

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{cost.}$$
$$\left(p_h = \frac{\partial W}{\partial x_h};\ h = 1, 2, \ldots, n\right)$$

sia integrabile per separazione di variabili, quando la H corrisponda ad un problema dinamico coi legami indipendenti dal tempo."

Indicando in tal caso la forza viva con

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a_{rs} x'_r x'_s \qquad \left(x' = \frac{dx}{dt}\right)$$

e posto

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

egli assegnava sotta forma esplicita le condizioni per la possibilità del problema in generale, ma egli potè risolvere il problema soltanto nel caso che il ds sia l'elemento lineare di uno spazio riferito ad una n^{pla} ortogonale, sfruttando abilmente il fatto che l'integrale generale W deve contenere n costanti arbitrarie.

Anni dopo**) il Levi-Civita ricavava ingegnosamente in altra forma più comoda queste condizioni, e risolveva il problema nell'ipotesi che le a_{rs} dipendano solo dalle variabili coi medesimi indici. Inoltre esauriva completamente il caso di due sole variabili, già trattato dallo Stäckel in modo esauriente***), ma forse non altrettanto semplice.

*) P. Stäckel, Habilitationsschrift, Halle 1891, e inoltre: Math. Ann. Bd. 42 (1893), p. 537, Paris C. R. 121 (1895), p. 489.

**) T. Levi-Civita, Math. Ann., Bd. 49 (1904), p. 383.

***) Math. Ann., Bd. 35 (1889), p. 91.

Io riprendo ora il problema per ricavarne direttamente tutte le condizioni di possibilità, e per darne la soluzione completa per 3 variabili.

Ritrovo così il caso ortogonale dello Stäckel, in cui le superfici di ciascun sistema sono tagliate da quelle degli altri due in congruenze isoterme di Liouville: ritrovo il caso del Levi-Civita in cui le superfici coordinate sono superfici di traslazione. Trovo infine altri due tipi: un primo tipo con una famiglia di superfici sviluppabili; un secondo tipo con una famiglia di superfici tra loro applicabili, e le altre due appartenenti ad un sistema triplo ortogonale, applicabili sopra superfici di rotazione, e intersecantisi lungo le deformate dei paralleli.

Riassumo qui i quattro tipi, indicando, come sempre in seguito, con lettere latine *minuscole* munite di un indice le funzioni della sola variabile corrispondente a quell' indice. Nel seguito*) designerò con lettere latine *maiuscole* munite di un indice, le funzioni che non dipendono dalla corrispondente variabile; con lettere minuscole munite dell' indice *zero*, le costanti.

Ecco i quattro tipi:

$$\text{(I)} \qquad ds^2 = \sum_1^3{}_{r,s} (a_r a_s + b_r b_s + c_r c_s)\, dx_r\, dx_s$$

(superfici di traslazione, tipo del Levi-Civita).

$$\begin{aligned}\text{(II)} \quad ds^2 = {} & (a_3 + 2 l_1 e_3 + l_1^2 b_3)\, dx_1^2 + (m_2^2 a_3 + 2 m_2 e_3 + b_3)\, dx_2^2 + dx_3^2 \\ & + 2 (m_2 a_3 + l_1 b_3 + (1 + l_1 m_2)\, e_3)\, dx_1\, dx_2 \\ & + 2 (c_3 + m_2 \partial_3)\, dx_2\, dx_3 + 2 (l_1 c_3 + \partial_3)\, dx_1\, dx_3\end{aligned}$$

(le superfici $x_2 = \text{cost.}$ sono sviluppabili).

$$\begin{aligned}\text{(III)} \quad ds^2 = {} & \frac{a_1 - b_2}{c_1 - \partial_2} [(l_1^2 + c_1 - \partial_2)\, dx_1^2 + (m_2^2 + c_1 - \partial_2)\, dx_2^2 + dx_3^2 \\ & + 2 l_1 m_2\, dx_1\, dx_2 + 2 m_2\, dx_2\, dx_3 + 2 l_1\, dx_3\, dx_1]\end{aligned}$$

(le $x_3 = \text{cost.}$ sono applicabili l'una sull'altra, le $x_1 = \text{cost.}$ e $x_2 = \text{cost.}$ appartengono ad un sistema triplo ortogonale, sono applicabili sopra superfici di rotazione e si tagliano lungo le deformate dei paralleli).

$$\text{(IV)} \qquad ds^2 = \sum_1^3{}_h r_h (q_{h+1} - q_{h+2}) \sum_1^3{}_r \frac{dx_r^2}{|q_{r+1} - q_{r+2}|} \;{}^{**})$$

(le superfici di ciascun sistema vengono tagliate da quelle degli altri due in congruenze isoterme di Liouville. Tipo dello Stäckel).

---

*) Eccetto che nel Cap. I. In ogni caso indicheremo poi con a il discriminante della forma ds^2.

**) Qui e in seguito si intenderanno equivalenti gli indici congrui fra loro in modulo 3.

Cap. I.

Il problema nel caso generale.

§ 1. Il problema messo in equazione.

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n; x_1, x_2, \ldots, x_n) = h_0$$

sia l'equazione di Hamilton-Jacobi (dove $p_h = \frac{\partial W}{\partial x_h}$; $h = 1, 2, \ldots, n$).

Come è noto*), perchè questa sia integrabile per separazione di variabili è necessario e sufficente che sia

$$\frac{\partial H}{\partial p_h}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial p_h}\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial x_h} - \frac{\partial H}{\partial x_h}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial x_h}\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_k} = 0$$

dove $h \mp k$ e dove i valori iniziali delle p devono rimanere arbitrari.

Se H corrisponde ad un problema dinamico coi legami indipendenti dal tempo, e U ne è il potenziale, e

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,s}^{n} a_{rs} x'_r x'_s$$

ne è la forza viva, avremo, posto $H + U = K$,

$$K = \frac{1}{2}\sum_{r,s}^{n} a^{(rs)} p_r p_s \tag{1}$$

(dove le $a^{(rs)}$ sono i coefficenti della forma reciproca a $2T$).

L'integrabilità della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili richiede allora che sieno sodisfatte identicamente (per ogni valore iniziale delle p), le equazioni:

$$\frac{\partial K}{\partial p_h}\frac{\partial K}{\partial p_k}\frac{\partial^2 K}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial K}{\partial p_h}\frac{\partial K}{\partial x_k}\frac{\partial^2 K}{\partial p_k \partial x_h} - \frac{\partial K}{\partial x_h}\frac{\partial K}{\partial p_k}\frac{\partial^2 K}{\partial p_h \partial x_k} + \frac{\partial K}{\partial x_h}\frac{\partial K}{\partial x_k}\frac{\partial^2 K}{\partial p_h \partial p_k} = 0, \tag{I}$$

$$\frac{\partial K}{\partial p_h}\frac{\partial K}{\partial p_k}\frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial K}{\partial p_h}\frac{\partial^2 K}{\partial x_h \partial p_k}\frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{\partial K}{\partial p_k}\frac{\partial^2 K}{\partial x_k \partial p_h}\frac{\partial U}{\partial x_h} + \frac{\partial^2 K}{\partial p_h \partial p_k}\left[\frac{\partial K}{\partial x_h}\frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{\partial K}{\partial x_k}\frac{\partial U}{\partial x_h}\right] = 0, \tag{II}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p_h \partial p_k}\frac{\partial U}{\partial x_h}\frac{\partial U}{\partial x_k} = 0$$

(in tutte queste $h \mp k$).**)

§ 2. Le equazioni (I) in forma esplicita.

Sostituendo per le derivate di K i valori che si ricavano dalla (1) si dà alle (I) agevolmente la forma

*) Confr. T. Levi-Civita, Op. cit. p. 385.

**) Confr. T. Levi-Civita, Op. cit. p. 386.

$$(\mathrm{I}_1)\quad \sum_{r,s,t,u}^{n} {}_{1}\, p_r p_s p_t p_u \Big[a^{(rh)} a^{(sk)} \frac{\partial^2 a^{(tu)}}{\partial x_h \partial x_k} - a^{(rh)} \frac{\partial a^{(sk)}}{\partial x_h} \frac{\partial a^{(tu)}}{\partial x_k} - a^{(rk)} \frac{\partial a^{(sh)}}{\partial x_k} \frac{\partial a^{(tu)}}{\partial x_h}$$
$$+ \frac{1}{2} a^{(hk)} \frac{\partial a^{(rs)}}{\partial x_h} \frac{\partial a^{(tu)}}{\partial x_k}\Big] = 0.$$

Perchè questa sia sodisfatta per ogni valore iniziale (arbitrario) delle p, conviene sia nullo il coefficente di ogni gruppo distinto $p_r p_s p_t p_u$, cioè la somma dei termini che si ottengono dal termine generale di (I_1), eseguendo tutte le possibili permutazioni degli indici r, s, t, u. Avremo così un gruppo di equazioni dipendenti da tali indici, oltre che da h e k. Moltiplicando ciascuna delle equazioni che così si ottengono, per il corrispondente $a_{r\varrho} a_{s\sigma} a_{t\tau} a_{uv}$, e sommando rispetto ad r, s, t, u, si avrà il gruppo equivalente*)

$$(\mathrm{I}_2)\quad \varepsilon_{\varrho h}[\varepsilon_{\tau k} P^{hk}_{\sigma v} + \varepsilon_{v k} P^{hk}_{\sigma\tau} + Q^{kh}_{\sigma\tau v}] + \varepsilon_{\sigma h}[\varepsilon_{\tau k} P^{hk}_{\varrho v} + \varepsilon_{v k} P^{hk}_{\varrho\tau} + Q^{hk}_{\varrho\tau v}]$$
$$+ \varepsilon_{\varrho k}[\varepsilon_{\sigma h} P^{hk}_{\tau v} + Q^{hk}_{\sigma\tau v}] + \varepsilon_{\sigma k}[\varepsilon_{\varrho h} P^{hk}_{\tau\varrho} + Q^{hk}_{\varrho\tau v}] + \varepsilon_{\tau k} Q^{hk}_{\varrho\sigma v} + \varepsilon_{v k} Q^{hk}_{\varrho\sigma\tau}$$
$$- a^{(hk)}\Big[\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_h}\frac{\partial a_{\tau v}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial x_h}\frac{\partial a_{\varrho v}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial x_h}\frac{\partial a_{\sigma v}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{\tau v}}{\partial x_h}\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_k}$$
$$+ \frac{\partial a_{\varrho v}}{\partial x_h}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{\sigma v}}{\partial x_h}\frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial x_k}\Big] = 0$$

dove abbiamo posto $\varepsilon_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{per } p = q \\ 0 & \text{„ } p \neq q \end{cases}$, e

$$Q^{hk}_{\varrho\sigma\tau} = \sum_{1}^{n}{}_{l}\, a^{(hl)}\Big[\frac{\partial a_{l\varrho}}{\partial x_k}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{l\sigma}}{\partial x_k}\frac{\partial a_{\tau\varrho}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{l\tau}}{\partial x_k}\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_h}\Big];$$

inoltre abbiamo indicato con $P^{hk}_{\varrho\sigma}$ l'espressione

$$-\sum_{r,s}\frac{\partial^2 a^{(rs)}}{\partial x_h \partial x_k} a_{r\varrho} a_{s\sigma} = \frac{\partial^2 a_{\varrho\sigma}}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{r,s} a^{(rs)}\Big(\frac{\partial a_{r\varrho}}{\partial x_h}\frac{\partial a_{s\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial x_h}\frac{\partial a_{s\varrho}}{\partial x_k}\Big).$$

§ 3. La trasformazione delle (I_2).

Attribuiamo a ϱ, σ, τ, v tutti i possibili valori ($\tau, v \neq h$*); intenderemo anche diversi da h e k tutti i valori di quegli indici di cui non diremo espressamente il contrario).

Consideriamo le equazioni che si ottengono da (I_2) nel modo e nell'ordine seguente:

Gli indici prima assumano un solo valore, poi due, quindi tre, e infine

---

*) Ricordando le $\sum_r a^{(rp)} a_{rq} = \varepsilon_{pq}$, e quelle che se ne traggono per derivazione 1ª e 2ª. Osservando inoltre che la simmetria della formole rispetto ad h e k e rispetto ad r, s, t, u ci ha permesso di supporre $\tau, v \neq h$.

quattro valori distinti. Poscia sia $\varrho = k$ e gli indici rimanenti assumano un solo, poi due, quindi tre valori distinti, poscia $\varrho = \sigma = k$, e τ, v assumano prima valori eguali, poi valori distinti: in fine sia $\varrho = \sigma = \tau = k$. Poi sia $\varrho = h, \sigma = k$, e τ, v assumano prima valori eguali, poi valori distinti. Finalmente sia $\varrho = h$, $\sigma = \tau = k$.

Otteniamo così una serie di equazioni tali che in ciascuna di esse i termini possono venir raggruppati nei due membri (eccetto che nella prima, che è monomia) in guisa che debba esser nullo (tenendo conto della prima e delle altre successivamente trovate) o l'uno o l'altro membro. Dovranno così annullarsi ambedue dando luogo ad *equazioni* semplicissime *di primo ordine* che si riassumono nei tre tipi

$$\text{(A)} \qquad a^{(hk)} \frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{st}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_h} \sum_{s \neq k} a^{(sh)} \frac{\partial a_{st}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_h} \left[\sum\nolimits_p a^{(ph)} \frac{\partial a_{pk}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} a^{(hk)} \frac{\partial a_{kk}}{\partial x_k} \right] = 0,$$

e dando inoltre luogo ad *equazioni*, meno semplici, *di secondo ordine* dei tipi:

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial^2 a_{tu}}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{\substack{r \neq h \\ s \neq k}} a^{(rs)} \left(\frac{\partial a_{rt}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{su}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ru}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{st}}{\partial x_k} \right)$$
$$+ \frac{\partial a_{tu}}{\partial x_k} \sum_{r \neq h} a^{(rk)} \frac{\partial a_{rk}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{tu}}{\partial x_h} \sum_{s \neq k} a^{(sh)} \frac{\partial a_{sh}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 a_{tk}}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{\substack{r \neq h \\ s \neq k}} a^{(rs)} \left(\frac{\partial a_{rt}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{sk}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{rk}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{st}}{\partial x_k} \right)$$
$$+ \frac{\partial a_{tk}}{\partial x_h} \sum_{s \neq k} a^{(sh)} \frac{\partial a_{sh}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kk}}{\partial x_k} \sum_{r \neq h} a^{(rk)} \frac{\partial a_{rt}}{\partial x_h} = 0$$

A queste dovremo aggiungere quelle che si ottengono dalle (I_2) facendovi $\varrho = h$, $\tau = v = k$, e una volta $\sigma = k$, l'altra $\sigma = h$:

$$\text{(F)} \qquad \frac{\partial^2 a_{kk}}{\partial x_h \partial x_k} - 2 \sum_{\substack{r \neq h \\ s \neq k}} a^{(rs)} \frac{\partial a_{rk}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{sk}}{\partial x_k}$$
$$+ \frac{\partial a_{kk}}{\partial x_h} \sum_{s \neq k} a^{(sh)} \frac{\partial a_{sh}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kk}}{\partial x_k} \sum_{r \neq h} a^{(rk)} \frac{\partial a_{rk}}{\partial x_h} = 0,$$

$$\text{(G)} \qquad \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{\substack{r \neq h \\ s \neq k}} a^{(rs)} \left(\frac{\partial a_{rh}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{sk}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{rk}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{sh}}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hh}}{\partial x_h} \sum_{s \neq k} a^{(sh)} \frac{\partial a_{sk}}{\partial x_k}$$
$$- \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kk}}{\partial x_k} \sum_{r \neq h} a^{(rk)} \frac{\partial a_{rh}}{\partial x_h} - \frac{1}{4} a^{(hk)} \left(\frac{\partial a_{hh}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{kk}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kk}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{hh}}{\partial x_k} \right) = 0.$$

In tutte queste ((A), ..., (G)) (tenendo conto nelle (C) delle ultime equazioni che si ottengono da (I_2) per $\varrho = \sigma = \tau = v = k$) abbiamo posto r, r' a designare indici qualunque $\neq h$, s a designare un indice $\neq k$, e t, u a designare indici $\neq h, k$.

§ 4. Le condizioni per il potenziale.

In modo simile potremo trasformare le (II) e (III). Ponendo per le derivate di K i loro valori, le (III) si scrivono immediatamente

$$a^{(hk)} \frac{\partial U}{\partial x_h} \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0, \tag{a}$$

e le (II) assumono la forma

$$\sum_{r,s} p_r p_s \Big[a^{(rh)} a^{(sk)} \frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k} - a^{(rh)} \frac{\partial a^{(sk)}}{\partial x_h} \frac{\partial U}{\partial x_k} - a^{(sk)} \frac{\partial a^{(rh)}}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_h}$$
$$+ \frac{1}{2} a^{(hk)} \Big(\frac{\partial a^{(rs)}}{\partial x_h} \frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{\partial a^{(rs)}}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_h} \Big) \Big] = 0.$$

Perchè queste valgano per ogni valore delle p, dovrà annullarsi il coefficente di ogni gruppo distinto $p_r p_s$. Avremo così un gruppo di equazioni dipendenti dagli indici r, s, oltre che da h, k. Moltiplicando per il corrispondente fattore $a_{r\varrho} a_{s\sigma}$ e sommando rispetto ad r ed s, otterremo il sistema equivalente:*)

$$\varepsilon_{\sigma k} \Big[\varepsilon_{\varrho h} \frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_h} \sum_r a^{(rh)} \frac{\partial a_{r\varrho}}{\partial x_k} \Big] + \varepsilon_{\varrho h} \frac{\partial U}{\partial x_k} \sum_s a^{(sk)} \frac{\partial a_{s\sigma}}{\partial x_h}$$
$$+ \varepsilon_{\varrho k} \frac{\partial U}{\partial x_h} \sum_s a^{(sh)} \frac{\partial a_{s\sigma}}{\partial x_k} - a^{(hk)} \Big[\frac{\partial U}{\partial x_h} \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_h} \Big] = 0.$$

Facendo in questa successivamente $\varrho, \sigma \neq h, k$; $\varrho = k$; $\varrho = \sigma = k$; $\varrho = h$, $\sigma = k$, con una osservazione analoga a quella del § precedente, ricordando la (a), si ottiene

$$a^{(hk)} \frac{\partial U}{\partial x_h} \frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_k} = 0 \qquad (r, r' \neq k), \tag{b}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_h} \sum_{s \neq k} a^{(sh)} \frac{\partial a_{st}}{\partial x_k} = 0, \tag{c}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_h} \Big[\sum_p a^{(ph)} \frac{\partial a_{pk}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} a^{(hh)} \frac{\partial a_{kk}}{\partial x_k} \Big] = 0, \tag{d}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_h} \sum_{s \neq k} a^{(sh)} \frac{\partial a_{sh}}{\partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_k} \sum_{r \neq h} a^{(rh)} \frac{\partial a_{rk}}{\partial x_h} = 0. \tag{e}$$

Non è necessario far notare che le equazioni da (A) a (G) equivalgono alle (I), quelle da (a) ad (e) alle (II), (III).

*) Anche qui la simmetria della formola originaria ci dispensa dal porre $\sigma = h$.

Cap. II.

Il problema in tre variabili.

§ 5. Le nostre formole nel caso di tre variabili.

I coefficenti a_{rs} della forza viva si potranno riguardare come coefficenti di una forma differenziale quadratica

$$ds^2 = \sum_{r,s=1}^{3} a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

dove ds indichi l'elemento lineare di una varietà con tre dimensioni.

Distingueremo nella nostra trattazione i casi in cui i gruppi di derivate

$$\frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_1}\ (r, r' \neq 1); \quad \frac{\partial a_{ss'}}{\partial x_2}\ (s, s' \neq 2); \quad \frac{\partial a_{tt'}}{\partial x_3}\ (t, t' \neq 3):$$

1° siano tutti identicamente nulli; 2° due soli siano identicamente nulli, mentre almeno una derivata del terzo sia $\neq 0$; 3° uno solo sia identicamente nullo, mentre almeno una derivata per ciascuno degli altri due sia $\neq 0$; 4° nessuno dei tre gruppi sia identicamente nullo, sia quindi $\neq 0$ almeno una derivata per ciascun gruppo.

Il caso del Levi-Civita.

Sia

$$(1) \qquad \frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_h} = 0 \quad (\text{per } h = 1, 2, 3 \ \text{ e } \ r, r' \neq h),$$

da cui $a_{rr} = f(x_r)$, e scegliendo opportunamente i parametri x_1, x_2, x_3:

$$(1') \qquad a_{rr} = 1.$$

Le (G) si riducono alle

$$\frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{\substack{r \neq h \\ s \neq k}} a^{(rs)} \frac{\partial a_{rh}}{\partial x_h} \frac{\partial a_{sk}}{\partial x_k} = 0.$$

È facile riconoscere che il primo membro di questa è il simbolo del Riemann $a_{hk,hk}$, che risulta quindi nullo. È pur facile riconoscere che anche gli altri simboli del Riemann (con tre indici distinti) sono nulli, e se ne trae che la varietà è applicabile sullo spazio euclideo. Indicando con y_1, y_2, y_3 delle coordinate cartesiane ortogonali di questo, si può scrivere come è noto

$$a_{rs} = \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial y_h}{\partial x_r} \frac{\partial y_h}{\partial x_s},$$

da cui, osservando che sono identicamente nulli i simboli del Christoffel, si ha

$$\sum_h \frac{\partial y_h}{\partial x_r}\frac{\partial^2 y_h}{\partial x_s \partial x_t} = 0 \qquad (r,\, s,\, t \text{ qualunque}),$$

e poichè

$$\left\| \frac{\partial y_h}{\partial x_r} \right\| = \sqrt{a} \neq 0 \qquad (a = \|a_{rs}\|),$$

dovrà essere

$$\frac{\partial^2 y_h}{\partial x_s \partial x_t} = 0 \qquad (s,\, t \text{ qualunque}).$$

Avremo dunque

$$\frac{\partial y_h}{\partial x_s} = b_s^{(h)}$$

dove le b_s sono funzioni di x_s soltanto (con i nostri particolari parametri sarà anche, per le (1'), $\sum_h b_s^{(h)^2} = 1$), e

$$a_{rs} = \sum_1^3{}_h\, b_r^{(h)} b_s^{(h)}.$$

Il ds^2 assume la forma del tipo I dell' introduzione: le x_r = cost. sono evidentemente superfici di traslazione.

Cap. III.

Il secondo caso.

§ 6. Una prima integrazione.

Non tutte le

$$\frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_3} \quad (r,\, r' \neq 3)$$

siano nulle, mentre valgano ancora tutte le

$$(1) \qquad \frac{\partial a_{ss'}}{\partial x_1} = 0, \quad (s,\, s' \neq 1), \qquad \frac{\partial a_{tt'}}{\partial x_2} = 0, \quad (t,\, t' \neq 2).$$

Le formole risulteranno perciò simmetriche rispetto agli indici 1, 2. Le (C) danno*) (per $h = 3$, $k = 1$)

$$(2) \qquad a^{(13)}\sqrt{a} = P_1 : s_3, \quad \text{e la simmetrica:} \quad a^{(23)}\sqrt{a} = Q_2 : s_3,$$

*) Osservando che per le (1):

$$\sum_p a^{(ph)} \frac{\partial a_{ph}}{\partial x_h} - \frac{1}{2} a^{(hh)} \frac{\partial a_{hh}}{\partial x_h} = \frac{\partial \log \sqrt{a}}{\partial x_h}$$

per $h = 1, 2$.

Dove con s_3 indichiamo per comodità una funzione che determineremo più avanti.

Le (E) (ancora per $h=3$, $k=1$) danno

(3) $$\sqrt{a}\sum_p a^{(p1)}\frac{\partial a_{p2}}{\partial x_3}=U_1,\quad \text{e simm.}\quad \sqrt{a}\sum_p a^{(p2)}\frac{\partial a_{p1}}{\partial x_3}=V_2.$$

Moltiplicando le (E), (F), (G) (fattovi $k=1$, $h=3$), rispettivamente per $a^{(12)}$, $a^{(11)}$, $a^{(13)}$) e sommando si ha

$$\frac{\partial^2\log\sqrt{a}}{\partial x_3\,\partial x_1}=0,\quad \text{e simm.}\quad \frac{\partial^2\log\sqrt{a}}{\partial x_3\,\partial x_2}=0,$$

e integrando (approfittando della s_3, fino ad ora indeterminata)

(4) $$\sqrt{a}=R_3 s_3.$$

Le (G) ($h=3$, $k=1$) danno

(5) $$\sqrt{a}\sum_p a^{(p1)}\frac{\partial a_{p3}}{\partial x_3}=W_1:s_3,\quad \text{e simm.}\quad \sqrt{a}\sum_p a^{(p2)}\frac{\partial a_{p3}}{\partial x_3}=Z_2:s_3,$$

ed anche (per $h=2$, $k=1$)

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\sqrt{a}\left(\sum_p a^{(p1)}\frac{\partial a_{p2}}{\partial x_2}-a^{(12)}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2}\right)\right\}=0,$$

e, con una prima integrazione,

(6) $$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{a^{(12)}\sqrt{a}\right\}=a^{(22)}F_1 s_3,$$

e la simmetrica.

Indicando con ξ una funzione indeterminata, le nostre equazioni da (1) a (5) si possono scrivere, al più mutando il parametro x_3:

(1') $$a_{11}=A_2;\quad a_{22}=B_1;\quad a_{33}=1;\quad a_{23}=C_1;\quad a_{31}=D_2;\quad a_{12}=\xi,$$

(2') $$\xi C_1=R_3P_1+D_2B_1;\qquad \xi D_2=R_3Q_2+C_1A_2,$$

(3') $$\begin{aligned}(B_1-C_1^2)\frac{\partial\xi}{\partial x_3}+(C_1D_2-\xi)\frac{\partial B_1}{\partial x_3}&=R_3U_1',\\ (A_2-D_2^2)\frac{\partial\xi}{\partial x_3}+(C_1D_2-\xi)\frac{\partial A_2}{\partial x_3}&=R_3V_2'\end{aligned}$$

(dove in U_1' e V_2' abbiamo indicato una somma di termini indipendenti rispettivamente da x_1 e da x_2),

(4') $$(B_1-C_1^2)(A_2-D_2^2)-(C_1D_2-\xi)^2=s_3^2R_3^2,$$

(5') $$\begin{aligned}(B_1-C_1^2)\frac{\partial D_2}{\partial x_3}+(C_1D_2-\xi)\frac{\partial C_1}{\partial x_3}&=R_3W_1;\\ (A_2-D_2^2)\frac{\partial C_1}{\partial x_3}+(C_1D_2-\xi)\frac{\partial D_2}{\partial x_3}&=R_3Z_2.\end{aligned}$$

Eliminando ξ fra queste ultime e le (2'), e confrontando (il coefficente di R_3 risulta una volta indipendente da x_1 e una volta indipendente da x_2; lo indicheremo quindi con t_3)

(5'') $$C_1 \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + D_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_1} = R_3 t_3 .$$

Sommando questa con la prima delle (3') e sottraendovi la prima delle (5') moltiplicata per $2C_1$, e infine integrando:

(3'') $$C_1 D_2 - \xi = R_3 (B_1 - C_1^2)(H_1 - L_3),$$

e la simmetrica

(3'') $$C_1 D_2 - \xi = R_3 (A_2 - D_2^2)(K_2 - M_3),$$

dove

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = \frac{2 C_1 W_1 - U_1' - t_3}{(B_1 - C_1^2)^2}$$

e l'analoga per K_2, e dove L_3, M_3 sono le funzioni arbitrarie introdotte dalla integrazione. Eliminando ξ fra le (3'') e le (2')

(2'') $$\begin{aligned} D_2 &= R_3 (C_1 L_3 + W_1'), \\ C_1 &= R_3 (D_2 M_3 + Z_2'), \end{aligned}$$

dove W_1' è una somma di termini indipendenti da x_1, e similmente Z_2'.

§ 7. Scelta dei parametri e delle funzioni L_3, M_3.

Se osserviamo che mutando il parametro x_1, (x_2) la $\sqrt{a}$ viene moltiplicata per una opportuna funzione della sola x_1, (x_2), e poniamo

$$R_{x_1=0} = r_2, \quad R_{x_2=0} = r_1, \quad R_{x_1=x_2=0} = r_0,$$

vediamo che è sempre possibile scegliere i parametri x_1, x_2 in guisa che R_3, $(\sqrt{a} = R_3 s_3)$ si muti in

$$\frac{R_3 r_0}{r_1 r_2} .$$

Se indichiamo ancora questa espressione con R_3, avremo

$$R_{x_1=0} = 1, \quad R_{x_2=0} = 1\text{*)},$$

qualunque siano i valori rispettivamente di x_2 e x_1.

Riguardo alle funzioni arbitrarie L_3, M_3, potremo supporre

$$L_{x_1=0} = 0, \quad M_{x_2=0} = 0.$$

*) Sarebbe veramente $R = 1$ all' annullarsi del primitivo parametro, cui corrisponderebbe per il nuovo un valore costante k_0; ma disponendo opportunamente di una costante additiva nella funzione che dà il nuovo espresso per il vecchio parametro, si può supporre $k_0 = 0$.

Infatti, ove fosse $L_{x_1=0} = l_2$, $M_{x_1=0} = m_1$, basterebbe includere l_2 ed m_1 rispettivamente in H_1 e K_2.

Se poi scriviamo (come faremo in seguito)

$$L_{x_2=0} = l_1, \qquad M_{x_1=0} = m_2,$$

avremo

$$l_{x_1=0} = L_{x_1=x_2=0} = 0, \qquad m_{x_2=0} = M_{x_1=x_2=0} = 0.$$

Queste osservazioni ci saranno utili nei §§ seguenti.

§ 8. La determinazione di R_3.

Ritorniamo alla equazione (6) e alla sua simmetrica, e cerchiamo col loro aiuto di determinare R_3.

La (6) per le (1') assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{C_1 D_2 - \xi}{R_3}\right\} = \frac{A_2 - D_2^2}{R_3^2} F_1,$$

e per le (3''). (fattovi $x_1 = 0$)

$$F_1 = -m_2' \qquad \left(m_2' = \frac{dm_2}{dx_2}\right)$$

da cui la (6) sotto la forma

$$\text{(6')} \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{C_1 D_2 - \xi}{R_3}\right\} = -m_2' \frac{A_2 - D_2^2}{R_3^2}.$$

Eliminando dapprima la funzione del 1° membro fra questa e la (4'); con una derivazione rispetto ad x_1; (ricordando che insieme con la (6') vale la sua simmetrica) otteniamo

$$\text{(6'')} \qquad \frac{\partial^2 \log R_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{l_1' m_2'}{R_3^2} = 0.$$

È d'uopo notare che insieme con questa debbono valere le

$$R_{x_1=0} = 1, \qquad R_{x_2=0} = 1.$$

Distinguiamo due casi. Se $l_1 = \text{cost}$ (e, per una osservazione già fatta, $l_1 = 0$), la (6'') si integra immediatamente: $R_3 = p_1 q_2$, da cui, per $x_1 = 0$,

$$1 = p_0 q_2 \quad \text{e} \quad R_3 = p_1 : p_0 = R_{x_2=0} = 1.$$

Se non sono costanti nè l_1, nè m_2, potremo considerare R_3 funzione di l_1, m_2 e scrivere la (6'') sotto la forma

$$\text{(6''')} \qquad R_3 \frac{\partial^2 R_3}{\partial l_1 \partial m_2} - \frac{\partial R_3}{\partial l_1}\frac{\partial R_3}{\partial m_2} + 1 = 0,$$

valendo insieme con questa le

$$\text{(7)} \qquad R_{l_1=0} = 1, \qquad R_{m_2=0} = 1.$$

Per risolvere il sistema procediamo nel modo seguente: Le (7) valgono rispettivamente per ogni valore di m_2 ed l_1: sarà perciò

$$(7') \qquad \left(\frac{\partial R_3}{\partial m_2}\right)_{l_1=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial R_3}{\partial l_1}\right)_{m_2=0} = 0,$$

per queste la (6'''), fattovi $l_1 = 0$, dà

$$\left[\frac{\partial^2 R_3}{\partial l_1 \, \partial m_2}\right]_{l_1=0} = -1,$$

che integrata rispetto ad m_2, porge

$$\left[\frac{\partial R_3}{\partial l_1}\right]_{l_1=0} = -m_2 + h_0.$$

Ma per $m_2 = 0$ questa e le (7') danno $h_0 = 0$; sarà quindi

$$(7'') \qquad \left[\frac{\partial R_3}{\partial l_1}\right]_{l_1=0} = -m_2.$$

Derivando prima una volta, poi due, poi tre, e così di seguito, la (6''') rispetto ad l_1, fattovi poi $l_1 = 0$ e integrando rispetto ad m_2, tenuto conto delle (7) e delle loro derivate, si ottiene facilmente

$$\left[\frac{\partial^p R_3}{\partial l_1^p}\right]_{l_1=0} = 0 \qquad \text{per } p > 1.$$

Queste mostrano che alla funzione R_3 considerata come funzione di l_1 è applicabile lo sviluppo del Mac-Laurin: per esse, per le (7) e per la (7''), R_3 assume la forma

$$R_3 = 1 - l_1 m_2$$

che comprende la $R_3 = 1$ del caso precedente.

§ 9. Le formole risolutive.

Siamo ora in grado di determinare le funzioni a_{rs}. Le (2'') per $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, rispettivamente, danno

$$D_2 = l_1 c_3 + w_3, \qquad C_1 = m_2 \partial_3 + z_3 \text{*)},$$

e per $x_1 = x_2 = 0$, $w_3 = \partial_3$, $z_3 = c_3$, e quindi

$$a_{13} = D_2 = l_1 c_3 + \partial_3; \qquad a_{23} = C_1 = c_3 + m_2 \partial_3.$$

La (4') per le (3''), fattovi $x_1 = 0$, dà

$$(4'') \qquad B_1 - C_1^2 = (a_3 - \partial_3^2)(k_3 - m_2)^2 + \frac{\varepsilon_3^2}{a_3 - \partial_3^2},$$

se è anche $x_2 = 0$,

$$(8) \qquad \frac{\varepsilon_3^2}{a_3 - \partial_3^2} = b_3 - c_3^2 - (a_3 - \partial_3^2)\, k_3^2:$$

*) Posto, al solito, $(C_1)_{x_2=0} = c_3$, $(D_2)_{x_1=0} = \partial_3$. Seguiremo anche nei casi analoghi questo metodo di notazione.

pure per $x_1 = x_2 = 0$ le (3'') danno (posto $\xi_{x_1=x_2=0} = e_3$)

$$(9) \qquad c_3\partial_3 - e_3 = (a_3 - \partial_3^2)\, k_3 = (b_3 - c_3^2)\, h_3.$$

Tenuto conto di queste la (4'') dà

$$a_{22} = B_1 = m_2^2 a_3 + 2 m_2 e_3 + b_3.$$

Simmetricamente avremo

$$a_{11} = A_2 = a_3 + 2 l_1 e_3 + l_1^2 b_3.$$

Inoltre per le (8), (9) la (4') (ricordando $R_3 = 1 - l_1 m_2$) dà facilmente

$$\xi - C_1 D_2 = \pm\, [(a_3 - \partial_3^2)\, m_2 + (b_3 - c_3^2)\, l_1 + (e_3 - c_3\partial_3)\,(1 + l_1 m_2)],$$

e, poichè queste, fattovi $x_1 = x_2 = 0$, mostrano che si deve assumere il segno superiore:

$$a_{12} = \xi = a_3 m_2 + b_3 l_1 + e_3(1 + l_1 m_2),$$

e il ds^2 assume la forma che gli abbiamo data nella introduzione.

Osserviamo anche che si può scrivere

$$dz_1 = dx_1 + m_2 dx_2, \qquad dz_2 = l_1\, dx_1 + d\, x_2$$

(perchè i secondi membri sono differenziali esatti). Allora il quadrato dell' elemento lineare delle superfici $x_3 = \text{cost.}$ prende la forma

$$ds_3^2 = a_0 dz_1^2 + b_0 dz_2^2 + 2 e_0\, dz_1\, dz_2,$$

con i coefficenti costanti. Le superfici $x_3 = \text{cost.}$ sono dunque sviluppabili.

Cap. IV.

Il terzo caso.

§ 10. Una osservazione preliminare.

Prima di procedere innanzi ci proponiamo di dimostrare che se due gruppi

$$\frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_h}\ (r, r' \neq h), \qquad \frac{\partial a_{ss'}}{\partial x_k}\ (s, s' \neq k),$$

non sono identicamente nulli, è nullo il corrispondente $a^{(hk)}$.

Supponiamo, per fissare le idee, $h = 1$, $k = 2$ e ammettiamo per il momento che possa essere $a^{(12)} \neq 0$.

Le (A) danno

$$(1) \qquad \frac{\partial a_{2r}}{\partial x_1} = 0 \ \ (r \neq 1), \qquad \frac{\partial a_{1s}}{\partial x_2} = 0 \ \ (s \neq 2),$$

da cui, scegliendo opportunamente il parametro x_3, $a_{33}=1$. Le (C) danno allora

$$\sum_p a^{(p1)} \frac{\partial a_{p3}}{dx_3}=0, \qquad \sum_p a^{(p2)} \frac{\partial a_{p3}}{\partial x_3}=0.$$

Se poniamo inoltre

$$\sum_p a^{(p3)} \frac{\partial a_{p3}}{\partial x_3}=-\frac{\partial \log \alpha}{\partial x_3},$$

(dove α è una opportuna funzione che possiamo supporre $\neq 0$) e moltiplichiamo questa equazione per a_{3k}, e le precedenti rispettivamente per a_{1k}, a_{2k} e sommiamo, otteniamo $\frac{\partial \alpha a_{3k}}{\partial x_3}=0$: ma per $k=3$ $(a_{33}=1)$ è $\frac{\partial \alpha}{\partial x_3}=0$, per cui

$$\frac{\partial a_{3k}}{\partial x_3}=0.$$

Queste e le (1) integrate danno, al più mutando i parametri x_1, x_2,

$$a_{13}=\varepsilon, \quad a_{23}=\eta, \quad a_{33}=1$$

(rappresentando con ε ed η lo zero o l'unità).

Le (C) danno anche luogo ad altre due equazioni, che facilmente si integrano, e danno, posto $\alpha a^{(12)}=\lambda(\neq 0)$,

$$a_{11}=\varepsilon^2+q_2\lambda^2; \quad a_{22}=\eta^2+p_1\lambda^2; \quad a_{12}=\varepsilon\eta+\lambda.$$

Il confronto delle (F), (G) (per $h=1$, $k=2$) dà allora

$$\frac{\partial q_2\lambda^2}{\partial x_2}\frac{\partial p_1\lambda^2}{\partial x_1}=0,$$

che si può scrivere

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1}=0.$$

Questa, insieme con le (1) condurrebbe alle

$$\frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_h}=0, \quad (r, r'\neq h)$$

per $h=1$ oppure per $h=2$, contro le nostre ipotesi.

Sarà dunque $a^{(12)}=0$, come volevamo dimostrare.

§ 11. Il terzo caso.

Sia

$$(2) \qquad \frac{\partial a_{tt'}}{\partial x_3}=0 \quad (t, t'\neq 3),$$

mentre non sia identicamente nullo il gruppo delle

$$\frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_1} \quad (r, r'\neq 1)$$

e neppure identicamente nullo il gruppo delle

$$\frac{\partial a_{ss'}}{\partial x_3} \quad (s, s' \neq 2).$$

Sarà allora (V. § precedente) $a^{(12)} = 0$.

Dalle (C) abbiamo

$$\sum_p a^{(p1)} \frac{\partial a_{p3}}{\partial x_3} - \frac{1}{2} a^{(13)} \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} = 0, \qquad \sum_p a^{(p2)} \frac{\partial a_{p3}}{\partial x_3} - \frac{1}{2} a^{(23)} \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} = 0;$$

per le (2) possiamo anche scrivere

$$\sum_p a^{(p3)} \frac{\partial a_{p3}}{\partial x_3} - \frac{1}{2} a^{(33)} \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} = \frac{\partial \log \sqrt{a}}{d x_3}.$$

Moltiplicando questa per a_{3k} e le due precedenti rispettivamente per a_{1k}, a_{2k}, e sommando otteniamo le

$$2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{a_{3k}}{\sqrt{a}} \right\} = \frac{\varepsilon_{3k}}{\sqrt{a}} \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3}$$

che integrate danno

$$a_{13} = A_3 \sqrt{a C_3}, \ a_{23} = B_3 \sqrt{a C_3}, \ a_{33} = a C_3;$$

per questa la $a^{(12)} = 0$ dà anche

$$a_{12} = A_3 B_3.$$

Le (B) si riducono alle

$$\sum_p a^{(p2)} \frac{\partial a_{p3}}{\partial x_1} = 0, \qquad \sum_p a^{(p1)} \frac{\partial a_{p3}}{\partial x_2} = 0$$

da cui, integrando e ricordando le precedenti, al più mutando i parametri x_1, x_2,

$$a_{13} = \varepsilon a C_3, \quad a_{23} = \eta a C_3, \quad a_{33} = a C_3, \quad a_{12} = \varepsilon \eta a C_3.$$

Risulta allora che anche a è funzione indipendente da x_3, e potremo porre $a C_3 = H_3$.

Poichè anche a_{11} e a_{22} sono per le (2) indipendenti da x_3, potremo porre anche

$$a_{11} = E_3 + \varepsilon H_3, \qquad a_{22} = F_3 + \eta H_3$$

(E_3, $F_3 \neq 0$ perchè tali $a^{(22)}$, $a^{(11)}$). Allora le (D), (E), (G) si riducono all'unica (per $h = 1$, $k = 2$):

$$(3) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{1}{H_3} + \frac{\partial \log E_3}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{H_3} + \frac{\partial \log F_3}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{H_3} = 0.$$

Per questa le (F) si scrivono ($h = 2$, $k = 1$ e viceversa)

$$\frac{\partial^2 \log E_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \log F_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial \log E_3}{\partial x_2} \frac{\partial \log F_3}{\partial x_1}.$$

La prima di queste integrata, dà, introducendo una funzione ausiliaria G_3,

$$E_3 = p_1^2 G_3 H_3, \quad F_3 = q_2^2 G_3 H_3.$$

Per queste la seconda e la (3) assumono rispettivamente la forma

$$\frac{\partial^2 G_3 H_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 G_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

e, integrando,

$$G_3 H_3 = a_1 - b_2, \qquad G_3 = c_1 - \partial_2.$$

Dall' insieme delle formole sopra scritte, mutando nuovamente i parametri, scrivendo l_1 in luogo di $\frac{\varepsilon}{p_1}$, m_2 in luogo di $\frac{\eta}{q_2}$, ricaviamo

$$a_{11} = (a_1 - b_2)\left(1 + \frac{l_1^2}{c_1 - \partial_2}\right); \quad a_{22} = (a_1 - b_2)\left(1 + \frac{m_2^2}{c_1 - \partial_2}\right); \quad a_{33} = \frac{a_1 - b_2}{c_1 - \partial_2}$$

$$a_{12} = l_1 m_2 \frac{a_1 - b_2}{c_1 - \partial_2}; \qquad a_{23} = m_2 \frac{a_1 - b_2}{c_1 - \partial_2}; \qquad a_{13} = l_1 \frac{a_1 - b_2}{c_1 - \partial_2}.$$

Il ds^2 assume allora la forma datagli nella introduzione. Osserviamo anche che il ds^2 relativo alle superfici $x_3 = \text{cost.}$ è indipendente da x_3, dunque tali superfici sono applicabili l'una sull' altra.

Posto

$$l_1\, dx_1 + m_2\, dx_2 + dx_3 = dz$$

(il primo membro è un differenziale esatto) il ds^2 della nostra varietà assume anche la forma

$$ds^2 = (a_1 - b_2)\left[dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{dz^2}{c_1 - \partial_2}\right],$$

quindi le superfici x_1, x_2, z appartengono ad un sistema triplo ortogonale. Il quadrato dell' elemento lineare assume sulle superfici $z = \text{cost.}$ la forma di Liouville: quello delle $x_1 = \text{cost.}$, e delle $x_2 = \text{cost.}$ si riduce facilmente al tipo

$$du^2 + E(u)\, dv^2.$$

Per ambedue i sistemi di superfici le $u = \text{cost.}$ (paralleli di una superficie di rotazione) sono le linee $x_1 = \text{cost.}$ $x_2 = \text{cost.}$, il che giustifica la nostra asserzione di pagina 399.

Cap. V.

Il quarto caso.

§ 12. Il caso dello Stäckel.

Nessuno dei gruppi $\frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_1}(r, r'+1)$, $\frac{\partial a_{ss'}}{\partial x_2}(s, s'+2)$, $\frac{\partial a_{tt'}}{\partial x_3}(t, t'+3)$ è identicamente nullo. Come abbiamo dimostrato nel § 10, avremo allora $a^{(12)} = a^{(23)} = a^{(31)} = 0$; le superfici coordinate costituiscono allora un sistema triplo ortogonale.

Siamo dunque nel caso dello Stäckel, che lo trattò elegantemente (per n qualunque) tenendo conto delle costanti che entrano nell' integrale completo della equazione di Hamilton-Jacobi.

Le nostre formole generali condurrebbero con tutta semplicità alla osservazione che le superfici di un sistema sono tagliate da quelle degli altri due in congruenze isoterme di Liouville*); ma non sembra altrettanto semplice ottenere l'espressione dei coefficenti del ds^2 della nostra varietà: nè conviene ricercarla con fatica, quando con tanta semplicità ed eleganza potè per altra via ricavarla lo Stäckel.

La soluzione data da questi si può scrivere

$$a_{hh} = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_{h+1} & q_{h+2} \\ p_{h+1} & p_{h+2} \end{vmatrix}}$$

dove numeratore e denominatori sono diversi da zero. Allora, al più aggiungendo, come è lecito, alle ultime righe di essi le penultime moltiplicate per un opportuno k_0**) potremo supporre gli elementi di tale

---

*) Le (F) danno facilmente, con una integrazione,

$$a_{hh}\frac{\partial \log a_{h+1\,h+1}}{\partial x_h} = A_{h+1}; \quad a_{hh}\frac{\partial \log a_{h+2\,h+2}}{\partial x_h} = B_{h+2}.$$

Per queste le (D) con una integrazione danno

$$A_{h+1} - B_{h+2} = a_{h+1\,h+1}\,C_{h+2} = a_{h+2\,h+2}\,D_{h+1}$$

e per $x_h = \text{cost.}$:

$$a_{h+2} - b_{h+1} = a_{h+1\,h+1}\,c_{h+1} = a_{h+2\,h+2}\,d_{h+2}.$$

Questa mostra che, al più mutando i parametri, il ds_1^2 assume la forma di Liouville.

**) Basta che k_0 non sia soluzione di nessuna delle equazioni

$$q_h k_0 + p_h = 0 \quad (h = 1, 2, 3).$$

Ciò è possibile perchè ciascuna di esse non ammette più di una soluzione.

ultima riga tutti diversi da zero, ed anche (dividendo ogni colonna per l'elemento dell' ultima riga e mutando i parametri convenientemente) porre $p_1 = p_2 = p_3 = \pm 1$.

Sarà, come nella introduzione:

$$a_{hh} = \frac{r_1(q_2 - q_3) + r_2(q_3 - q_1) + r_3(q_1 - q_2)}{|q_{h+1} - q_{h+2}|}$$

Per $x_3 =$ cost. abbiamo facilmente

$$\frac{a_{11}}{q_1 - q_0} = \frac{a_{22}}{q_0 - q_2} = \frac{r_1 - r_0}{q_1 - q_0} - \frac{r_2 - r_0}{q_2 - q_0}$$

che mutati i parametri, dà al ds_3^2 la forma di Liouville; analogamente per $x_1 =$ cost., $x_2 =$ cost. Ciò giustifica il nostro asserto della introduzione.

Non ci sono altri casi possibili oltre a questi quattro.

La integrazione delle (a), (b), (c), (d), (e) non presenta, caso per caso, alcuna difficoltà.

Mantova 28 di Maggio del 1908.

Berichtigung zu „Ein Satz von Routh“.

Math. Ann. Bd. 64, S. 239—247.

Von

Philipp Frank in Wien.

---

1. Der für den auf S. 245 aufgestellten Satz gegebene Beweis ist nur für solche mechanischen Probleme richtig, für welche die orthogonalen Trajektorien der Niveaukurven Bahnkurven sind. Alle angeführten Beispiele sind von dieser Art. Der Satz selbst hingegen gilt allgemein, wie an anderer Stelle bewiesen werden soll. Nur tritt in der angegebenen Formulierung an Stelle von „orthogonale Trajektorie“ immer „Bahnkurve, die auf der Grenzkurve $h - V = 0$ senkrecht steht“. Diese Ersetzung ist auch an allen anderen Stellen der Abhandlung vorzunehmen.

2. In dem S. 246 behandelten Beispiel ist für die Funktion φ die Voraussetzung

$$\varphi(x, y, -x', -y') = \pm\, \varphi(x, y, x', y')$$

zu machen.

Wien, Oktober 1908.

Hermann Minkowski †.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen steht unter dem tiefen Eindruck von Hermann Minkowskis jähem Tode. Am 12. Januar, dem Todestag Fermats, ist er an einer Blinddarmentzündung gestorben, aus voller, frischer Tätigkeit weggerissen.

Wir behalten uns eine eingehende Würdigung seines Lebenswerkes als liebe Pflicht für eine spätere Gelegenheit vor. Nur seiner besonderen Beziehungen zu den Annalen dürfen wir schon heute in kurzen Worten gedenken.

Von der wissenschaftlichen Produktion Minkowskis ist nur ein kleiner Teil in den Annalen niedergelegt, da er die Publikation in Akademieschriften oder in Buchform bevorzugte. Aber die beiden Arbeiten, die wir von ihm besitzen, sind besonders dazu geeignet, weitere Kreise in das Wesen und die Bedeutung der eigentümlichen geometrischen Begriffsbildungen Minkowskis einzuführen. Die anschauliche Darstellung und Vertiefung der Kettenbruchentwicklungen in dem Aufsatz „Über die Annäherung an eine reelle Größe durch rationale Zahlen" (Bd. 54) hat wesentlich dazu beigetragen, seine Theorie der ebenen Gitter in ihren Beziehungen zu den konvexen Figuren populär zu machen. Die große zusammenfassende Darstellung „Volumen und Oberfläche" (Bd. 57) zeigt die Tragweite seiner Methoden auf rein geometrischem Gebiet, indem Volumen, Oberfläche und mittlere Gesamtkrümmung eines konvexen Körpers als Spezialfälle eines und desselben allgemeinen Begriffes, des gemischten Volumens, dargestellt und dadurch vergleichbar gemacht werden.

Vor allem aber hat die Annalen-Redaktion der stillen, bescheidenen und wirkungsvollen Tätigkeit zu gedenken, die Minkowski mit steter, liebevoller Bereitwilligkeit bei der Begutachtung von Manuskripten, besonders zahlen-

theoretischen Inhaltes, im Interesse der Annalen auf sich nahm. Dieselben Eigenschaften, die in seiner wissenschaftlichen Leistung und in seinem Lehrberuf so wohltuend in Erscheinung traten, das präzise und gründliche Eingehen auf fremde Gedanken, die klare, niemals ruhende und doch wohlwollende Kritik, haben den Annalen in aller Stille unersetzliche Dienste geleistet. Im Sommer letzten Jahres ist dann, nach Adolph Mayers Tod, Minkowski auch förmlich in die Redaktion der Annalen eingetreten. Wir durften uns davon weitgehende Förderung und Anregung nach jeder Richtung versprechen: das sind Hoffnungen, die nun zu Grabe getragen sind.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen.

Über die Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und einer Klasse verwandter Funktionen.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Einleitung.

Die Riemannsche Funktion $\zeta(s)$ hat bekanntlich im Punkt $s = 1$ einen Pol erster Ordnung, ist sonst überall regulär, hat die Punkte $s = -2, -4, -6, \cdots, -2n, \cdots$ (n positiv-ganz) zu Nullstellen erster Ordnung und außerdem nur noch unendlich viele nicht reelle Nullstellen α_n $(n = 1, 2, \cdots)$, für welche

$$0 < \Re(\alpha_n) < 1$$

ist und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^2}$$

konvergiert.*) Wenn also die Nullstellen $-2n$ und α_n promiscue mit $s_1, s_2, \cdots$ bezeichnet werden, ist nach der Weierstraßschen Produktdarstellung einer ganzen transzendenten Funktion

$$(s-1)\,\zeta(s) = e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n}},$$

wo $g(s)$ eine ganze transzendente Funktion ist; bekanntlich ist hierin $g(s)$ eine lineare Funktion, also $\left(\text{wegen}^{**}\right)\ \zeta(0) = -\frac{1}{2}\right)$

$$(1) \qquad (s-1)\,\zeta(s) = \frac{1}{2}\, e^{As} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n}},$$

*) Hierbei sind etwaige mehrfache Nullstellen mehrfach aufgeführt.

**) Auf den Wert von $\zeta(0)$ kommt es übrigens nicht an, da der betreffende Faktor beim Differentiieren fortfallen wird und auf (4) keinen Einfluß mehr hat.

wo A eine Konstante bezeichnet, und bei konstantem B

$$(2)\qquad (s-1)\,\zeta(s)=\frac{1}{2}\,e^{Bs}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\alpha_n}\right)e^{\frac{s}{\alpha_n}},$$

kurz geschrieben:

$$(3)\qquad \zeta(s)=\frac{e^{Bs}}{2(s-1)}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\prod_{\alpha}\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)e^{\frac{s}{\alpha}},$$

sowie

$$(4)\qquad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=B-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}+\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Endlich ist bekanntlich

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\pi^{-\frac{1}{2}+s}\,\zeta(1-s).$$

Der Leser, welcher aus der Theorie der Zetafunktion noch nichts kennt, findet möglichst einfache Beweise aller dieser Tatsachen in einer kürzlich erschienenen Arbeit*) von mir zusammengestellt. Man verdankt diese wichtigen Ergebnisse, welche Riemann nur zum kleineren Teil bewiesen hatte, Herrn **Hadamard**. Aber es war Herrn **von Mangoldt** vorbehalten, unter Benutzung der Hadamardschen Ergebnisse durch Hinzufügung einer längeren Kette von weiteren scharfsinnigen Schlüssen folgende von Riemann**) ausgesprochene Vermutung zu beweisen:

---

*) „Beiträge zur analytischen Zahlentheorie" [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 26 (2. Semester 1908), S. 169—302], S. 181—186, 194—208. Die dort auf S. 208, Z. 8 vorkommende Gleichung

$$\zeta(s)=\frac{c}{s-1}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\,\pi^{\frac{s}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\alpha_n}\right),$$

wo die α_n in einer bestimmten Reihenfolge geordnet sind und $c=-\zeta(0)=\frac{1}{2}$ ist, ist mit (2) gleichbedeutend. In (1), (2), (3), (4) ist die Reihenfolge der Wurzeln unerheblich.

**) „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" [Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1859, S. 671—680; Werke, 2. Aufl. (1892), S. 145—155], S. 674 bezw. S. 147—148. Riemanns Ausdruck „bis auf einen Bruchtheil von der Ordnung der Grösse $\frac{1}{T}$" glaube ich mit $O(\log T)$, was ja $\frac{1}{T}$ der wahren Größenordnung ist, richtig interpretiert zu

Es sei $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$, deren Ordinate zwischen 0 (exkl.) und der positiven Größe T (inkl.) liegt. Dann ist

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log(2\pi)}{2\pi} T + O(\log T). \tag{5}$$

Herr Hadamard*) hatte ausdrücklich hervorgehoben, daß er nicht einmal die Existenz von

$$\lim_{T=\infty} \frac{N(T)}{T \log T}$$

beweisen konnte; Herr von Mangoldt bewies alsdann zunächst**), daß

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log(2\pi)}{2\pi} T + O(\log^2 T)$$

ist, und mehrere Jahre später***) die Riemannsche Vermutung (5) in vollem Umfange.

Es ist mir nun gelungen, den von Mangoldtschen Beweis der Riemannschen Vermutung (5) an mehreren Stellen zu vereinfachen, so daß er jetzt sehr kurz geworden ist; ich werde die neue Beweisanordnung im § 2 darstellen. Zur Bequemlichkeit des Lesers schicke ich im § 1 direkte Beweise einiger bekannten Ungleichungen über die Gammafunktion voraus; dadurch habe ich nicht nötig, auf die komplizierten und für den vorliegenden Zweck unnötig tiefgehenden Untersuchungen von Stieltjes†) Bezug zu nehmen, was Herr von Mangoldt tut. Im § 2 folgt dann der neue Beweis von (5).

Der Kern des Beweises von (5) liegt in der Feststellung der Tatsache, daß††) bei Fortsetzung längs der (von Wurzeln frei voraussetzbaren) Ordinate T

$$\Im \log \zeta(-1 + Ti) = O(\log T),$$

d. h. daß bei gerader Bahn

---

haben; denn $O\left(\frac{1}{T}\right)$ (was manche Autoren aus jenem Passus herauslesen, um einen Irrtum bei Riemann zu konstatieren) kann Riemann nicht gemeint haben. Riemann wußte doch, daß die ganze Zahl $N(T)$ nicht mit einem Fehler $O\left(\frac{1}{T}\right)$ durch eine stetige Funktion dargestellt werden kann.

*) „Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann" [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 9 (1893), S. 171—215], S. 214—215.

**) „Zu Riemanns Abhandlung „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"" [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 114 (1895), S. 255—305], S. 257—273.

***) „Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$" [Mathematische Annalen, Bd. 60 (1905), S. 1—19], S. 2—11.

†) „Sur le développement de $\log \Gamma(a)$" [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 5 (1889), S. 425—444].

††) In $s = u + vi$ (u, v reell) schreibe ich $u = \Re(s)$, $v = \Im(s)$.

$$\Im \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = O(\log T) \tag{6}$$

ist. Bis auf diese Hauptschwierigkeit geht alles ganz glatt; aus dem kürzlich veröffentlichten Briefwechsel von Hermite und Stieltjes*) geht sogar hervor, daß Stieltjes schon die Relation

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1+\log(2\pi)}{2\pi} T + O(\log T) + O(|\Im \log \zeta(-1+Ti)|) \tag{7}$$

beweisen konnte. Der fehlende Nachweis von (6) ist zuerst in der zweiten der genannten von Mangoldtschen Arbeiten enthalten und wird nun am Ende des § 2 einfacher geführt. Beide Male wird zunächst bewiesen, daß

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T) \tag{8}$$

ist (woraus nur

$$N(T) = O(T \log T),$$

also bei weitem noch nicht (5) folgt), und alsdann wird unter nochmaliger Heranziehung der tiefsten bekannten Eigenschaften der Zetafunktion (6) bewiesen. Ich habe außer dem Wege des § 2 noch einen anderen von (8) zu (6) gefunden, der mir recht merkwürdig erscheint; er benutzt die tieferen Eigenschaften von $\zeta(s)$ nicht nochmals, sondern macht im Gegenteil nicht einmal davon Gebrauch, daß $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene existiert. Mit anderen Worten, ich habe gefunden, daß eine viel allgemeinere Funktionenklasse die Eigenschaft (6) besitzt, deren Nachweis bei $\zeta(s)$ bisher nur auf sehr speziellem Wege gelang. Diesen allgemeinen funktionentheoretischen Satz werde ich im § 3 entwickeln.

Im § 4 werde ich zum ersten Mal den Nachweis führen: Für jede Dirichletsche Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

wo $\chi(n)$ einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter der Gruppe der zu k teilerfremden Restklassen bezeichnet, ist die Anzahl $N(T)$ der im Konvergenzgebiet $\sigma > 0$ gelegenen Nullstellen mit Ordinate zwischen 0 (exkl.) und T (inkl.) von der Gestalt

$$N(T) = \alpha T \log T + \beta T + O(\log T),$$

*) „Correspondance d' Hermite et de Stieltjes", Bd. 2 (Paris, 1905), Appendice („Lettres de Stieltjes à M. Mittag-Leffler sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", S. 445—457), vergl. insbesondere S. 452—456. Dort steht sogar rechts $O(1)$ statt des $O(\log T)$ in (7). Diese Genauigkeit ist aber unnötig, da man beim heutigen Stand der Wissenschaft über das letzte Glied in (7) doch nur aussagen kann, daß es $O(\log T)$ ist.

wo α und β Konstanten sind, von denen übrigens α den von k und der speziellen Wahl des Charakters unabhängigen Wert

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}$$

hat. Dadurch wird sich ohne weiteres die Anzahl aller Nullstellen der durch die Dirichletsche Reihe definierten ganzen transzendenten Funktion $L(s)$, deren absolute Beträge $\leqq T$ sind, in der Gestalt

$$\mathsf{A}T\log T + \mathsf{B}T + O(\log T)$$

abschätzen lassen.

In § 5 werde ich einige (nach dem bekannten Vorbild von $\zeta(s)$ näherliegende) Folgerungen aus den bekannten Eigenschaften von $L(s)$ ziehen; ich werde nachweisen: es ist eine positive Konstante a vorhanden, so daß für $t \geqq 2$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log t}$

$$L(s) \neq 0$$

ist.

§ 1.

Hilfssätze über die Gammafunktion.

Hilfssatz (I): *Für positives ω ist*

$$\Re\left(\frac{\Gamma'(\omega i)}{\Gamma(\omega i)}\right) = \log\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Beweis: Es ist

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{Cs} s \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}},$$

(9)
$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n}\right),$$

$$\Re\left(\frac{\Gamma'(\omega i)}{\Gamma(\omega i)}\right) = -C + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+\omega^2}\right),$$

folglich (wobei ich unter einer nicht ganzzahligen Summationsgrenze u den Wert $[u]$ verstehe)

$$\Re\left(\frac{\Gamma'(\omega i)}{\Gamma(\omega i)}\right) = -C + \sum_{n=1}^{\omega^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+\omega^2}\right) + \omega^2\sum_{n=\omega^2+1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+\omega^2)}$$

$$= -C + \sum_{n=1}^{\omega^2}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\omega^2}\frac{n}{n^2+\omega^2} + O\left(\omega^2\sum_{n=\omega^2}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -C + \log(\omega^2) + C + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \sum_{n=1}^{\omega^2}\frac{n}{n^2+\omega^2} + O\left(\frac{\omega^2}{\omega^4}\right)$$

(10)
$$= 2\log\omega + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \sum_{n=1}^{\omega^2}\frac{n}{n^2+\omega^2}.$$

Die Funktion $\frac{u}{u^2+\omega^2}$ hat für $u=\omega$ ihren größten Wert $\frac{1}{2\omega}$; folglich ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\omega^2}\frac{n}{n^2+\omega^2} &= \int_0^{\omega^2}\frac{u\,du}{u^2+\omega^2}+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log(\omega^4+\omega^2)-\frac{1}{2}\log(\omega^2)+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\\ &= 2\log\omega+O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)-\log\omega+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\\ &= \log\omega+O\left(\frac{1}{\omega}\right),\end{aligned}$$

also in Verbindung mit (10)

$$\Re\left(\frac{\Gamma'(\omega i)}{\Gamma(\omega i)}\right)=\log\omega+O\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz (II): *Wenn zwei reelle Zahlen b_0 und $b_1>b_0$ gegeben sind, so ist für $b_0\leqq b\leqq b_1$ gleichmäßig*

$$\frac{\Gamma'(b+\omega i)}{\Gamma(b+\omega i)}=O(\log\omega).$$

Beweis: Es sei β die größere der beiden Zahlen $|b_0|$, $|b_1|$. ω werde $>2\beta$ angenommen. Aus (9) folgt für $s=b+\omega i$, $b_0\leqq b\leqq b_1$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| &\leqq C+\frac{1}{|s|}+|s|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n|s+n|}\\ &\leqq C+\frac{1}{\omega}+(\beta+\omega)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\omega^2+(n+b)^2}}\\ &= O(1)+O\left(\omega\sum_{n=1}^{\omega}\frac{1}{n\omega}\right)+O\left(\omega\sum_{n=\omega+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-\beta)}\right),\end{aligned}$$

also, da in der letzten Summe $n>2\beta$, d. h. $n-\beta>\frac{n}{2}$ ist,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} &= O(1)+O\left(\omega\frac{\log\omega}{\omega}\right)+O\left(\omega\sum_{n=\omega+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\\ &= O(\log\omega)+O\left(\omega\cdot\frac{1}{\omega}\right)\\ &= O(\log\omega).\end{aligned}$$

Hilfssatz (III): *Es ist für jedes feste reelle b*

$$\int_1^{\omega}\Re\left(\frac{\Gamma'(b+ti)}{\Gamma(b+ti)}\right)dt=\omega\log\omega-\omega+O(\log\omega).$$

Beweis: 1) Für $b = 0$ ist nach dem Hilfssatz (I)

$$\Re\left(\frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)}\right) = \log t + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

also

$$\int_1^\omega \Re\left(\frac{\Gamma'(b+ti)}{\Gamma(b+ti)}\right) dt = \int_1^\omega \Re\left(\frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)}\right) dt$$

$$= \int_1^\omega \log t\,dt + O\int_1^\omega \frac{dt}{t}$$

$$= \omega \log \omega - \omega + O(\log \omega).$$

2) Für $b \gtrless 0$ werde der Cauchysche Satz auf das Rechteck mit den Ecken $b+i$, $b+\omega i$, ωi, i angewendet. Dies ergibt

$$\int_{b+i}^{b+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds = \int_{b+i}^{i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds + \int_{i}^{\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds + \int_{\omega i}^{b+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds,$$

also, da nach dem Hilfssatz (II) im letzten Integral der Integrand gleichmäßig $= O(\log \omega)$ ist,

$$\int_{b+i}^{b+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds = O(1) + \int_{i}^{\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds + O(\log \omega),$$

$$\Im \int_{b+i}^{b+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds = \Im \int_{i}^{\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds + O(\log \omega),$$

$$\int_1^\omega \Re\left(\frac{\Gamma'(b+ti)}{\Gamma(b+ti)}\right) dt = \int_1^\omega \Re\left(\frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)}\right) dt + O(\log \omega),$$

also nach dem Ergebnis des Falles 1) auch hier

$$= \omega \log \omega - \omega + O(\log \omega).$$

Aus dem Hilfssatz (III) folgt ohne weiteres

$$\int_1^\omega \Re\left(\frac{\Gamma'(b-ti)}{\Gamma(b-ti)}\right) dt = \omega \log \omega - \omega + O(\log \omega).$$

§ 2.

Neue Beweisanordnung für den Riemann- von Mangoldtschen Satz über die Verteilung der Nullstellen der Zetafunktion.

$N(T)$ bedeute die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$, deren Ordinaten zwischen 0 (exkl.) und T (inkl.) liegen.

Hilfssatz (IV): *Es ist*

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T)$$

Beweis: Aus (4) folgt

$$\sum_\alpha \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - B + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

Für $s = 2 + Ti$ ist daher, weil dort

$$\begin{aligned}\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| &= \left|\sum_p \log p \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right)\right| \\ &\leqq \sum_p \log p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \cdots\right) \\ &= O(1)\end{aligned}$$

ist, unter Anwendung des zweiten Hilfssatzes $\left(\frac{s}{2} + 1 = 2 + \frac{T}{2}i\right)$

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \left(\frac{1}{2+Ti-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) &= O(1) + O(1) + O\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{2}O\left(\log\frac{T}{2}\right) \\ &= O(\log T),\end{aligned}$$

also a fortiori

$$\sum_\alpha \Re\left(\frac{1}{2+Ti-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = O(\log T).$$

Wird

$$\alpha = \beta + \gamma i$$

gesetzt, wo also stets*) $0 \leqq \beta \leqq 1$ ist, so ist demnach

$$\sum_\alpha \left(\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right) = O(\log T),$$

folglich, wegen

$$\frac{1}{4}\frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \leqq \frac{1}{4+(T-\gamma)^2} < \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} \leqq \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2},$$

$$\sum_\alpha \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} = O(\log T). \tag{11}$$

Wenn in $\sum_\alpha{}'$ nur diejenigen — etwa vorhandenen — Nullstellen α berücksichtigt werden, deren Ordinate γ zwischen T (exkl.) und $T+1$ (inkl.) liegt, so ist

$$\sum_\alpha \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} > \sum_\alpha{}' \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \geqq \sum_\alpha{}' \frac{1}{2} = \frac{N(T+1)-N(T)}{2},$$

*) Die Kenntnis der Tatsache, daß $0 < \beta < 1$ ist, gebrauche ich nicht einmal.

also nach (11)

$$N(T+1)-N(T)=O(\log T),$$

womit der Hilfssatz (IV) bewiesen ist.

Derselbe liefert offenbar

$$\begin{aligned} N(T) &= \sum_{n=1}^{T}(N(n)-N(n-1))+(N(T)-N[T]) \\ &= O\sum_{n=1}^{T}\log n+O(\log T) \\ &= O(T\log T). \end{aligned}$$

Hilfssatz (V): *α durchlaufe in $\sum_{\alpha}''$ nur die Nullstellen, für welche $\gamma \leqq T-1$ oder $\gamma \geqq T+1$, d. h. $|T-\gamma| \geqq 1$ ist. Dann ist*

$$\sum_{\alpha}''\frac{1}{(T-\gamma)^2}=O(\log T).$$

Beweis: Aus (11) ergibt sich wegen

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{1+(T-\gamma)^2}\geqq\sum_{\alpha}''\frac{1}{1+(T-\gamma)^2}\geqq\sum_{\alpha}''\frac{1}{2(T-\gamma)^2}$$

unmittelbar die Behauptung.

Jetzt komme ich zur eigentlichen Sache. $\varepsilon>0$ sei so gewählt, daß für $-1\leqq\sigma\leqq 2,\ 0<t\leqq\varepsilon$ die Zetafunktion nicht verschwindet*). $T>\varepsilon$ sei so gewählt (was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist**)), daß keine Nullstelle von $\zeta(s)$ die Ordinate T hat. Das Integral

*) Daß sogar der Wert $\varepsilon=14$ dies leistet, braucht man nicht zu wissen. Die Existenz eines $\varepsilon>0$ ist klar.

**) Überhaupt würde es genügen, (5) für eine abzählbare, ins Unendliche monoton wachsende Folge von Werten $T=T_1, T_2, T_3, \cdots$ zu beweisen, für welche

$$T_{n+1}=T_n+O(1)$$

ist, um schließen zu können, daß (5) überhaupt für positives T gilt. Denn für $T_n\leqq T\leqq T_{n+1}$ liegt $N(T)$ zwischen $N(T_n)$ und $N(T_{n+1})$, und aus

$$N(T_n)=\alpha T_n\log T_n+\beta T_n+O(\log T_n),$$
$$N(T_{n+1})=\alpha T_{n+1}\log T_{n+1}+\beta T_{n+1}+O(\log T_{n+1})$$

folgt, wegen

$$\log T_{n+1}=\log T_n+O\left(\frac{1}{T_n}\right),$$

$$\begin{aligned} N(T_{n+1}) &= \alpha(T_n+O(1))\left(\log T_n+O\left(\frac{1}{T_n}\right)\right)+\beta(T_n+O(1))+O(\log T_n) \\ &= \alpha T_n\log T_n+\beta T_n+O(\log T_n), \end{aligned}$$

daß

$$\begin{aligned} N(T) &= \alpha T_n\log T_n+\beta T_n+O(\log T_n) \\ &= \alpha T\log T+\beta T+O(\log T) \end{aligned}$$

ist.

$$\int \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$$

werde im positiven Sinne über das Rechteck mit den Ecken $-1+ti$, $2+ti$, $2+Ti$, $-1+Ti$ erstreckt, auf dessen Rand keine Nullstelle von $\zeta(s)$ liegt. Dann hat das Integral den Wert $2\pi i N(T)$. Also ist

$$(12) \qquad 2\pi i N(T) = \int\limits_{-1+ti}^{2+ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + \int\limits_{2+ti}^{2+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + \int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + \int\limits_{-1+Ti}^{-1+ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds.$$

Hierin ist, da das erste Integral von T unabhängig ist,

$$(13) \qquad \int\limits_{-1+ti}^{2+ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = O(1);$$

ferner ist, wenn p alle Primzahlen, m alle positiven ganzen Zahlen durchläuft,

$$(14) \qquad \left| \int\limits_{2+ti}^{2+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right| = \left| \sum_{p,m} \frac{1}{m p^{m(2+Ti)}} - \sum_{p,m} \frac{1}{m p^{m(2+ti)}} \right| \leqq 2 \sum_{p,m} \frac{1}{m p^{2m}} = O(1).$$

Aus (12), (13) und (14) ergibt sich bei geraden Bahnen

$$(15) \qquad 2\pi N(T) = \Im \int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + \Im \int\limits_{-1+Ti}^{-1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + O(1).$$

Zur Abschätzung des letzten Integrals in (15) werde die Funktionalgleichung

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \pi^{-\frac{1}{2}+s} \zeta(1-s)$$

benutzt. Aus ihr folgt

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + \log \pi - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)},$$

also

$$\Im \int\limits_{-1+Ti}^{-1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = -\int\limits_0^T \Re\left(\frac{\zeta'(-1+ti)}{\zeta(-1+ti)}\right) dt$$

$$-\frac{1}{2} \int\limits_0^T \Re\left(\frac{\Gamma'\left(1-\frac{t}{2}i\right)}{\Gamma\left(1-\frac{t}{2}i\right)}\right) dt + \frac{1}{2} \int\limits_0^T \Re\left(\frac{\Gamma'\left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}i\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}i\right)}\right) dt - T \log \pi$$

$$- \Im \int\limits_{-1+Ti}^{-1} \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} ds;$$

nach dem Hilfssatz (III) und mit Rücksicht auf

$$\int_{-1+Ti}^{-1}\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}ds=\int_{2}^{2-Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds=\sum_{p,m}\frac{1}{mp^{m(2-Ti)}}-\sum_{p,m}\frac{1}{mp^{2m}}=O(1)$$

erhält man also

$$\begin{aligned}\Im\int_{-1+Ti}^{-1}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds&=\frac{T}{2}\log\frac{T}{2}-\frac{T}{2}+O(\log T)+\frac{T}{2}\log\frac{T}{2}-\frac{T}{2}\\&\quad+O(\log T)-T\log\pi+O(1)\\&=T\log T-(1+\log(2\pi))\,T+O(\log T),\end{aligned}$$

folglich nach (15)

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log T-\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T+O(\log T)+\frac{1}{2\pi}\Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds. \tag{16}$$

Für den Nachweis von (5) fehlt also nur noch der Beweis, daß

$$\Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds=O(\log T) \tag{6}$$

ist; dies ist eben die Hauptschwierigkeit.

Ich gehe zu diesem Zwecke von (4) aus und zerlege die Summe in zwei Partialsummen $\sum_{\alpha}'$ und $\sum_{\alpha}''$, indem ich in $\sum_{\alpha}'$ alle diejenigen (etwa vorhandenen) α aufnehme, für welche $|T-\gamma|<1$ ist, in $\sum_{\alpha}''$ die übrigen, für welche also $|T-\gamma|\geqq 1$ ist*):

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=B-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}+\sum_{\alpha}'\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)+\sum_{\alpha}''\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$\begin{aligned}\Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds&=O(1)+O(1)+O\left|\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}ds\right|\\&\quad+\sum_{\alpha}'\Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)ds+\Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\sum_{\alpha}''\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)ds.\end{aligned} \tag{17}$$

---

*) Letzteres sind gerade die beim Hilfssatz (V) in $\sum_{\alpha}''$ aufgenommenen Werte. $\sum_{\alpha}'$ ist nicht mit dem $\sum_{\alpha}'$ des Hilfssatzes (IV) zu verwechseln; das gegenwärtige $\sum_{\alpha}'$ hat aber nach dem Hilfssatz (IV) auch nur $O(\log T)$ Glieder.

Auf der rechten Seite von (17) ist das dritte Glied nach dem Hilfssatz (II) gleich $O(\log T)$. Das vierte Glied ist $= O(\log T)$, da $\sum'$ höchstens $N(T+1) - N(T-1)$, also nach dem Hilfssatz (IV) nur $O(\log T)$ Summanden hat und jeder Summand gleichmäßig $= O(1)$ ist (da die Amplitude von $s - \alpha$ sich um weniger als π verändert). Alles ist also bewiesen, wenn ich zeigen kann, daß das fünfte Glied $= O(\log T)$ ist, also a fortiori, wenn dargetan werden kann, daß auf dem geraden Wege von $2 + Ti$ bis $-1 + Ti$ gleichmäßig

$$\sum_\alpha{}''\left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = O(\log T) \tag{18}$$

ist.

Nun ist*) auf diesem Wege

$$\sum_\alpha\left(\frac{1}{s+3-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\zeta'(s+3)}{\zeta(s+3)} - B + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{5}{2}\right)}$$
$$= O(1) + O(1) + O\left(\frac{1}{T}\right) + O(\log T)$$
$$= O(\log T),$$

also, da

$$\sum_\alpha{}'\left(\frac{1}{s+3-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right)$$

nur $O(\log T)$ Glieder hat, deren jedes gleichmäßig $O(1)$ ist,

$$\sum_\alpha{}''\left(\frac{1}{s+3-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = O(\log T). \tag{19}$$

Nach dem Hilfssatz (V) ist

$$\left|\sum_\alpha{}''\left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) - \sum_\alpha{}''\left(\frac{1}{s+3-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right)\right| = \left|\sum_\alpha{}''\frac{3}{(s-\alpha)(s+3-\alpha)}\right|$$
$$\leqq 3\sum_\alpha{}''\frac{1}{|\Im(s-\alpha)|\,|\Im(s+3-\alpha)|}$$
$$= 3\sum_\alpha{}''\frac{1}{(T-\gamma)^2}$$
$$= O(\log T),$$

und dies liefert in Verbindung mit (19) die Relation (18) und damit nach dem Obigen (6), also nach (16) den Riemann-von Mangoldtschen Satz (5).

---

*) Das jetzt Folgende ist der Hauptkunstgriff. Vorbildlich war mir dabei der verwandte Schluß Herrn von Mangoldts (vergl. die auf S. 421, Anm. ***) zitierte Abhandlung, S. 5 ff.). Herr von Mangoldt gelangte erst in dieser Arbeit durch ihn zum Ziele $O(\log T)$. Ohne ihn käme man mit der Methode des Textes nur bis $O(\log^2 T)$; dies war gerade das in Herrn von Mangoldts erster Arbeit (vergl. S. 421, Anm.**)) erreichte Ziel.

Aus Symmetriegründen folgt aus (5) für die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ mit Ordinaten zwischen 0 (exkl.) und $-T$ (inkl.) auch der Wert $N(T)$; also ist offenbar*) die Anzahl der nicht reellen Nullstellen, deren absoluter Betrag $\leqq T$ ist,

$$=\frac{1}{\pi}T\log T-\frac{1+\log(2\pi)}{\pi}T+O(\log T).$$

Folglich ist, wenn die reellen Nullstellen $-2, -4, -6, \cdots$ mitberücksichtigt werden, die Anzahl aller Nullstellen von $\zeta(s)$, welche dem Kreise $|s|\leqq T$ angehören,

$$=\frac{1}{\pi}T\log T+\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\log(2\pi)}{\pi}\right)T+O(\log T).$$

§ 3.

Ein allgemeiner Satz über die Änderung der Amplitude einer analytischen Funktion.

Ich beabsichtige nun zu zeigen, daß man von (8) zu (6) gelangen kann, ohne nochmals die tieferen Eigenschaften von $\zeta(s)$ anzuwenden. Ich benutze nur noch die Tatsache, daß für $\sigma\geqq-\frac{3}{2}$ gleichmäßig

$$\zeta(s)=O(t^a)\quad(a \text{ konstant})$$

ist; diese Tatsache folgt unmittelbar aus der durch partielle Integration leicht beweisbaren**), für $\sigma>-2$ gültigen Gleichung

$$\zeta(s)-1=\frac{1}{s-1}-\frac{s}{2}(\zeta(s+1)-1)-\frac{s(s+1)}{6}(\zeta(s+2)-1)$$
$$-\frac{s(s+1)(s+2)}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{u^2du}{(n+u)^{s+3}}$$

zunächst für $\sigma\geqq\frac{1}{2}$, alsdann für $\sigma\geqq-\frac{1}{2}$ und schließlich für $\sigma\geqq-\frac{3}{2}$.

---

*) Denn der Kreis $|s|=T$ schneidet für $T>1$ die Geraden $\sigma=0$ und $\sigma=1$ in den Punkten $\pm Ti$ und $1\pm\sqrt{T^2-1}\cdot i$, so daß die gesuchte Anzahl zwischen $2N(T)$ und

$$2N(\sqrt{T^2-1})=2N\left(T+O\left(\frac{1}{T}\right)\right)=2N(T+O(1))=2N(T)+O(\log T)$$

(vergl. S. 427, Anm. **)) liegt.

**) Es ist nur für $\sigma>1$

$$\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right)+\frac{1}{(n+1)^s}$$

$$=-\frac{s}{2}\frac{1}{(n+1)^{s+1}}-\frac{s(s+1)}{6}\frac{1}{(n+1)^{s+2}}-\frac{s(s+1)(s+2)}{6}\int_0^1\frac{u^2du}{(n+u)^{s+3}}$$

über $n=1, 2, 3, \cdots$ zu summieren.

Ich behaupte also allgemein folgenden*)

Satz: *Die analytische Funktion* $f(s)$ *sei für* $\sigma \geqq -\frac{3}{2}$, $t \geqq 1$ *regulär. Dort sei gleichmäßig*

(20) $$f(s) = O(t^a) \quad (a \text{ konstant}).$$

Alle jenem Gebiet angehörigen Wurzeln mögen ihre Abszisse zwischen 0 (*inkl.*) *und* 1 (*inkl.*) *haben.* $N(T)$ *sei die Anzahl jener Wurzeln, deren Ordinate zwischen* 1 (*inkl.*) *und* T (*inkl.*) *liegt. Es sei*

(21) $$N(T+1) - N(T) = O(\log T).$$

Es sei ferner, wenn $\log f(s)$ *irgend einen bestimmten für* $\sigma > 1$, $t \geqq 1$ *eindeutigen Zweig bezeichnet,*

$$\log f(2+Ti) = O(\log T),$$

*d. h. es sei***) *bei einem Wege in jenem Gebiete*

$$\int_{2+i}^{2+Ti} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = O(\log T).$$

Alsdann ist bei gerader, wurzelfrei vorausgesetzter Bahn

$$\Im \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = O(\log T),$$

mit anderen Worten, wenn längs der Ordinate T *fortgesetzt wird,*

$$\Im \log f(-1+Ti) = O(\log T),$$

d. h.

$$\textit{Amplitude von } f(-1+Ti) = O(\log T).$$

Beweis: Tschebyschef***) hat den merkwürdigen Satz bewiesen: „Die ganze rationale Funktion vom Grade $n \geqq 1$

---

*) Die Zahlenwerte $-\frac{3}{2}$, 1 usw. sind natürlich nicht wesentlich; der Deutlichkeit wegen habe ich an den betreffenden Stellen bestimmte Konstanten eingesetzt.

**) Übrigens ist bei $f(s) = \zeta(s)$ sogar

$$\log \zeta(2+Ti) = O(1),$$

was aber nichts weiter vereinfacht.

***) Vergl. z. B. seine große Abhandlung „Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions" [Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, Sciences mathématiques et physiques, Ser. 6, Bd. 7 (1859), S. 199—291; Œuvres, Bd. 1 (1899), S. 273—378], S. 225 bezw. S. 302. Das Merkwürdige dieses Satzes liegt darin, daß die in der Behauptung auftretenden Konstanten von n unabhängig sind. Auf die Analogie dieser Klasse Tschebyschefscher (elementar beweisbarer) algebraischer Sätze mit gewissen (bisher nicht elementar bewiesenen) algebraischen Sätzen von mir habe ich schon bei anderer Gelegenheit hingewiesen, auf S. 191 (Fußnote) der Arbeit: „Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard" [Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Ser. 3, Bd. 24 (1907), S. 179—201]. Ein sehr kurzer, von Herrn Markoff

$$G(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$$

mit reellen Koeffizienten kann für $-2 \leqq x \leqq 2$ nicht beständig zwischen -2 (exkl.) und 2 (exkl.) gelegen sein.“ Für jedes x_0 hat also die Ungleichung

$$|G(x)| \geqq 2$$

mindestens eine Lösung im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + 4$.

Es seien nun $s_1, \cdots, s_n$ die etwa vorhandenen Nullstellen von $f(s)$ (mehrfache natürlich mehrfach gezählt), deren Ordinaten zwischen $T-8$ (inkl.) und $T+8$ (inkl.) liegen; $t_1, \cdots, t_n$ seien diese Ordinaten. Es ist nach der Voraussetzung (21)

$$n = n(T) \leqq N(T+8) - N(T-9) = O(\log T).$$

Nach dem Tschebyschefschen Satz kann ich für jedes $T \geqq 9$ ein $T_1 = T_1(T)$ zwischen $T-8$ (inkl.) und $T-4$ (inkl.) so wählen, daß

$$|(T_1 - t_1) \cdots (T_1 - t_n)| \geqq 2 > 1$$

ist. A fortiori ist dann für $s = \sigma + T_1 i$, $-\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{11}{2}$

$$(22) \qquad |(s - s_1) \cdots (s - s_n)| \geqq 1.$$

Ebenso wähle ich ein T_2 zwischen $T+4$ (inkl.) und $T+8$ (inkl.) so, daß

$$|(T_2 - t_1) \cdots (T_2 - t_n)| \geqq 2 > 1$$

ist, also für $s = \sigma + T_2 i$, $-\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{11}{2}$ auch die Relation (22) gilt.

Ich betrachte nun die Funktion*)

$$g(s) = \frac{f(s)}{(s - s_1) \cdots (s - s_n)}.$$

Sie ist für $\sigma > 1$, $t \geqq 1$ und in dem Rechteck mit den Ecken $-\frac{3}{2} + (T \pm 8)i$, $1 + (T \pm 8)i$ einschließlich seines Randes regulär und von 0 verschieden. Es bezeichne

$$h(s) = \log g(s) = \log f(s) - \sum_{\nu=1}^{n} \log (s - s_\nu)$$

einen in dem ganzen genannten Gebiet regulären Zweig. Auf den Geraden $\sigma = -\frac{3}{2}$ und $\sigma = \frac{11}{2}$ ist, da nach Voraussetzung die Abszisse jeder Nullstelle $s_1, \cdots, s_n$ dem Intervall $(0 \cdots 1)$ angehört,

$$(23) \qquad |s - s_1| > 1, \cdots, |s - s_n| > 1;$$

es ist daher nach (22) und (23) auf dem Rande des Rechtecks mit den Ecken $-\frac{3}{2} + T_1 i$, $-\frac{3}{2} + T_2 i$, $\frac{11}{2} + T_1 i$, $\frac{11}{2} + T_2 i$

---

herrührender Beweis des Tschebyschefschen Satzes steht bei Herrn Seliwanoff, „Lehrbuch der Differenzenrechnung“, Leipzig (1904), S. 76—77.

*) Im Falle $n = 0$ ist natürlich $g(s) = f(s)$ zu setzen, und T_1, T_2 können irgend welche Zahlen in den betreffenden Intervallen bedeuten.

$$|g(s)| \leqq |f(s)|,$$

also wegen (20)

$$g(s) = O(T^a),$$

folglich für alle $T \geqq 9$ bei passender Wahl einer Konstanten*) A_1

$$\Re h(s) = \log |g(s)| < A_1 \log T.$$

Da der reelle Teil einer regulären analytischen Funktion in einem Punkte des Inneren eines Rechtecks nicht größer sein kann als in allen Randpunkten, ist auf dem Kreise $|s - 2 - Ti| = \frac{7}{2}$, welcher ganz jenem Rechteck angehört, auch

(24) $$\Re h(s) < A_1 \log T.$$

Im Mittelpunkt dieses Kreises ist nach Voraussetzung

$$\log f(2+Ti) = O(\log T),$$

also

$$|h(2+Ti)| = |\log f(2+Ti) - \sum_{\nu=1}^{n} \log (2+Ti-s_\nu)|$$

$$\leqq O(\log T) + \sum_{\nu=1}^{n} |\log (2+Ti-s_\nu)|$$

(25) $$= O(\log T),$$

da $n = O(\log T)$ und für jedes ν wegen

$$\sqrt{8^2+2^2} \geqq |2+Ti-s_\nu| \geqq 1$$

gleichmäßig

$$\log (2+Ti-s_\nu) = O(1)$$

ist.

Nun besteht der Satz von Herrn Carathéodory**): „Wenn eine analytische Funktion $h(s)$ für $|s-s_0| \leqq r$ regulär ist und M das Maximum von $\Re h(s)$ für $|s-s_0| = r$ bezeichnet, so ist für $|s-s_0| \leqq \varrho$, wo $0 < \varrho < r$ ist,

$$|h(s)| \leqq |\Im h(s_0)| + |\Re h(s_0)| \frac{r+\varrho}{r-\varrho} + M \frac{2\varrho}{r-\varrho},$$

also a fortiori

$$|h(s)| \leqq |h(s_0)| \frac{2r}{r-\varrho} + M \frac{2\varrho}{r-\varrho}."$$

Im vorliegenden Fall sei $s_0 = 2 + Ti$, $r = \frac{7}{2}$, $\varrho = 3$. Nach (24) ist

$$M < A_1 \log T,$$

---

*) Ebenso bezeichnen $A_2, A_3, \cdots$ im folgenden Konstanten in bezug auf die Variablen der betreffenden Relationen.

**) Vergl. S. 191—192 meiner auf S. 420, Anm. *) zitierten Abhandlung.

nach (25)

$$|h(s_0)| < A_2 \log T.$$

Also ergibt sich für $|s-2-Ti| \leqq 3$

$$\begin{aligned}|h(s)| &< A_2 \log T \cdot 14 + A_1 \log T \cdot 12 \\ &= A_3 \log T,\end{aligned}$$

insbesondere also für $s = -1 + Ti$

$$|\Im h(-1+Ti)| < A_3 \log T,$$

$$|\Im \log f(-1+Ti) - \Im \log(-1+Ti-s_1) - \cdots - \Im \log(-1+Ti-s_n)| < A_3 \log T,$$

folglich, wegen

$$|\Im \log(-1+Ti-s_1) + \cdots + \Im \log(-1+Ti-s_n)| < A_4 \log T,$$

$$|\Im \log f(-1+Ti)| < A_5 \log T,$$

$$\Im \int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = O(\log T),$$

was zu beweisen war.

§ 4.

Über die Verteilung der komplexen Nullstellen der Dirichletschen Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$.

Es sei k eine positive ganze Zahl, $\chi(n)$ ein vom Hauptcharakter verschiedener*) Charakter der Gruppe der zu k teilerfremden Restklassen und $L(s)$ die für $\sigma > 0$ durch die Dirichletsche Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

definierte analytische Funktion. Bekanntlich**) ist $L(s)$ eine ganze trans-

*) Der Fall des Hauptcharakters, bei welchem die Dirichletsche Reihe nur für $\sigma > 1$ konvergiert, liefert nichts Neues, da

$$L(s) = \prod_{p/k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s)$$

ist.

**) Vergl. die zusammenhängende Darstellung mit Beweisen bei Herrn de la Vallée Poussin, „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers" [Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2 (1896), S. 183—256 und S. 281—397], S. 281—348.

zendente Funktion vom Geschlecht 1 mit folgenden Eigenschaften: $L(s)$ ist entweder von der Gestalt*)

$$L(s) = e^{bs} \prod_{\nu=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \xi(s)$$

oder von der Gestalt

$$L(s) = e^{b(s+1)} \prod_{\nu=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \xi(s),$$

wo b konstant $\left(\text{und zwar} = \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{k'}\text{, wo } k' \text{ in } k \text{ aufgeht}\right)$ ist, $p_1, \cdots, p_\lambda$ gewisse Primzahlen, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\lambda$ gewisse Einheitswurzeln sind und $\xi(s)$ eine ganze transzendente Funktion vom Geschlecht 1 ist, deren Nullstellen sämtlich dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ (sogar $0 < \sigma < 1$) angehören und welche die Funktionalgleichung erfüllt:

$$\xi(s) = \varepsilon \bar{\xi}(1-s), \tag{26}$$

wo $\bar{\xi}(s)$ die aus dem konjugierten Charakter $\bar{\chi}(n)$, d. h. aus der konjugierten Funktion $\bar{L}(s)$, entspringende Funktion ist und ε eine Konstante vom absoluten Betrage 1 ist. Zusammenfassend ergibt sich also, wenn c einen der Werte 0 oder 1 bezeichnet, in jedem Fall

$$L(s) = \prod_{\nu=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+c}{2}\right)} A e^{Bs} \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right) e^{\frac{s}{\alpha}},$$

wo α die Wurzeln von $\xi(s)$ in beliebiger Reihenfolge durchläuft und A, B zwei Konstanten sind. $L(s)$ hat also zu Wurzeln außer den α die Zahlen: $0, -2, -4, -6, \cdots$ (für $c=0$) bezw. $-1, -3, -5, \cdots$ (für $c=1$) und, $\varepsilon_\nu = e^{\varphi_\nu i}$ gesetzt, die Zahlen $\frac{\varphi_\nu + 2u\pi}{\log p_\nu} i$ ($\nu = 1, 2, \cdots, \lambda$; $u = 0, \pm 1, \cdots$).

Es ist

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = B - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+c}{2}\right)} + \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^s - \varepsilon_\nu} + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right), \tag{27}$$

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{L'(s)}{L(s)} - B + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+c}{2}\right)} - \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^s - \varepsilon_\nu}.$$

---

*) Eventuell ist $\lambda = 0$, so daß das Produkt $\prod\limits_{\nu=1}^{\lambda}$ die Zahl 1 bedeutet.

Für $s = 2 + Ti$ ist also mit Rücksicht auf die für $\sigma > 1$ gültige Identität

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = -\sum_{p,m} \frac{\chi(p^m)\log p}{p^{ms}}$$

und den Hilfssatz (II)

$$\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{2+Ti-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = O(1) + O(1) + O(\log T) + O(1)$$
$$= O(\log T).$$

Wenn $N(T)$ die Anzahl der Wurzeln $\alpha = \beta + \gamma i$ von $\xi(s)$ (d. h. der nicht trivialen Wurzeln von $L(s)$) mit Ordinate zwischen 0 (exkl.) und T (inkl.) bedeutet, ergibt sich also wie beim Beweise des Hilfssatzes (IV) auch hier, daß

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T)$$

und wie bei (V), daß

$$\sum_{\alpha}{}'' \frac{1}{(T-\gamma)^2} = O(\log T)$$

ist, wo $\sum''$ sich auf alle α bezieht, für die $|T-\gamma| \geqq 1$ ist.

Nun ist bei passend kleiner Wahl von ε für alle $T > \varepsilon$, wo die Ordinate T von Nullstellen frei angenommen werden darf,

$$(28)\quad 2\pi N(T) = \Im\int_{-1+\varepsilon i}^{2+\varepsilon i} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds + \Im\int_{2+\varepsilon i}^{2+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds + \Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds + \Im\int_{-1+Ti}^{-1+\varepsilon i} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds.$$

Hierin ist das erste Integral von T unabhängig, also das erste Glied rechts $= O(1)$.

Wegen

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{L'(s)}{L(s)} - b - \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^s - \varepsilon_\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+c}{2}\right)}$$

ist, mit Rücksicht auf den Hilfssatz (III) und die Relationen

$$\int_{2+\varepsilon i}^{2+Ti} \frac{L'(s)}{L(s)}\,ds = \sum_{p,m} \frac{\chi(p^m)}{m p^{m(2+Ti)}} - \sum_{p,m} \frac{\chi(p^m)}{m p^{m(2+\varepsilon i)}} = O(1),$$

$$\int_{2+\varepsilon i}^{2+Ti} \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^s - \varepsilon_\nu}\,ds = \int_{2+\varepsilon i}^{2+Ti} \sum_{\nu=1}^{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu^m \log p_\nu}{p_\nu^{ms}}\,ds$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu^m}{m}\left(-\frac{1}{p_\nu^{m(2+Ti)}} + \frac{1}{p_\nu^{m(2+\varepsilon i)}}\right) = O(1),$$

das zweite Glied auf der rechten Seite von (28)

$$\Im\int\limits_{2+si}^{2+Ti}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds = O(1) - bT + O(1) + \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(\log T)$$
$$= \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} - bT + O(\log T).$$

Für das vierte Glied auf der rechten Seite von (28) ergibt sich nach (26), da

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = -\frac{\bar{\xi}'(1-s)}{\bar{\xi}(1-s)}$$

ist,

$$\Im\int\limits_{-1+Ti}^{-1+si}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds = -\Im\int\limits_{-1+Ti}^{-1+si}\frac{\bar{\xi}'(1-s)}{\bar{\xi}(1-s)}\,ds$$
$$= -\Im\int\limits_{2-si}^{2-Ti}\frac{\bar{\xi}'(s)}{\bar{\xi}(s)}\,ds,$$

was, da bekanntlich dem Charakter $\bar{\chi}(n)$ dieselben Konstanten b, c entsprechen wie dem Charakter $\chi(n)$, nach der obigen Diskussion des zweiten Gliedes

$$= O(1) - bT - \frac{1}{2}\Im\int\limits_{2-si}^{2-Ti}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+c}{2}\right)}\,ds$$
$$= \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} - bT + O(\log T)$$

ist.

Es ist daher zunächst festgestellt, daß

$$(29)\qquad 2\pi N(T) = T\log T - (1+2b+\log 2)T + O(\log T) + \Im\int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds$$

ist.

Schließlich läßt sich das in (29) verbleibende Integral genau so behandeln wie das entsprechende Integral im § 2. Es werde $\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}$ in

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = B - b + \sum_{\alpha}{}'\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right) + \sum_{\alpha}{}''\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

zerlegt, wo in $\sum\limits_{\alpha}{}'$ die Ordinate γ von dem Werte T um weniger als 1, in $\sum\limits_{\alpha}{}''$ um mindestens 1 entfernt ist. Dann ist

$$\Im \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = O(1) + \sum_{\alpha}' \Im \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) ds + \Im \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \sum_{\alpha}'' \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) ds$$

$$(30) \qquad = O(\log T) + O \left| \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \sum_{\alpha}'' \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) ds \right|;$$

nun ist auf dem Integrationsweg

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{1}{s+3-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\xi'(s+3)}{\xi(s+3)} + b - B = O(\log T)$$

und

$$\sum_{\alpha}' \left(\frac{1}{s+3-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = O(\log T \cdot 1),$$

also

$$\sum_{\alpha}'' \left(\frac{1}{s+3-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = O(\log T),$$

$$\sum_{\alpha}'' \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = \sum_{\alpha}'' \left(\frac{1}{s+3-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) + \sum_{\alpha}'' \frac{3}{(s-\alpha)(s+3-\alpha)}$$

$$= O(\log T) + O \sum_{\alpha}'' \frac{1}{(T-\gamma)^2}$$

$$= O(\log T),$$

also nach (30)

$$\Im \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = O(\log T),$$

folglich nach (29)

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + 2b + \log 2}{2\pi} T + O(\log T).$$

Da nach (26) zugleich mit

$$\xi(\alpha) = 0$$

auch

$$\bar{\xi}(1-\alpha) = 0$$

ist, ist die Anzahl der α, deren Ordinaten zwischen 0 (exkl.) und $-T$ (inkl.) liegen, auch

$$= \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + 2b + \log 2}{2\pi} T + O(\log T);$$

denn sie ist mit der Anzahl der Nullstellen des zu $\bar{L}(s)$ gehörigen $\bar{\xi}(s)$ identisch, deren Ordinaten zwischen 0 (exkl.) und T (inkl.) liegen.

Die Anzahl aller α, deren absoluter Betrag $\leqq T$ ist, ist also*)

---

*) Vergl. S. 431, Anm. *); die Anzahl der α mit der Ordinate 0 ist endlich.

$$= \frac{1}{\pi} T \log T - \frac{1 + 2b + \log 2}{\pi} T + O(\log T);$$

folglich ist, wenn die trivialen Nullstellen hinzugenommen werden, die Anzahl aller Nullstellen von $L(s)$, deren absoluter Betrag $\leqq T$ ist,

$$= \frac{1}{\pi} T \log T + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sum_{\nu=1}^{\lambda} \log p_\nu}{\pi} - \frac{1 + 2b + \log 2}{\pi}\right) T + O(\log T).$$

Natürlich hätte sich der Beweis auch unter Heranziehung des Satzes aus § 3 führen lassen.

§ 5.

Beweis, daß in einem bestimmten Teile des Streifens $0 \leqq \sigma \leqq 1$ die Funktion $L(s)$ von Null verschieden ist.

Aus der Relation (27) läßt sich in Anlehnung an eine Schlußweise von Herrn de la Vallée Poussin*) (für $\zeta(s)$) folgern: Die $\alpha = \beta + \gamma i$ genügen der Relation:

$$\text{untere Grenze von } (1 - \beta) \log(|\gamma| + 2) > 0,$$

d. h. *es gibt eine positive Konstante a derart, daß für $t \geqq 2$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{a \log t}$*

$$L(s) \neq 0$$

ist.

Beweis: Da gleichzeitig alle $h = \varphi(k)$ Funktionen $L(s)$ betrachtet werden, so werde ein Index $\varkappa (= 1, \ldots, h)$ eingeführt, wo $\varkappa = 1$ dem Hauptcharakter entspricht; dann ist nach (27) für $\varkappa = 2, \ldots, h$

$$(31) \quad \frac{L'_\varkappa(s)}{L_\varkappa(s)} = B_\varkappa - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s + c_\varkappa}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s + c_\varkappa}{2}\right)} + \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\varepsilon_{\nu,\varkappa} \log p_{\nu,\varkappa}}{p^s_{\nu,\varkappa} - \varepsilon_{\nu,\varkappa}} + \sum_{\alpha_\varkappa} \left(\frac{1}{s - \alpha_\varkappa} + \frac{1}{\alpha_\varkappa}\right)$$

und für $\varkappa = 1$ wegen

$$L_1(s) = \prod_{p/k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s)$$

nach (4)

$$(32) \quad \frac{L_1'(s)}{L_1(s)} = B_1 - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + \sum_{\nu=1}^{\lambda_1} \frac{\log p_{\nu,1}}{p^s_{\nu,1} - 1} + \sum_{\alpha_1} \left(\frac{1}{s - \alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1}\right),$$

wo also im Vergleich mit (31) nur $-\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ hinzugetreten ist.

---

*) Vergl. seine Abhandlung „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée" [Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Bd. 59 (1899—1900), S. 1—74], S. 7—29, oder auch S. 208—212 meiner auf S. 420, Anm. *) zitierten Arbeit.

Es werde

$$\prod_{\varkappa=1}^{h} L_\varkappa(s) = L_1(s)\,L_2(s)\ldots L_h(s) = M(s)$$

gesetzt; wegen

$$L_2(1) \neq 0, \cdots, L_h(1) \neq 0$$

hat bekanntlich $M(s)$ für $s=1$ einen Pol erster Ordnung und ist sonst überall regulär. Aus (31) und (32) ergibt sich

$$\frac{M'(s)}{M(s)} = \sum_{\varkappa=1}^{h} \frac{L'_\varkappa(s)}{L_\varkappa(s)}$$

$$(33) \qquad = -\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \sum_{\varkappa=1}^{h} B_\varkappa - \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{h} \frac{\Gamma'\left(\frac{s+c_\varkappa}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+c_\varkappa}{2}\right)} + \sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\nu=1}^{l_\varkappa} \frac{e_{\nu,\varkappa}\log p_{\nu,\varkappa}}{p_{\nu,\varkappa}^s - e_{\nu,\varkappa}}$$

$$+ \sum_\alpha \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

wo $\alpha = \beta + \gamma i$ jetzt promiscue alle Wurzeln $\alpha_\varkappa$ der h Kategorien durchläuft.

Für $\sigma > 1$ ist nun

$$\frac{L'_\varkappa(s)}{L_\varkappa(s)} = -\sum_{p,m} \frac{\chi_\varkappa(p^m)\log p}{p^{ms}},$$

also

$$\frac{M'(s)}{M(s)} = -h\sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p}{p^{ms}},$$

worin p alle Primzahlen und m alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, für welche $p^m \equiv 1 \pmod{k}$ ist. Für $1 < \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$ ist nun die rechte Seite von (33) gleichmäßig

$$= O\left(\frac{1}{t}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) + O(1) + O(\log t) + O(1) + \sum_\alpha \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

also

$$h\,\Re \sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p}{p^{ms}} < A_6 \log t - \Re \sum_\alpha \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

$$(34) \quad h\sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p \cos(mt\log p)}{p^{m\sigma}} < A_6 \log t - \sum_\alpha \left(\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right).$$

(34) liefert zunächst, da wegen $0 \leqq \beta \leqq 1$ in $\sum\limits_\alpha$ jedes Glied $\geqq 0$ ist, im vorliegenden Gebiet $1 < \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$

$$h\sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p \cos(mt\log p)}{p^{m\sigma}} < A_6 \log t,$$

$$(35) \qquad -\Re\left(\frac{M'(s)}{M(s)}\right) < A_6 \log t.$$

Nun sei $\alpha = \beta + \gamma i$ eine bestimmte der Nullstellen*) α mit Ordinate $\gamma \geqq 2$. Dann tritt für $t = \gamma$ in der Summe auf der rechten Seite von (34) ein Glied

$$\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \geqq \frac{1}{\sigma - \beta}$$

auf; daher ist für $1 < \sigma \leqq 2$

$$\frac{1}{\sigma - \beta} < A_6 \log \gamma - h \sum_{p^m = 1} \frac{\log p \cos(m\gamma \log p)}{p^{m\sigma}},$$

also, wegen

$$-\cos \Theta \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \Theta = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\Theta,$$

$$\frac{1}{\sigma - \beta} < A_6 \log \gamma + \frac{3}{4} h \sum_{p^m = 1} \frac{\log p}{p^{m\sigma}} + \frac{1}{4} h \sum_{p^m = 1} \frac{\log p \cos(2m\gamma \log p)}{p^{m\sigma}}$$

$$= A_6 \log \gamma - \frac{3}{4} \frac{M'(\sigma)}{M(\sigma)} - \frac{1}{4} \Re\left(\frac{M'(\sigma + 2\gamma i)}{M(\sigma + 2\gamma i)}\right),$$

also nach (35)

$$\frac{1}{\sigma - \beta} < A_6 \log \gamma - \frac{3}{4} \frac{M'(\sigma)}{M(\sigma)} + \frac{1}{4} A_6 \log(2\gamma).$$

Nun ist für $1 < \sigma \leqq 2$

$$-\frac{M'(\sigma)}{M(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + A_7$$

(da $M(s)$ für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat); für $1 < \sigma \leqq 2$ ergibt sich also:

$$\frac{1}{\sigma - \beta} < \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma - 1} + A_8 \log \gamma. \tag{36}$$

(36) lehrt zunächst die bekannte Tatsache, daß

$$\beta < 1$$

ist (da sonst (36) für kleine $\sigma - 1$ nicht richtig bleiben könnte); ferner ergibt sich für

$$\sigma = 1 + \frac{g}{\log \gamma},$$

wo die Konstante g so gewählt ist, daß

$$0 < \frac{g}{\log 2} \leqq 1$$

und

$$A_8 g < \frac{1}{4}$$

ist:

---

*) Aus Symmetriegründen genügt es, die Nullstellen in der oberen Halbebene zu betrachten

$$\frac{1}{1+\frac{g}{\log\gamma}-\beta} < \frac{3}{4g}\log\gamma + A_8\log\gamma,$$

$$1 < (1-\beta)\left(\frac{3}{4g}+A_8\right)\log\gamma + \frac{3}{4} + A_8 g,$$

$$1-\beta > \frac{\frac{1}{4}-A_8 g}{\frac{3}{4g}+A_8}\,\frac{1}{\log\gamma}$$

$$= \frac{1}{a\log\gamma},$$

$$\beta < 1 - \frac{1}{a\log\gamma}.$$

Für $t \geqq 2$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log t}$ ist daher

$$M(s) \neq 0,$$

also jeder Faktor

$$L_\varkappa(s) \neq 0,$$

womit die am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Da bekanntlich für $t \geqq 2$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log t}$

$$L_\varkappa(s) = O(\log t)$$

ist, so ist also dort $\log L_\varkappa(s)$ regulär und

$$\Re \log L_\varkappa(s) < A_9 + \log\log t.$$

Hieraus folgt in bekannter Weise*): Es gibt eine Konstante A_{10} derart, daß auf der stetigen Kurve

$$(37)\qquad \begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{1}{A_{10}\log(-t)} & \text{für } t \leqq -2, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{A_{10}\log 2} & \text{für } -2 \leqq t \leqq 2, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{A_{10}\log t} & \text{für } t \geqq 2 \end{cases}$$

und rechts davon $\frac{L_\varkappa'(s)}{L_\varkappa(s)}$ für $\varkappa = 2, \cdots, h$ regulär ist, für $\varkappa = 1$ bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum -1 regulär ist und für $|t| \geqq 2$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{A_{10}\log|t|}$ der Ungleichung

$$\left|\frac{L_\varkappa'(s)}{L_\varkappa(s)}\right| < A_{11}\log^3|t|$$

genügt.

---

*) Vergl. S. 232—236 meiner auf S. 420, Anm. *) zitierten Arbeit.

Nun sei l eine gegebene zu k teilerfremde Zahl. Weil für $\sigma > 1$

$$\sum_{x=1}^{h} \frac{1}{\chi_x(l)} \frac{L_x'(s)}{L_x(s)} = -\sum_{x=1}^{h} \frac{1}{\chi_x(l)} \sum_{p,m} \frac{\chi_x(p^m) \log p}{p^{ms}} = -h \sum_{p^m \equiv l} \frac{\log p}{p^{ms}}$$

ist und für $\sigma \geqq \frac{3}{4}$

$$\sum_{\substack{p^m \equiv l \\ m=2,3,\cdots}} \frac{\log p}{p^{ms}} = O(1)$$

ist, so ist, da das obige A_{10} größer als $\frac{4}{\log 2}$ angenommen werden kann, bewiesen: Die für $\sigma > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{p \equiv l} \frac{\log p}{p^s}$$

definierte Funktion $f(s)$ ist auf der Kurve (37) und rechts davon bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{1}{h}$ regulär und genügt für $|t| \geqq 2$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{A_{10} \log |t|}$ der Ungleichung

$$|f(s)| < A_{12} \log^3 |t|.$$

Hieraus folgt aber durch die bekannte*) Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes für die Anzahl $\varrho(x)$ der Primzahlen $ky + l \leqq x$ die Formel

$$\varrho(x) = \frac{1}{h} Li(x) + O\left(x e^{-\gamma \sqrt{\log x}}\right), \tag{38}$$

wo γ eine (von k abhängige) Konstante ist.

Mit elementaren Mitteln, insbesondere ohne Benutzung der Existenz der Funktionen $L(s)$ in der ganzen Ebene (was für die analogen Probleme der Idealtheorie wesentlich ist) hatte ich**) schon vor mehreren Jahren gezeigt, daß

$$\varrho(x) = \frac{1}{h} Li(x) + O\left(x e^{-\sqrt[\beta]{\log x}}\right)$$

ist, wo β eine (von k abhängige) Konstante ist. Aus (38) folgt nun für alle $\beta > 2$

$$\varrho(x) = \frac{1}{h} Li(x) + O\left(x e^{-\sqrt[\beta]{\log x}}\right),$$

also z. B.

*) Vergl. S. 236—239 meiner auf S. 420, Anm. *) zitierten Arbeit.

**) „Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression“ [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2a (1903), S. 493—535], S. 532.

(39) $$\varrho(x) = \frac{1}{h} Li(x) + O\left(x e^{-\sqrt[3]{\log x}}\right),$$

wo die Größenordnung des Fehlers von k unabhängig ist.

Aus (39) folgt z. B. weiter für die Anzahl $\pi(x)$ der Primideale mit Norm $\leqq x$ im Kreisteilungskörper ($\varphi(k)$-ten Grades) der k-ten Einheitswurzeln der Wert*)

(40) $$\pi(x) = Li(x) + O\left(x e^{-\sqrt[3]{\log x}}\right);$$

in der Tat zerfällt bekanntlich in jenem Körper jede Primzahl $ky+1$ in h Primideale ersten Grades, während sonst nur noch endlich viele Primideale ersten Grades vorhanden sind. Übrigens hatte ich**) einen vom Grade unabhängigen Index der Wurzel, nämlich 13, schon früher für diese Körper und sogar für sämtliche algebraische Zahlkörper erlangt, obgleich ich auch heute noch nicht weiß, ob die zu einem beliebigen Körper gehörige Zetafunktion in der ganzen Ebene existiert oder nicht. Jene gleichmässig gültige Zahl 13 hätte ich damals schon durch jede Zahl > 10 ersetzen können, und ein Passus meiner auf S. 420 zitierten Arbeit***) gestattet, sie durch jede Zahl > 8 zu ersetzen.

Berlin, den 21. Juni 1908.

---

*) Statt 3 kann in (40) auch jede andere Größe > 2 stehen.

**) „Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes" [Mathematische Annalen, Bd. 56 (1903), S. 645—670], S. 670.

***) S. 187—188

Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen.

Von

Oskar Perron in München.

Inhalt.

Einleitung.

In dieser Arbeit handelt es sich um Differentialgleichungen der Form

$$P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots + P_n \frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

wo die Koeffizienten P_i Polynome in x sind. Ist x_0 keine Nullstelle von $P_n(x)$, so läßt sich das allgemeine Integral in eine Potenzreihe

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu (x - x_0)^\nu$$

entwickeln, deren Konvergenzkreis bekanntlich mindestens bis zur nächstgelegenen Nullstelle von $P_n(x)$ reicht. Im allgemeinen wird er auch nicht darüber hinausreichen. Dies hindert aber nicht, daß *einzelne Partikulärintegrale* in einem größeren Kreis, ja sogar in der ganzen Ebene konvergieren können. Ebenso können, wenn x_0 eine Nullstelle von $P_n(x)$ ist, einzelne Partikulärintegrale im Punkt x_0 regulär sein, während das allgemeine Integral es nicht ist. In einer mehrfachen Nullstelle von $P_n(x)$ wird das allgemeine Integral, wenn nicht gewisse wohlbekannte Bedingungen

erfüllt sind, sich sogar nicht einmal bestimmt verhalten, während bei einzelnen Partikulärintegralen dies sehr wohl der Fall sein kann.

Bekannte Beispiele für das Vorkommen von solchen ausgezeichneten Partikulärintegralen bieten unter andern die hypergeometrischen Differentialgleichungen (zweiter und höherer Ordnung). Sätze allgemeinerer Natur verdankt man hauptsächlich Herrn Helge von Koch, der seine Theorie der unendlichen Determinanten für die Frage nutzbar gemacht hat.*) Indessen sind die Bedingungen, die Herr von Koch herleitet, so kompliziert, daß ihr Erfülltsein sich praktisch bei den wenigsten Differentialgleichungen wird feststellen lassen. Im folgenden werden nun nach einer neuen Methode einige verhältnismäßig umfassende Typen von Differentialgleichungen angegeben, über die sich bezüglich der Existenz von solchen besonderen Partikulärintegralen sehr bestimmte Aussagen machen lassen, wobei dann die fraglichen Integrale auch berechnet werden können.

Die Methode besteht einfach darin, daß eine hypothetische Potenzreihe an Stelle von y in die Differentialgleichung eingesetzt wird. Man erhält dadurch, ganz wie bei der Fuchsschen Theorie, für die Koeffizienten eine Rekursionsformel (Differenzengleichung), welche eine Anzahl von Anfangskoeffizienten willkürlich läßt. Dann handelt es sich darum, diese willkürlichen Koeffizienten, wenn dies möglich ist, so zu wählen, daß die entstehende Potenzreihe konvergiert, oder auch, daß sie in einem möglichst großen Kreis konvergiert. Diese besondere Wahl der Anfangskoeffizienten wird ermöglicht durch einige Theoreme über lineare Differenzengleichungen, die ihrerseits mit Hilfe der kürzlich von mir entwickelten Theorie der Jacobi-Ketten beliebiger Ordnung**) gewonnen werden. Die ganze Untersuchung stellt also wesentlich eine Anwendung dieser Theorie dar. Um jedoch den Leser nicht fortgesetzt auf die zitierte Arbeit verweisen zu müssen, habe ich in § 2 ohne Beweis alle diejenigen Definitionen und Theoreme über Jacobi-Ketten zusammengestellt, die im weitern Verlauf gebraucht werden.

§ 1.
Vorbereitende Beispiele.

In diesem Paragraphen behandle ich als Einführung einige ganz spezielle Differentialgleichungen, die nur auf Ketten erster Ordnung, also auf Kettenbrüche führen, die aber doch das Wesen der allgemeinen Methode bereits klar erkennen lassen.

---

*) Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires. Acta mathematica, Bd. 18 (1894).

**) Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen. Sitzungsberichte der bayr. Akademie (math. phys. Klasse), Bd. 37 (1907), pag. 401—482.

Erstes Beispiel. $y = (1+x)y'' + x^2 y'''$.

Setzt man für y die Reihe

(a) $$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\nu!} x^\nu$$

ein, so erhält man für die Koeffizienten γ_ν die Differenzengleichung

$$\gamma_\nu = \nu^2 \gamma_{\nu+1} + \gamma_{\nu+2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

welche γ_0 und γ_1 willkürlich läßt; oder was dasselbe ist,

$$\frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu+1}} = \nu^2 + \cfrac{1}{\cfrac{\gamma_{\nu+1}}{\gamma_{\nu+2}}}.$$

Hieraus entsteht sogleich der endliche Kettenbruch

(b) $$\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = 0 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|9} + \cdots + \frac{1|}{|\nu^2} + \frac{1|}{\left|\frac{\gamma_{\nu+1}}{\gamma_{\nu+2}}\right.}.$$

Wählt man daher die noch willkürlichen Anfangskoeffizienten γ_0, γ_1 derart, daß $\frac{\gamma_0}{\gamma_1}$ gleich dem unendlichen Kettenbruch

(c) $$\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = \alpha = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|9} + \frac{1|}{|16} + \cdots$$

ist, so sind alle weiteren γ_ν dadurch eindeutig bestimmt, und wegen (b) ist offenbar für alle $\nu > 0$:

$$\frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu+1}} = \nu^2 + \frac{1|}{|(\nu+1)^2} + \frac{1|}{|(\nu+2)^2} + \cdots > \nu^2.$$

Daher ist $\gamma_{\nu+1} < \frac{\gamma_\nu}{\nu^2}$, und folglich konvergiert die Reihe (a) für alle x, und zwar außerordentlich stark. Die Differentialgleichung hat also jedenfalls ein Integral, welches eine ganze transzendente Funktion von x ist.

Sie hat aber auch *nur ein* solches Integral. Denn sei

(d) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\delta_\nu}{\nu!} x^\nu$$

ein zweites; dann ist auch wieder

(e) $$\delta_\nu = \nu^2 \delta_{\nu+1} + \delta_{\nu+2}.$$

Aber wenn wieder α den Kettenbruch (c) bezeichnet, so ist diesmal $\delta_0 - \alpha\delta_1 \neq 0$, weil sonst das Integral bis auf einen konstanten Faktor mit dem früheren identisch wäre (oder auch identisch Null, nämlich für $\delta_0 = \delta_1 = 0$). Vermöge (e) kann man $\delta_{\nu+2}$ linear durch δ_0 und δ_1 ausdrücken, und zwar

(f) $$(-1)^\nu \delta_{\nu+2} = B_\nu \delta_0 - A_\nu \delta_1 = (\delta_0 - \alpha\delta_1) B_\nu + \delta_1(\alpha B_\nu - A_\nu),$$

wobei die A_ν, B_ν Zähler und Nenner des ν^{ten} Näherungsbruches des Kettenbruches (c) bedeuten. Nun ist aber

$$B_\nu = \nu^2 B_{\nu-1} + B_{\nu-2} > \nu^2 B_{\nu-1},$$

woraus wegen $B_1 = 1$ sogleich

$$B_\nu > (\nu!)^2$$

folgt. Andererseits ist nach dem bekannten Näherungsgesetz für regelmäßige Kettenbrüche:

$$|\alpha B_\nu - A_\nu| < \frac{1}{B_\nu} < \frac{1}{(\nu!)^2}.$$

Daher folgt aus Gleichung (f):

$$|\delta_{\nu+2}| > |\delta_0 - \alpha\delta_1|\,(\nu!)^2 - \frac{|\delta_1|}{(\nu!)^2},$$

und hieraus, weil $\delta_0 - \alpha\delta_1 \neq 0$ ist, mindestens für alle ν über einer gewissen Grenze:

$$|\delta_{\nu+2}| > C(\nu!)^2,$$

wo C eine von ν unabhängige wesentlich positive Zahl bedeutet. Daher divergiert die Reihe (d) für alle x, sie stellt also kein reguläres Integral der Differentialgleichung dar. W. z. b. w.

Zweites Beispiel: Besselsche Funktionen.

Sucht man die Differentialgleichung

$$xy'' + hy' - y = 0 \tag{g}$$

durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ zu befriedigen, so sieht man ohne weiteres, daß dies, von einem konstanten Faktor abgesehen, nur die Reihe

$$\mathfrak{P}(x) = \varphi_{h-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu+h)} \tag{h}$$

sein kann*), welche in der ganzen Ebene konvergiert. Die Differentialgleichung hat also ein und nur ein Integral, welches eine ganze transzendente Funktion von x ist. Setzt man weiter, unter x_0 irgend einen von Null verschiedenen Wert verstanden, die Reihe

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\nu!}(x-x_0)^\nu \tag{i}$$

in die Differentialgleichung ein, so erhält man für die Koeffizienten γ_ν die Rekursionsformel

$$x_0\gamma_{\nu+2} + (\nu+h)\gamma_{\nu+1} - \gamma_\nu = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \tag{k}$$

*) Dabei darf h auch eine ganze Zahl $\leqq 0$ sein. Es ist dann $\frac{1}{\Gamma(\nu+h)} = 0$ zu setzen, solange $\nu + h \leqq 0$ ist.

oder, was das gleiche sagt:

$$\text{(l)}\qquad \frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu+1}} = \nu + h + \cfrac{x_0}{\cfrac{\gamma_{\nu+1}}{\gamma_{\nu+2}}}$$

Nun sei N eine fest gewählte ganze Zahl, die größer ist als $|h| + |x_0|$. Dann ist der unendliche Kettenbruch

$$N + h + \frac{x_0|}{|N+h+1} + \frac{x_0|}{|N+h+2} + \cdots$$

nach dem Pringsheimschen Kriterium konvergent. Wählt man γ_N, γ_{N+1} derart, daß der Quotient $\frac{\gamma_N}{\gamma_{N+1}}$ gleich diesem Kettenbruch wird, so sind dadurch vermöge Gleichung (k) alle vorhergehenden und nachfolgenden γ_ν mit bestimmt, und aus (l) schließt man für alle ν:

$$\text{(m)}\qquad \frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu+1}} = \nu + h + \frac{x_0|}{|\nu+h+1} + \frac{x_0|}{|\nu+h+2} + \cdots,$$

sobald nur $\gamma_{\nu+1} \neq 0$ ausfällt, während für $\gamma_{\nu+1} = 0$ der Kettenbruch divergiert, sein reziproker Wert aber nach Null konvergiert.*) Aus Gleichung (m) folgt nun

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu+1}} \right| = \infty,$$

so daß die Reihe (i) in der ganzen Ebene konvergiert. Da aber die Differentialgleichung außer $\varphi_{k-1}(x)$ kein im Endlichen überall reguläres Integral mehr hat, so ist notwendig

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\nu!} (x - x_0)^\nu = C \varphi_{k-1}(x),$$

wo C eine Konstante bedeutet. Daher ist

$$\gamma_0 = C \varphi_{k-1}(x_0),$$
$$\gamma_1 = C \varphi'_{k-1}(x_0) = C \varphi_k(x_0),$$

und es folgt somit aus Gleichung (m), wenn man darin $\nu = 0$ setzt:

$$\text{(n)}\qquad \frac{\varphi_{k-1}(x_0)}{\varphi_k(x_0)} = h + \frac{x_0|}{|h+1} + \frac{x_0|}{|h+2} + \frac{x_0|}{|h+3} + \cdots.$$

Dies gilt für alle endlichen Werte von x_0, ausgenommen die Nullstellen von $\varphi_k(x)$, für welche der reziproke Wert des Kettenbruches gegen Null konvergiert. Die Formel (n) ist nichts anderes als die bekannte

*) Dies kann offenbar nur für $\nu < N$, also allenfalls für eine *endliche* Anzahl von ν-Werten eintreten.

Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselschen Funktionen, da ja die durch Gleichung (h) definierte Funktion φ_λ sofort auf die Besselsche Funktion J_λ zurückgeführt werden kann.

Zum Schluß bemerke ich, daß wesentlich die gleiche Methode, wie sie in diesen Beispielen zum Ausdruck kommt, auch kürzlich von Herrn Lerch an einem ähnlichen Beispiel erläutert und recht passend als „Prinzip der schnellsten Konvergenz" bezeichnet worden ist.*)

§ 2.

Zusammenstellung der Hauptsätze über Ketten.

Die hier folgenden Definitionen und Theoreme sind meiner auf pag. 447 zitierten Arbeit fast wörtlich entnommen. Sie sind mit fortlaufenden Nummern versehen, unter welchen später auf die betreffenden Sätze verwiesen wird, während die jeweils am Schluß eingeklammerten Seitenzahlen und sonstigen Angaben auf die bezügliche Stelle in der genannten Arbeit hinweisen.

Nr. I. Das System der linearen Rekursionsformeln

$$A_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)} \tag{1}$$
$$(i = 0, 1, \cdots, n;\ \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

mit den Anfangswerten

$$A_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{„ } i \neq k \end{cases} \qquad (i, k = 0, 1, \cdots, n) \tag{2}$$

heißt eine *Jacobi-Kette* oder kurz *Kette* n^{ter} *Ordnung*. Die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ heißen die Elemente der Kette (404, Definition I).

Nr. II. Betrachtet man die $a_k^{(\mu)}$ als beliebige Variable, so sind die $A_i^{(\nu)}$ ganze rationale Funktionen von diesen Variabeln. Wenn man in der Funktion $A_i^{(\nu)}$ die oberen Indizes aller vorkommenden $a_k^{(\mu)}$ um eine bestimmte Zahl λ erhöht, so wird der entstehende Ausdruck mit $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ bezeichnet. Für die $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ bestehen daher die Rekursionsformeln (405):

$$A_{i,\lambda}^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu)} + a_1^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu+n)} \tag{3}$$
$$(i = 0, 1, \cdots, n;\ \nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

und die Anfangswerte sind natürlich wieder

$$A_{i,\lambda}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{„ } i \neq k \end{cases} \qquad (i, k = 0, 1, \cdots, n). \tag{4}$$

*) Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale. Monatshefte für Math. u. Phys., 19. Jahrg., 1908.

Nr. III. Es wird ein für allemal $a_0^{(\nu)} \neq 0$ vorausgesetzt für alle ν (407).

Nr. IV. Die in Nr. 1 definierte Kette heißt *konvergent*, wenn die Quotienten $a_0^{(0)} \dfrac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ mit wachsendem ν gegen bestimmte endliche Grenzwerte konvergieren:

$$a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \alpha_1^{(0)},\quad a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_2^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \alpha_2^{(0)}, \cdots, a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \alpha_n^{(0)},$$

welche dann das Wertesystem der Kette genannt werden. Andernfalls heißt die Kette divergent (407, Definition II).

Nr. V. Wenn die Kette konvergiert und das in Nr. IV angegebene Wertesystem hat, so wird dies symbolisch angedeutet durch die Formel

$$(5)\qquad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \cdots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \alpha_1^{(0)} \\ \alpha_2^{(0)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(0)}. \end{cases}$$

Außerdem wird aber das Zeichen links überhaupt als Symbol für die in Nr. I definierte Kette gebraucht ohne Rücksicht auf ihre Konvergenz oder Divergenz. An Stelle des ausführlichen Kettensymboles soll gelegentlich auch abkürzend

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\nu)} \\ a_1^{(\nu)} \\ \vdots \\ a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty} \quad\text{oder}\quad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(\nu)} \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=1}^{\infty} \quad\text{oder}\quad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(\nu)} \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=2}^{\infty} \quad\text{usw.}$$

geschrieben werden (408—409).

Nr. VI. Die Kette (5) heißt *unbedingt* konvergent, wenn die unendlich vielen Ketten

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)}, & \cdots \end{bmatrix} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$$

sämtlich konvergieren (411, Definition III).

Nr. VII. Bei unbedingter Konvergenz existieren definitionsgemäß die Grenzwerte (siehe Nr. II):

$$a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = \alpha_i^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots),$$

und es ist

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)}, & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \alpha_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(\lambda)}. \end{cases}$$

Außerdem ist notwendig $\alpha_n^{(\lambda)} \neq 0$ für $\lambda \geqq 1$, und es besteht das Gleichungssystem (412):

$$\alpha_1^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda)} + \frac{a_0^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}}$$

$$\alpha_i^{(\lambda)} = a_i^{(\lambda)} + \frac{\alpha_{i-1}^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}} \qquad (i = 2, 3, \cdots, n).$$

Nr. VIII. Wenn die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)}, & \cdots \end{bmatrix},$$

wo λ ein *bestimmter* Index $\lambda \geqq 1$ ist, konvergiert, und ihr Wertesystem mit $\alpha_1^{(\lambda)}, \alpha_2^{(\lambda)}, \cdots, \alpha_n^{(\lambda)}$ bezeichnet wird, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \cdots \end{bmatrix}$$

konvergent oder divergent, je nachdem die Größe

$$A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} \alpha_1^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+2)} \alpha_2^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} \alpha_n^{(\lambda)}$$

von Null verschieden oder gleich Null ist. Das Wertesystem der Kette ist dann im Konvergenzfall gegeben durch die Formel (414, Lemma):

$$\alpha_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} \alpha_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} \alpha_n^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} \alpha_1^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} \alpha_n^{(\lambda)}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Nr. IX. Wenn die Elemente einer Kette n^{ter} Ordnung für $\nu \geqq 1$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq \vartheta(|a_n^{(\nu)}| - 1)$$

erfüllen, wo ϑ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, während die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ sehr wohl auch komplex sein dürfen, so ist die Kette unbedingt konvergent (417, Theorem II).

Nr. X. Wenn die in Nr. IX geforderte Ungleichung schon für $\nu \geqq 0$ erfüllt ist, so genügt das Wertesystem $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \cdots, \alpha_n^{(0)}$ der nach Nr. IX konvergenten Kette den zwei Ungleichungen:

$$\vartheta |\alpha_n^{(0)}| \geqq |a_0^{(0)}| + |\alpha_1^{(0)}| + |\alpha_2^{(0)}| + \cdots + |\alpha_{n-1}^{(0)}|,$$

$$|\alpha_1^{(0)} - a_1^{(0)}| + |\alpha_2^{(0)} - a_2^{(0)}| + \cdots + |\alpha_n^{(0)} - a_n^{(0)}| \leqq \vartheta;$$

außerdem gilt die Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\nu)} - \alpha_i^{(0)} A_0^{(\nu)}) = 0,$$

wobei die Zahlen $A_i^{(\nu)}$ die Bedeutung von Nr. I haben (424, Theorem III).

Nr. XI. Unter den Voraussetzungen der vorigen Nr. wachsen die absoluten Beträge der Zahlen $A_0^{(\nu)}$ von $\nu = 1$ ab monoton mit ν (428), und es gilt die Ungleichung (429):

$$|A_0^{(\nu+n+1)}| > |a_0^{(0)}| (|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1) \cdots (|a_n^{(\nu)}| - 1).*)$$

Nr. XII. Wenn die Elemente einer Kette *ganze rationale* Zahlen sind, welche von einer gewissen Stelle $\nu \geqq N$ ab die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq \vartheta(|a_n^{(\nu)}| - 1) \qquad (\vartheta < 1)$$

erfüllen, so ist die Kette unbedingt konvergent, und ihr Wertesystem $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \cdots, \alpha_n^{(0)}$ genügt keiner Relation der Form

$$P_0 a_0^{(0)} + P_1 \alpha_1^{(0)} + P_2 \alpha_2^{(0)} + \cdots + P_n \alpha_n^{(0)} = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten P_i (452, Theorem IX).

Nr. XIII. Die beiden Ketten n^{ter} Ordnung

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a_0^{(\nu)} \\ \vdots \\ a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} b_0^{(\nu)} \\ \vdots \\ b_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty},$$

wobei

$$(6) \qquad b_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)} \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n+i} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

gesetzt ist, heißen *äquivalent*, wenn die Multiplikatoren ϱ_ν beliebige von Null verschiedene Zahlen sind, und speziell $\varrho_\nu = 1$ für $\nu \leqq 0$ (410—411).

Es erweist sich nun aber als notwendig, auch solche Ketten in Betracht zu ziehen, bei denen diese letzte Bedingung nicht erfüllt ist. Es sollen also jetzt alle ϱ_ν, auch die mit nicht positivem Index, keiner weiteren Bedingung unterworfen sein als: $\varrho_\nu \neq 0$. Dadurch werden mit den $a_0^{(\nu)}$ zugleich die $b_0^{(\nu)}$ von Null verschieden, so daß auch die Kette $\mathfrak{B}$ der Forderung Nr. III genügt. Die Ketten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mögen jetzt *halbäquivalent* heißen.

Zur Kette $\mathfrak{A}$ gehören die Rekursionsformeln (1), während die entsprechenden zur Kette $\mathfrak{B}$ gehörigen Formeln lauten:

---

*) A. a. O. steht auf der rechten Seite dieser Ungleichung noch eine ganze Anzahl weiterer positiver Glieder; doch ist die darin liegende Verschärfung für unsere Zwecke nicht erforderlich. Ebensowenig brauchen wir hier die Tatsache, daß die Ungleichung auch unter der Annahme $\vartheta = 1$ besteht.

$$B^{(\nu+n+1)} = \sum_{r=0}^{n} b_r^{(\nu)} B_i^{(\nu+r)} = \sum_{r=0}^{n} a_r^{(\nu)} \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n+r} B_i^{(\nu+r)},$$

wobei die Anfangswerte wieder durch

$$B_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \;\;\text{„} \quad i \neq k \end{cases} \qquad (i, k = 0, 1, \cdots, n)$$

gegeben sind. Hieraus schließt man leicht:

$$B_i^{(\nu)} = \frac{\varrho_{-n-1}\varrho_{-n}\varrho_{-n+1}\cdots\varrho_{-n+\nu-1}}{\varrho_{-n-1}\varrho_{-n}\varrho_{-n+1}\cdots\varrho_{-n+i-1}} A_i^{(\nu)}.\text{*)} \tag{7}$$

Denn die Rekursionsformeln für $A_i^{(\nu)}$ und $B_i^{(\nu)}$ zeigen, daß, wenn die Formel (7) für $n+1$ aufeinanderfolgende ν-Werte gilt, sie auch für den nächstgrößeren bestehen bleibt. Aber für $\nu = 0, 1, 2, \cdots, n$ ist sie evident, also gilt sie allgemein.

Nach (7) ist nun für große Werte von ν (es genügt $\nu > i$ zu denken), indem sich die ϱ des Nenners sämtlich gegen solche im Zähler wegheben:

$$B_i^{(\nu)} = \varrho_{-n+i}\varrho_{-n+i+1}\cdots\varrho_{-n+\nu-1} A_i^{(\nu)}.$$

Daher auch:

$$b_0^{(0)} \frac{B_i^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}} = a_0^{(0)} \varrho_0 \varrho_{-1} \cdots \varrho_{-n} \cdot \frac{\varrho_{-n+i}\varrho_{-n+i+1}\cdots\varrho_{-n+\nu-1} A_i^{(\nu)}}{\varrho_{-n}\varrho_{-n+1}\cdots\varrho_{-n+\nu-1} A_0^{(\nu)}}$$

$$= \varrho_0\varrho_{-1}\cdots\varrho_{-n+i} \cdot a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}.$$

Hieraus folgt nun für $\nu = \infty$, daß zwei halbäquivalente Ketten immer *zugleich* konvergent oder divergent sind. Bedeuten dann im Konvergenzfall $\alpha_i^{(0)}$ und $\beta_i^{(0)}$ die Wertesysteme der Ketten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so ist

$$\beta_i^{(0)} = \varrho_0\varrho_{-1}\cdots\varrho_{-n+i}\,\alpha_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

also wegen (6) auch

$$\beta_i^{(0)} : \alpha_i^{(0)} = b_i^{(0)} : a_i^{(0)}.$$

Ist ferner die Kette $\mathfrak{A}$ *unbedingt* konvergent, so gilt das gleiche von $\mathfrak{B}$, und es ist, wenn $\alpha_i^{(\lambda)}$, $\beta_i^{(\lambda)}$ die entsprechende Bedeutung haben (siehe Nr. VII), auch allgemein

$$\beta_i^{(\lambda)} = \varrho_\lambda\varrho_{\lambda-1}\cdots\varrho_{\lambda-n+i}\,\alpha_i^{(\lambda)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

und folglich auch wieder wegen (6):

$$\beta_i^{(\lambda)} : \alpha_i^{(\lambda)} = b_i^{(\lambda)} : a_i^{(\lambda)}.$$

---

*) Die hier im Zähler und Nenner auftretende Zahl ϱ_{-n-1}, die seither gar nicht vorkam, ist ganz willkürlich ($\neq 0$); sie hebt sich auch von selbst weg und ist nur beigefügt, weil die Formel sonst für $\nu = 0$ eine kleine Korrektur erfahren müßte.

§ 3.

Über eine besondere lineare Differenzengleichung.

Es sollen zunächst zwei einfache Bezeichnungen festgesetzt werden. Sind $k_1, k_2, \cdots, k_n$ irgend welche reelle Zahlen, so bezeichnen wir die algebraisch größte unter ihnen mit

$$\operatorname{Max}(k_1, k_2, \cdots, k_n),$$

oder auch mit

$$\operatorname*{Max}_{i=1}^{n} k_i.$$

Ebenso die algebraisch kleinste mit

$$\operatorname{Min}(k_1, k_2, \cdots, k_n) \quad \text{oder} \quad \operatorname*{Min}_{i=1}^{n} k_i.$$

Des weiteren bedeute $\{\nu^k\}$ jede für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ definierte (nicht notwendig reelle) Funktion, für welche

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{|\{\nu^k\}|}{\nu^k} = 1$$

ist; dabei kann k irgend eine reelle Zahl sein, die mit der Funktion natürlich eindeutig gegeben ist. Unter $\{\nu^{-\infty}\}$ soll folgerichtig eine Funktion verstanden werden, deren Absolutwert rascher gegen Null konvergiert als jede Potenz von $\frac{1}{\nu}$; insbesondere wird also jede Funktion, die von einem gewissen ν-Wert ab dauernd gleich Null ist, mit $\{\nu^{-\infty}\}$ zu bezeichnen sein.

Wir betrachten dann die lineare Differenzengleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\gamma_{\nu+n+1} = b_0^{(\nu)}\gamma_\nu + b_1^{(\nu)}\gamma_{\nu+1} + \cdots + b_n^{(\nu)}\gamma_{\nu+n} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \tag{8}$$

wobei die Koeffizienten

$$b_i^{(\nu)} = b_i\{\nu^{k_i}\} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{9}$$

sein mögen. Dabei darf ohne weiteres $b_i \neq 0$ angenommen werden; sollten nämlich zufällig für einen bestimmten Index i alle $b_i^{(\nu)}$ verschwinden, so kann dem dadurch Rechnung getragen werden, daß man $k_i = -\infty$ setzt. Weiter setzen wir $b_0^{(\nu)} \neq 0$ voraus für alle ν. Infolgedessen liefert die Gleichung (8) aus irgend welchen $n+1$ aufeinanderfolgenden γ_ν nicht nur alle späteren, sondern auch rückwärts die vorhergehenden.

Wir substituieren nun in (8)

$$\gamma_\nu = \frac{\delta_\nu}{g^\nu (\nu!)^r}, \tag{10}$$

wobei g eine positive, r eine reelle Zahl bedeutet, über die beide später je nach Bedarf in passender Weise verfügt wird. Gleichung (8) geht dann über in eine ähnliche:

$$\delta_{\nu+n+1} = a_0^{(\nu)}\delta_\nu + a_1^{(\nu)}\delta_{\nu+1} + \cdots + a_n^{(\nu)}\delta_{\nu+n}, \tag{11}$$

wobei zur Abkürzung

(12) $$a_i^{(\nu)} = b_i^{(\nu)} g^{n+1-i}[(\nu+i+1)(\nu+i+2)\cdots(\nu+n+1)]^r$$

gesetzt ist. Nach (9) ist also

(13) $$a_i^{(\nu)} = b_i g^{n+1-i}\{\nu^{k_i+(n+1-i)r}\}.$$

Für später ist besonders zu beachten, daß nach unseren Voraussetzungen über $b_0^{(\nu)}$ auch $a_0^{(\nu)}$ für alle ν von Null verschieden wird.

Man wähle nun fürs erste die Zahl r derart, daß

(14) $$k_i + (n+1-i)r \leqq 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

wird; ferner g so klein, daß

$$\sum_{i=0}^{n} |b_i| g^{n+1-i} < 1$$

ist. Dann wird offenbar für genügend große ν auch

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(\nu)}| < 1,$$

so daß aus Gleichung (11) folgt:

$$|\delta_{\nu+n+1}| < \text{Max}\,(|\delta_\nu|, |\delta_{\nu+1}|, \cdots, |\delta_{\nu+n}|).$$

Hieraus ergibt sich aber sogleich, daß $|\delta_\nu|$ unter einer von ν unabhängigen Schranke G bleibt, und folglich nach (10):

$$|\gamma_\nu| < \frac{G}{g^\nu (\nu!)^r}.$$

Die günstigste obere Schranke für $|\gamma_\nu|$ erhält man offenbar, wenn man r möglichst groß wählt. Da aber r an die Ungleichungen (14) gebunden war, so wird man

$$r = \underset{i=0}{\overset{n}{\text{Min}}} \frac{-k_i}{n+1-i} = -\underset{i=0}{\overset{n}{\text{Max}}} \frac{k_i}{n+1-i}$$

setzen. Man erhält dann für $\nu \geqq 1$:

(15) $$|\gamma_\nu| < M^\nu (\nu!)^{\underset{i=0}{\overset{n}{\text{Max}}} \frac{k_i}{n+1-i}},$$

wo M eine vielleicht sehr große, von den Anfangswerten $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ abhängende, *aber von ν unabhängige* Zahl bedeutet.

Von jetzt ab sollen die Exponenten k_i den Ungleichungen

(16) $$\frac{k_n - k_i}{n-i} > -k_n \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

genügen, oder auch, wenn man nach k_n auflöst:

(16a) $$k_n > \frac{k_i}{n+1-i} \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Dann geht (15) über in:

(17) $$|\gamma_\nu| < M^\nu (\nu!)^{k_n}.$$

Diese Ungleichung bezieht sich auf das *allgemeine* Integral der Differenzengleichung (8), da wir über die Anfangswerte $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ keinerlei Festsetzungen getroffen haben. Es soll nun gezeigt werden, daß bei dem allgemeinen Integral der Exponent von $\nu!$ in Ungleichung (17) auch niemals unter k_n herabgedrückt werden kann, während für einzelne Partikulärintegrale eine Erniedrigung eintritt.

Zu dem Zweck wählen wir die Zahl r nun nicht mehr gemäß den Ungleichungen (14), sondern derart, daß

(18) $$\frac{k_n - k_i}{n - i} \geqq r > - k_n \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

wird, was ja wegen der Voraussetzung (16) möglich ist. Diese letzten Ungleichungen sind aber gleichbedeutend mit den folgenden:

(19) $$k_n + r > 0,$$

(20) $$k_n + r \geqq k_i + (n+1-i) r \qquad (i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Daher ist wegen (13) mindestens von einer gewissen Stelle $\nu \geqq N$ ab:

(21) $$\begin{aligned} |a_i^{(\nu)}| &< |b_i| g^{n+1-i} \cdot 2 \nu^{k_i + (n+1-i) r} \\ &\leqq 2 |b_i| g^{n+1-i} \nu^{k_n + r} \quad (\text{für } \nu \geqq N). \end{aligned}$$

Andererseits aber auch, indem man nötigenfalls die Zahl N noch größer denkt, wegen (13) für $i = n$ und (19):

$$|a_n^{(\nu)}| > |b_n| g \cdot \frac{3}{4} \nu^{k_n + r},$$

$$1 < \frac{1}{4} |b_n| g \nu^{k_n + r} \quad (\text{für } \nu \geqq N),$$

woraus durch Subtraktion folgt

(22) $$|a_n^{(\nu)}| - 1 > \frac{1}{2} |b_n| g \nu^{k_n + r} \quad (\text{für } \nu \geqq N).$$

Wählt man daher die Zahl g so klein, daß die Ungleichung

$$\frac{1}{4} |b_n| g > \sum_{i=0}^{n-1} 2 |b_i| g^{n+1-i}$$

besteht, so folgt schließlich nach (22) und (21):

(23) $$\frac{1}{2} (|a_n^{(\nu)}| - 1) > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i^{(\nu)}| \quad (\text{für } \nu \geqq N).$$

Wegen dieser Ungleichung ist nun nach Nr. IX des vorigen Paragraphen die Kette n^{ter} Ordnung

$$(24)\qquad \begin{bmatrix} a_0^{(N)}, & a_0^{(N+1)}, & a_0^{(N+2)}, & \cdots \\ a_1^{(N)}, & a_1^{(N+1)}, & a_1^{(N+2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(N)}, & a_n^{(N+1)}, & a_n^{(N+2)}, & \cdots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.*) Die zugehörigen Rekursionsformeln lauten:

$$A_{i,N}^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu+N)} A_{i,N}^{(\nu)} + a_1^{(\nu+N)} A_{i,N}^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu+N)} A_{i,N}^{(\nu+n)}$$

mit den bekannten Anfangswerten $A_{i,N}^{(k)}$ (siehe Nr. II). Nach Gleichung (11) ist aber auch, wenn man dort $\nu + N$ an Stelle von ν setzt:

$$\delta_{\nu+N+n+1} = a_0^{(\nu+N)} \delta_{\nu+N} + a_1^{(\nu+N)} \delta_{\nu+N+1} + \cdots + a_n^{(\nu+N)} \delta_{\nu+N+n}.$$

Daher läßt sich $\delta_{\nu+N}$ linear ausdrücken durch $A_{0,N}^{(\nu)}, A_{1,N}^{(\nu)}, \cdots, A_{n,N}^{(\nu)}$, und zwar ist

$$(25)\qquad \delta_{\nu+N} = \sum_{i=0}^{n} \delta_{N+i} A_{i,N}^{(\nu)}.$$

Für $\nu = 0, 1, \cdots, n$ ist diese Formel nämlich evident, und die Rekursionsformeln zeigen dann wieder, daß, wenn sie für $n+1$ aufeinanderfolgende ν-Werte gilt, sie auch für den nächst größeren richtig bleibt.

Bezeichnet man mit $\alpha_1^{(N)}, \cdots, \alpha_n^{(N)}$ das Wertesystem der Kette (24) und setzt zur Abkürzung

$$(26)\qquad a_0^{(N)} A_{i,N}^{(\nu)} - \alpha_i^{(N)} A_{0,N}^{(\nu)} = H_{i,N}^{(\nu)},$$

so folgt, wenn man das Theorem in Nr. X auf diese Kette anwendet, deren Elemente ja den Ungleichungen (23) genügen, die Beziehung

$$(27)\qquad \lim_{\nu=\infty} H_{i,N}^{(\nu)} = 0.$$

Wenn man jetzt die Gleichung (25) mit $a_0^{(N)}$ multipliziert, so kommt:

$$\begin{aligned} a_0^{(N)} \delta_{\nu+N} &= a_0^{(N)} \delta_N A_{0,N}^{(\nu)} + \sum_{i=1}^{n} \delta_{N+i} a_0^{(N)} A_{i,N}^{(\nu)} \\ &= a_0^{(N)} \delta_N A_{0,N}^{(\nu)} + \sum_{i=1}^{n} \delta_{N+i} (H_{i,N}^{(\nu)} + \alpha_i^{(N)} A_{0,N}^{(\nu)}) \\ &= A_{0,N}^{(\nu)} (a_0^{(N)} \delta_N + \alpha_1^{(N)} \delta_{N+1} + \cdots + \alpha_n^{(N)} \delta_{N+n}) + \sum_{i=1}^{n} \delta_{N+i} H_{i,N}^{(\nu)} \end{aligned}$$

*) Wie bereits bemerkt, ist die Forderung Nr. III: $a_0^{(\nu)} \neq 0$ ebenfalls erfüllt.

Da aber nach (27) die einzelnen Terme unter dem letzten Summenzeichen mit wachsendem ν dem Wert Null zustreben, so erhält man die folgende wichtige Beziehung:

$$(28)\qquad \lim_{\nu=\infty} \left[a_0^{(N)}\delta_{\nu+N} - A_{0,N}^{(\nu)}\left(a_0^{(N)}\delta_N + \alpha_1^{(N)}\delta_{N+1} + \cdots + \alpha_n^{(N)}\delta_{N+n}\right)\right] = 0.$$

Hier bieten sich nun zwei verschiedene Fälle dar.

Erster Fall:

$$a_0^{(N)}\delta_N + \alpha_1^{(N)}\delta_{N+1} + \cdots + \alpha_n^{(N)}\delta_{N+n} \neq 0.$$

Nach Nr. XI folgt aus den Ungleichungen (23):

$$\left|A_{0,N}^{(\nu+n+1)}\right| > \left|a_0^{(N)}\right| \left(\left|a_n^{(N+1)}\right| - 1\right)\left(\left|a_n^{(N+2)}\right| - 1\right)\cdots\left(\left|a_n^{(N+\nu)}\right| - 1\right)$$

und daher wegen (22):

$$\left|A_{0,N}^{(\nu+n+1)}\right| > \left|a_0^{(N)}\right| \left(\tfrac{1}{2}\,|b_n|\,g\right)^{\nu} [(N+1)(N+2)\cdots(N+\nu)]^{k_n+r}$$
$$> g_1^{\nu}[(\nu+N)!]^{k_n+r},$$

wo g_1 von ν nicht abhängt. Setzt man $\nu - n - 1$ an Stelle von ν, so kommt

$$\left|A_{0,N}^{(\nu)}\right| > g_1^{\nu-n-1}[(\nu+N-n-1)!]^{k_n+r} > g_2^{\nu}[(\nu+N)!]^{k_n+r}.$$

Aus (28) folgt daher für hinreichend große ν:

$$|\delta_{\nu+N}| > g_3^{\nu}[(\nu+N)!]^{k_n+r}.$$

Hieraus endlich, indem man $\nu - N$ an Stelle von ν schreibt und statt der δ_ν vermöge (10) wieder die γ_ν einführt:

$$(29)\qquad |\gamma_\nu| > m^{\nu}(\nu!)^{k_n},$$

wo auch m eine vielleicht sehr kleine, von den Anfangswerten $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ abhängende, *von ν aber unabhängige* Zahl bedeutet. Übrigens gilt Ungleichung (29) nur für hinreichend große ν, während für eine *endliche* Anzahl von ν-Werten natürlich sehr wohl $\gamma_\nu = 0$ sein kann.

Zweiter Fall:

$$a_0^{(N)}\delta_N + \alpha_1^{(N)}\delta_{N+1} + \cdots + \alpha_n^{(N)}\delta_{N+n} = 0.$$

In diesem Falle folgt aus (28), daß $|\delta_\nu|$ unter einer von ν unabhängigen Schranke G bleibt. Also, wenn man wieder zu den γ_ν übergeht

$$|\gamma_\nu| < \frac{G}{g^{\nu}(\nu!)^{r}}.$$

Das günstigste Resultat ergibt sich hieraus wieder, wenn man für r einen möglichst großen Wert wählt. Da aber r diesmal den Bedingungen (18) unterworfen ist, wird man

$$r = \operatorname*{Min}_{i=0}^{n-1} \frac{k_n - k_i}{n - i}$$

wählen, und erhält somit:

(30) $$|\gamma_\nu| < M^\nu (\nu!)^{-\operatorname*{Min}\limits_{i=0}^{n-1} \frac{k_n - k_i}{n-i}},$$

wo nun M wieder nur von den Anfangswerten $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$, *aber nicht von ν abhängt.* Diese auf ein *partikuläres* Integral unserer Differenzengleichung bezügliche Abschätzungsformel ist nun unter allen Umständen schärfer als die für das allgemeine Integral gültige Ungleichung (17), da ja die Zahlen k_i den Forderungen (16) unterworfen sind.

Es erübrigt noch, die das Partikulärintegral charakterisierende Bedingung

(31) $$a_0^{(N)} \delta_N + a_1^{(N)} \delta_{N+1} + \cdots + a_n^{(N)} \delta_{N+n} = 0$$

durch eine andere zu ersetzen, welche statt der δ_ν die γ_ν enthält. Betrachtet man zu dem Zweck die Kette

(32) $$\begin{bmatrix} b_0^{(N)}, & b_0^{(N+1)}, & b_0^{(N+2)}, & \cdots \\ b_1^{(N)}, & b_1^{(N+1)}, & b_1^{(N+2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n^{(N)}, & b_n^{(N+1)}, & b_n^{(N+2)}, & \cdots \end{bmatrix},$$

so ist diese wegen des in Formel (12) gegebenen Zusammenhangs der $b_i^{(\nu)}$ mit den $a_i^{(\nu)}$ mit der Kette (24) *halbäquivalent* (Nr. XIII). Sie ist also ebenfalls unbedingt konvergent, und wenn $\beta_1^{(N)}, \cdots, \beta_n^{(N)}$ ihr Wertesystem bedeutet, so hat man

(33) $$a_i^{(N)} = \beta_i^{(N)} g^{n+1-i} [(N+i+1)(N+i+2)\cdots(N+n+1)]^r.$$

Außerdem ist ja auch

$$a_0^{(N)} = b_0^{(N)} g^{n+1} [(N+1)(N+2)\cdots(N+n+1)]^r,$$

und wenn man für $a_i^{(N)}$, $a_0^{(N)}$ diese Werte in (31) einsetzt, so ergibt sich

$$b_0^{(N)} g^{n+1} [(N+1)\cdots(N+n+1)]^r \delta_N$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(N)} g^{n+1-i} [(N+i+1)\cdots(N+n+1)]^r \delta_{N+i} = 0,$$

oder auch, indem man diese Gleichung durch

$$g^{N+n+1} [(N+n+1)!]^r$$

dividiert:

$$b_0^{(N)} \frac{\delta_N}{g^N (N!)^r} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(N)} \frac{\delta_{N+i}}{g^{N+i} [(N+i)!]^r} = 0.$$

Nach (10) ist dies aber gleichbedeutend mit

(34) $$b_0^{(N)}\gamma_N + \beta_1^{(N)}\gamma_{N+1} + \cdots + \beta_n^{(N)}\gamma_{N+n} = 0.$$

Diese Formel ist nun mit (31) vollkommen äquivalent, in dem Sinne, daß jede von beiden die andere nach sich zieht. Fassen wir also unsere Resultate zusammen, so ergibt sich folgendes

Theorem: *Wenn die Koeffizienten der linearen Differenzengleichung*

$$\gamma_{\nu+n+1} = b_0^{(\nu)}\gamma_\nu + b_1^{(\nu)}\gamma_{\nu+1} + \cdots + b_n^{(\nu)}\gamma_{\nu+n} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

die Form

$$b_i^{(\nu)} = b_i\{\nu^{k_i}\} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

haben, wo die Exponenten k_i die Bedingungen

$$\frac{k_n - k_i}{n - i} > -k_n \qquad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

erfüllen, und wenn speziell auch $b_0^{(\nu)} \neq 0$ ist für alle ν, so genügt das allgemeine Integral den Ungleichungen:

$$|\gamma_\nu| < M^\nu(\nu!)^{k_n} \qquad \textit{für } \nu \geqq 1,$$

$$|\gamma_\nu| > m^\nu(\nu!)^{k_n} \qquad \textit{für } \nu \geqq \nu_1.$$

Die durch die Gleichung

$$b_0^{(N)}\gamma_N + \beta_1^{(N)}\gamma_{N+1} + \cdots + \beta_n^{(N)}\gamma_{N+n} = 0$$

charakterisierten Partikulärintegrale dagegen, aber auch nur sie allein, genügen der andern Ungleichung

$$|\gamma_\nu| < M^\nu(\nu!)^{-\underset{i=0}{\overset{n-1}{\mathrm{Min}}}\frac{k_n - k_i}{n-i}}.$$

Dabei sind M, m von ν unabhängige Konstanten; ferner bedeutet ν_1, ebenso wie N, eine hinreichend groß gewählte Zahl; $\beta_1^{(N)}, \cdots, \beta_n^{(N)}$ aber das Wertesystem der unbedingt konvergenten Kette (32).

Schließlich sei bemerkt, daß man die hier ausgezeichneten Partikulärintegrale statt durch eine lineare Gleichung zwischen $\gamma_N, \gamma_{N+1}, \cdots, \gamma_{N+n}$ ebensogut durch eine solche zwischen den Anfangswerten $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ charakterisieren kann. Zu dem Zweck führen wir die Kette

(35) $$\begin{bmatrix} b_0^{(0)}, & b_0^{(1)}, & b_0^{(2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n^{(0)}, & b_n^{(1)}, & b_n^{(2)}, & \cdots \end{bmatrix}$$

ein, deren zugehörige Rekursionsformeln lauten:

$$B_i^{(\nu+n+1)} = b_0^{(\nu)}B_i^{(\nu)} + b_1^{(\nu)}B_i^{(\nu+1)} + \cdots + b_n^{(\nu)}B_i^{(\nu+n)},$$

$$B_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \;\, i \neq k \end{cases} \qquad (i, k = 0, 1, \cdots, n).$$

Wegen der Differenzengleichung (8) erhält man dann durch die gleiche Induktion wie bei Formel (25):

$$\gamma_\nu = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i B_i^{(\nu)}.$$

Setzt man dies für $\nu = N, N+1, \cdots, N+n$ in die Gleichung

$$b_0^{(N)} \gamma_N + \beta_1^{(N)} \gamma_{N+1} + \cdots + \beta_n^{(N)} \gamma_{N+n} = 0$$

ein, so kommt:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(b_0^{(N)} B_i^{(N)} + \beta_1^{(N)} B_i^{(N+1)} + \cdots + \beta_n^{(N)} B_i^{(N+n)}\right) \gamma_i = 0, \tag{36}$$

womit die gewünschte Beziehung gefunden ist. Hat hier nicht zufällig der Koeffizient von γ_0 den Wert Null, so läßt sie sich noch etwas vereinfachen. Dann folgt nämlich aus dem Satz in Nr. VIII, angewandt auf die Ketten (32) und (35), daß die letztere ebenfalls konvergiert, und daß ihr Wertesystem $\beta_1^{(0)}, \cdots, \beta_n^{(0)}$ durch die Formeln

$$\beta_i^{(0)} = b_0^{(0)} \frac{b_0^{(N)} B_i^{(N)} + \beta_1^{(N)} B_i^{(N+1)} + \cdots + \beta_n^{(N)} B_i^{(N+n)}}{b_0^{(N)} B_0^{(N)} + \beta_1^{(N)} B_0^{(N+1)} + \cdots + \beta_n^{(N)} B_0^{(N+n)}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

gegeben ist. Gleichung (36) erweist sich daher, indem man durch den Koeffizienten von γ_0 dividiert und mit $b_0^{(0)}$ multipliziert, als gleichbedeutend mit

$$b_0^{(0)} \gamma_0 + \beta_1^{(0)} \gamma_1 + \cdots + \beta_n^{(0)} \gamma_n = 0.$$

Setzt man allgemein

$$\begin{bmatrix} b_0^{(\lambda)}, & b_0^{(\lambda+1)}, & b_0^{(\lambda+2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n^{(\lambda)}, & b_n^{(\lambda+1)}, & b_n^{(\lambda+2)}, & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \beta_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ \beta_n^{(\lambda)}, \end{cases} \tag{37}$$

sofern nur die Kette konvergiert, was für $\lambda \geqq N$ ja sicher der Fall ist, so besteht für unsere Partikulärintegrale zwischen je $n+1$ aufeinanderfolgenden γ_ν stets die lineare Gleichung

$$b_0^{(\lambda)} \gamma_\lambda + \beta_1^{(\lambda)} \gamma_{\lambda+1} + \cdots + \beta_n^{(\lambda)} \gamma_{\lambda+n} = 0. \tag{38}$$

Denn für $\lambda = N$ diente diese ja zur Charakterisierung der betreffenden Partikulärintegrale; für $\lambda < N$ wird sie genau so bewiesen wie soeben für $\lambda = 0$. Für $\lambda > N$ endlich ergibt sie sich am einfachsten durch vollständige Induktion. Angenommen nämlich, die Gleichung (38) sei für ein gewisses $\lambda (\geqq N)$ richtig. Es ist dann, da die Kette (32) *unbedingt* konvergiert, nach Nr. VII:

$$\beta_1^{(\lambda)} = b_1^{(\lambda)} + \frac{b_0^{(\lambda+1)}}{\beta_n^{(\lambda+1)}},$$

$$\beta_i^{(\lambda)} = b_i^{(\lambda)} + \frac{\beta_{i-1}^{(\lambda+1)}}{\beta_n^{(\lambda+1)}} \quad (i=2,3,\cdots,n).$$

Setzt man dies in (38) ein, so ergibt sich durch Multiplikation mit $\beta_n^{(\lambda+1)}$:

$$b_0^{(\lambda+1)}\gamma_{\lambda+1} + \beta_1^{(\lambda+1)}\gamma_{\lambda+2} + \cdots + \beta_{n-1}^{(\lambda+1)}\gamma_{\lambda+n}$$
$$+ \beta_n^{(\lambda+1)}(b_0^{(\lambda)}\gamma_\lambda + b_1^{(\lambda)}\gamma_{\lambda+1} + \cdots + b_n^{(\lambda)}\gamma_{\lambda+n}) = 0.$$

Allein die hier auftretende Klammergröße ist nach (8) gleich $\gamma_{\lambda+n+1}$, so daß vorstehende Gleichung nichts anderes ist als (38); nur ist λ ersetzt durch $\lambda+1$. Dadurch ist aber die Allgemeingültigkeit bewiesen.

Umgekehrt ist auch leicht zu sehen: Wenn ein Integral der Differenzengleichung (8) *nicht* unserer besonderen Klasse von Partikulärintegralen angehört, so befriedigt es für gar keinen Index λ die Gleichung (38). Denn andernfalls würde durch den rückwärtigen Schluß das Bestehen der nämlichen Gleichung auch für den Index $\lambda = N$ folgen, so daß das betreffende Integral gegen die Voraussetzung doch eines der obigen Partikulärintegrale wäre.

§ 4.

Die adjungierte Differenzengleichung.

Mit der im vorigen Paragraphen studierten Differenzengleichung

(8) $\quad \gamma_{\nu+n+1} = b_0^{(\nu)}\gamma_\nu + b_1^{(\nu)}\gamma_{\nu+1} + \cdots + b_n^{(\nu)}\gamma_{\nu+n} \quad (\nu=0,1,2,\cdots)$

ist nahe verwandt die folgende:

(39) $\quad \eta_\nu = b_n^{(\nu)}\eta_{\nu+1} + b_{n-1}^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2} + \cdots + b_0^{(\nu+n)}\eta_{\nu+n+1} \quad (\nu=0,1,2,\cdots).$

Man nennt diese Differenzengleichung die inverse (Pincherle) oder auch die adjungierte (Bortolotti) der vorigen. Der Zusammenhang zwischen beiden äußert sich insbesondere darin, daß der Ausdruck

(40) $$\Phi_\nu = \sum_{i=0}^{n}\left(b_i^{(\nu)}\eta_{\nu+1} + b_{i-1}^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2} + \cdots + b_0^{(\nu+i)}\eta_{\nu+i+1}\right)\gamma_{\nu+i},$$

wo η_ν, γ_ν je ein beliebiges Integral von (39) und (8) bedeuten, von ν unabhängig ist. In der Tat ergibt sich, wenn man hier den letzten Summanden getrennt schreibt:

$$\Phi_\nu = \sum_{i=0}^{n-1}\left(b_i^{(\nu)}\eta_{\nu+1} + b_{i-1}^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2} + \cdots + b_0^{(\nu+i)}\eta_{\nu+i+1}\right)\gamma_{\nu+i}$$
$$+ \left(b_n^{(\nu)}\eta_{\nu+1} + b_{n-1}^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2} + \cdots + b_0^{(\nu+n)}\eta_{\nu+n+1}\right)\gamma_{\nu+n}.$$

Aber dieser letzte Summand ist nun nach (8) und (39) gleich

$$\eta_\nu\left(b_0^{(\nu-1)}\gamma_{\nu-1} + b_1^{(\nu-1)}\gamma_\nu + \cdots + b_n^{(\nu-1)}\gamma_{\nu+n-1}\right).$$

Setzt man dies ein, so geht der ganze Ausdruck durch eine einfache Umordnung der Glieder über in $\Phi_{\nu-1}$. Es ist also $\Phi_\nu = \Phi_{\nu-1}$, und daher in der Tat Φ_ν unabhängig vom Index ν.

Man beachte weiter, daß man durch Umordnung der Glieder dem Φ_ν auch die Gestalt

$$(41)\qquad \Phi_\nu = \sum_{k=0}^{n}\left(b_0^{(\nu+k)}\gamma_{\nu+k} + b_1^{(\nu+k)}\gamma_{\nu+k+1} + \cdots + b_{n-k}^{(\nu+k)}\gamma_{\nu+n}\right)\eta_{\nu+k+1}$$

geben kann.

Wir machen über die Koeffizienten $b_i^{(\nu)}$ die gleichen Annahmen wie im vorigen Paragraphen, also

$$b_0^{(\nu)} \neq 0,$$
$$b_i^{(\nu)} = b_i\left\{\nu^{k_i}\right\} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n),$$
$$\frac{k_n - k_i}{n - i} > -k_n \qquad (i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Auch alle andern Zahlen, wie N, $\beta_i^{(N)}$, $\alpha_i^{(N)}$ usw. sollen ihre frühere Bedeutung behalten.

Hinsichtlich der Integrale von (39) sind dann ebenfalls zwei Fälle zu unterscheiden. Der erste Fall ist dadurch charakterisiert, daß zwischen den $n+1$ Integralwerten $\eta_{N+1}, \eta_{N+2}, \cdots, \eta_{N+n+1}$ die n linearen homogenen Gleichungen

$$(42)\qquad b_i^{(N)}\eta_{N+1} + b_{i-1}^{(N+1)}\eta_{N+2} + \cdots + b_0^{(N+i)}\eta_{N+i+1} = \beta_i^{(N)}\eta_{N+1}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

statthaben. Der zweite Fall besteht darin, daß wenigstens eine dieser n Gleichungen nicht erfüllt ist.

Wir behandeln den zweiten Fall als den allgemeineren zuerst. Man wird in diesem Fall $n+1$ Zahlen $\gamma_N, \gamma_{N+1}, \cdots, \gamma_{N+n}$ so bestimmen können (für $n > 1$ sogar auf unendlich viele Arten), daß die zwei Gleichungen bestehen:

$$(43)\qquad b_0^{(N)}\gamma_N + \sum_{i=1}^{n}\beta_i^{(N)}\gamma_{N+i} = 0,$$

$$(44)\qquad b_0^{(N)}\eta_{N+1}\gamma_N + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i^{(N)}\eta_{N+1} + b_{i-1}^{(N+1)}\eta_{N+2} + \cdots + b_0^{(N+i)}\eta_{N+i+1}\right)\gamma_{N+i} = 1;$$

denn die Koeffizienten der zweiten Gleichung sind ja nach unserer jetzigen Annahme denen der ersten nicht proportional.

Betrachtet man jetzt die so bestimmten Werte $\gamma_N, \gamma_{N+1}, \cdots, \gamma_{N+n}$ als Ausgangswerte eines Integrals der Differenzengleichung (8), so gehört dieses Integral wegen Gleichung (43) zu denjenigen Partikulärintegralen, welche in dem Theorem Seite 462 besonders ausgezeichnet sind, und es ist daher:

$$(45) \qquad |\gamma_\nu| < M^\nu (\nu!)^{-r}, \quad r = \operatorname*{Min}_{i=0}^{n-1} \frac{k_n - k_i}{n-i}.$$

Andererseits besagt aber Gleichung (44)

$$\Phi_N = 1.$$

Daher ist, weil Φ_ν von ν nicht abhängt, allgemein $\Phi_\nu = 1$, oder nach (41):

$$(46) \qquad \sum_{k=0}^{n} \left(b_0^{(\nu+k)} \gamma_{\nu+k} + b_1^{(\nu+k)} \gamma_{\nu+k+1} + \cdots + b_{n-k}^{(\nu+k)} \gamma_{\nu+n}\right) \eta_{\nu+k+1} = 1.$$

Da nun aber

$$|b_i^{(\nu)}| = |b_i| \cdot |\{\nu^{k_i}\}| < C\nu^{k_i} < G^\nu \qquad (\text{für } \nu \geqq 1)$$

ist, wo G eine von ν unabhängige Zahl bedeutet, so ist nach (45) auch

$$\sum_{k=0}^{n} \left| b_0^{(\nu+k)} \gamma_{\nu+k} + b_1^{(\nu+k)} \gamma_{\nu+k+1} + \cdots + b_{n-k}^{(\nu+k)} \gamma_{\nu+n} \right| < M_1^\nu (\nu!)^{-r},$$

so daß die linke Seite von (46) kleiner wird als

$$M_1^\nu (\nu!)^{-r} \cdot \operatorname*{Max}_{k=0}^{n} |\eta_{\nu+k+1}|.$$

Die Zahl 1 ist daher kleiner als dieser Ausdruck, und folglich:

$$\operatorname*{Max}_{k=0}^{n} |\eta_{\nu+k+1}| > \frac{(\nu!)^r}{M_1^\nu}.$$

Infolgedessen ist jedenfalls für unendlich viele Werte von ν (nämlich für je $n+1$ aufeinanderfolgende ν-Werte mindestens einmal):

$$(47) \qquad |\eta_\nu| > m^\nu (\nu!)^r,$$

wo nun natürlich auch wieder m von ν nicht abhängt.

Wir holen jetzt den ersten der obigen zwei Fälle nach. Da bestehen also die n Gleichungen (42), und ich behaupte, es ist dann allgemein für $\nu \geqq N$:

$$(48) \qquad b_i^{(\nu)} \eta_{\nu+1} + b_{i-1}^{(\nu+1)} \eta_{\nu+2} + \cdots + b_0^{(\nu+i)} \eta_{\nu+i+1} = \beta_i^{(\nu)} \eta_{\nu+1}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n).$$

In der Tat gelten diese Gleichungen jedenfalls für $\nu = N$, weil sie dann mit dem System (42) identisch sind. Nehmen wir also an, sie gelten für

einen bestimmten Index $\nu (\geqq N)$; dann ist insbesondere, indem man $i=1$ setzt:

$$b_1^{(\nu)}\eta_{\nu+1}+b_0^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2}=\beta_1^{(\nu)}\eta_{\nu+1}=\left(b_1^{(\nu)}+\frac{b_0^{(\nu+1)}}{\beta_n^{(\nu+1)}}\right)\eta_{\nu+1}.$$

Also, da $b_0^{(\nu+1)}\neq 0$ ist:

$$\eta_{\nu+2}=\frac{\eta_{\nu+1}}{\beta_n^{(\nu+1)}}. \tag{49}$$

Ferner folgt für $i>1$ aus (48):

$$b_i^{(\nu)}\eta_{\nu+1}+b_{i-1}^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2}+\cdots+b_0^{(\nu+i)}\eta_{\nu+i+1}=\left(b_i^{(\nu)}+\frac{\beta_{i-1}^{(\nu+1)}}{\beta_n^{(\nu+1)}}\right)\eta_{\nu+1}.$$

Daher, noch mit Berücksichtigung von (49):

$$b_{i-1}^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2}+\cdots+b_0^{(\nu+i)}\eta_{\nu+i+1}=\beta_{i-1}^{(\nu+1)}\frac{\eta_{\nu+1}}{\beta_n^{(\nu+1)}}=\beta_{i-1}^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2}.$$

Dies gilt für $i=2,3,\cdots,n$. Setzt man aber $i+1$ an Stelle von i, so erhält man:

$$b_i^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2}+b_{i-1}^{(\nu+2)}\eta_{\nu+3}+\cdots+b_0^{(\nu+i+1)}\eta_{\nu+i+2}=\beta_i^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2} \tag{50}$$
$$(i=1,2,\cdots,n-1).$$

Weiter ist aber nach den Gleichungen (39) und (49):

$$b_n^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2}+b_{n-1}^{(\nu+2)}\eta_{\nu+3}+\cdots+b_0^{\nu+n+1}\eta_{\nu+n+2}=\eta_{\nu+1}=\beta_n^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2}. \tag{51}$$

Die Gleichungen (50) und (51) zusammengenommen sind nun aber nichts anderes als das System (48); nur ist der Index ν ersetzt durch $\nu+1$. Damit ist die Allgemeingültigkeit von (48) erwiesen.

Es besteht dann aber auch die soeben aus (48) abgeleitete Gleichung (49) für $\nu\geqq N$ zu Recht, woraus dann sogleich die Formel resultiert:

$$\eta_\nu=\frac{\eta_{N+1}}{\beta_n^{(N+1)}\beta_n^{(N+2)}\cdots\beta_n^{(\nu-1)}}\qquad(\text{für } \nu\geqq N+2). \tag{52}$$

Die willkürliche Zahl η_{N+1} ist natürlich von Null verschieden zu denken, sonst hätten wir die triviale Lösung des Systems (42), bei der alle Unbekannte Null sind, und damit das triviale Integral von (39): $\eta_\nu=0$ für alle ν.

Es handelt sich nun darum, den Nenner in Gleichung (52) passend abzuschätzen. Nach Formel (33) für $i=n$ hat man:

$$\alpha_n^{(N)}=\beta_n^{(N)}g(N+n+1)^r,$$

und analog auch allgemein:

$$\alpha_n^{(\lambda)}=\beta_n^{(\lambda)}g(\lambda+n+1)^r\qquad(\lambda\geqq N), \tag{53}$$

wobei natürlich

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)}, & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \alpha_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(\lambda)} \end{cases} \qquad (\lambda \geqq N)$$

gesetzt worden ist. Aber wenn man den Satz von Nr. X auf diese letzte Kette anwendet, deren Elemente ja den Bedingungen (23) genügen, so kommt:

$$|\alpha_1^{(\lambda)} - a_1^{(\lambda)}| + |\alpha_2^{(\lambda)} - a_2^{(\lambda)}| + \cdots + |\alpha_n^{(\lambda)} - a_n^{(\lambda)}| \leqq \frac{1}{2};$$

also a fortiori

$$|\alpha_n^{(\lambda)} - a_n^{(\lambda)}| < 1,$$

woraus sogleich folgt

$$|a_n^{(\lambda)}| + 1 > |\alpha_n^{(\lambda)}| > |a_n^{(\lambda)}| - 1.$$

Nach den Formeln (21) und (22) ist daher

$$G_1 \lambda^{k_n + r} > |\alpha_n^{(\lambda)}| > g_1 \lambda^{k_n + r},$$

wo G_1, g_1 von λ nicht abhängen. Führt man hier mittels Gleichung (53) $\beta_n^{(\lambda)}$ statt $\alpha_n^{(\lambda)}$ ein, so ergibt sich:

$$G_2 \lambda^{k_n} > |\beta_n^{(\lambda)}| > g_2 \lambda^{k_n}.$$

Setzt man der Reihe nach $\lambda = N+1, N+2, \cdots, \nu - 1$, und multipliziert dann, so folgt schließlich:

$$|\beta_n^{(N+1)} \beta_n^{(N+2)} \ldots \beta_n^{(\nu-1)}| \begin{cases} > g_2^{\nu-1-N}[(N+1)(N+2)\cdots(\nu-1)]^{k_n} \\ < G_2^{\nu-1-N}[(N+1)(N+2)\cdots(\nu-1)]^{k_n}, \end{cases}$$

oder was dasselbe sagt:

$$G_3^{\nu}(\nu!)^{k_n} > |\beta_n^{(N+1)} \beta_n^{(N+2)} \cdots \beta_n^{(\nu-1)}| > g_3^{\nu}(\nu!)^{k_n}.$$

Damit ist die gesuchte Abschätzungsformel gefunden, und wenn man sie auf Gleichung (52) anwendet, so ergeben sich die Ungleichungen:

$$(54) \qquad m^{\nu}(\nu!)^{-k_n} < |\eta_\nu| < M^{\nu}(\nu!)^{-k_n} \qquad (\nu \geqq N+2),$$

wo nun natürlich auch m, M von ν nicht abhängen. Die zweite dieser Ungleichungen gilt übrigens auch schon für $\nu \geqq 1$, indem nötigenfalls die Zahl M etwas größer gewählt wird. Nicht so die erste Ungleichung, da es keineswegs ausgeschlossen ist, daß einzelne $\eta_\nu (\nu < N+2)$ den Wert Null haben.

Zu beachten ist, daß die n Gleichungen (42) voneinander unabhängig sind, so daß die Verhältnisse $\eta_{N+1} : \eta_{N+2} : \cdots : \eta_{N+n+1}$ durch sie *eindeutig* bestimmt werden. Da mit (42) zugleich auch (49) besteht, wie wir sahen, so sind diese Verhältnisse die folgenden:

$$(55) \quad \eta_{N+1} : \eta_{N+2} : \cdots : \eta_{N+n+1} = 1 : \frac{1}{\beta_n^{(N+1)}} : \frac{1}{\beta_n^{(N+1)} \beta_n^{(N+2)}} : \cdots : \frac{1}{\beta_n^{(N+1)} \beta_n^{(N+2)} \cdots \beta_n^{(N+n)}}.$$

Es gibt demnach (von einem konstanten Faktor abgesehen) *ein und nur ein* Partikulärintegral der Differenzengleichung (39), welches die Gleichungen

(42) und folglich die Ungleichungen (54) erfüllt. Alle anderen Integrale genügen, wie wir sahen, für unendlich viele ν der mit (54) nicht verträglichen Ungleichung (47).

Zusammenfassend erhalten wir das

Theorem: *Wenn die Koeffizienten der linearen Differenzengleichung*

$$\eta_\nu = b_n^{(\nu)}\eta_{\nu+1} + b_{n-1}^{(\nu+1)}\eta_{\nu+2} + \cdots + b_0^{(\nu+n)}\eta_{\nu+n+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

die Form

$$b_i^{(\nu)} = b_i\{\nu^{k_i}\} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

haben, wo die Exponenten k_i den Bedingungen

$$\frac{k_n - k_i}{n - i} > -k_n \qquad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

genügen, und wenn speziell auch $b_0^{(\nu)} \neq 0$ ist für alle ν, so genügt das allgemeine Integral der Ungleichung

$$|\eta_\nu| > m^\nu(\nu!)^{\operatorname*{Min}\limits_{i=0}^{n-1}\frac{k_n-k_i}{n-i}}$$

für unendlich viele ν. Nur das eine, durch die n linearen Gleichungen

$$b_i^{(N)}\eta_{N+1} + b_{i-1}^{(N+1)}\eta_{N+2} + \cdots + b_0^{(N+i)}\eta_{N+i+1} = \beta_i^{(N)}\eta_{N+1}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

charakterisierte Partikulärintegral genügt den anderen Ungleichungen:

$$|\eta_\nu| < M^\nu(\nu!)^{-k_n} \quad \textit{für } \nu \geqq 1,$$
$$|\eta_\nu| > m^\nu(\nu!)^{-k_n} \quad \textit{für } \nu \geqq \nu_1.$$

Zum Schluß sei wieder bemerkt, daß auch hier das ausgezeichnete Partikulärintegral sich ebensogut durch n lineare Gleichungen zwischen den Anfangswerten $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n$, das heißt also durch die Verhältnisse $\eta_0 : \eta_1 : \cdots : \eta_n$ charakterisieren läßt. Wenn die Kette (35) konvergiert, was ja nur ausnahmsweise nicht der Fall sein wird, so werden diese Gleichungen analog zu (42) sich in der Form schreiben lassen:

$$(56) \quad \begin{aligned} b_i^{(0)}\eta_1 + b_{i-1}^{(1)}\eta_2 + \cdots + b_0^{(i)}\eta_{i+1} &= \beta_i^{(0)}\eta_1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ \eta_0 &= \beta_n^{(0)}\eta_1, \end{aligned}$$

wobei noch von (39) für $\nu = 0$ Gebrauch gemacht ist. Wenn die Kette (35) sogar *unbedingt* konvergiert, wird man in Analogie zu (55) auch erhalten:

$$(57) \qquad \eta_0 : \eta_1 : \cdots : \eta_n = 1 : \frac{1}{\beta_n^{(0)}} : \frac{1}{\beta_n^{(0)}\beta_n^{(1)}} : \cdots : \frac{1}{\beta_n^{(0)}\beta_n^{(1)}\cdots\beta_n^{(n-1)}}.$$

Dabei dürfen die $b_i^{(\nu)}$ für $i + \nu < n$, die ja in dem Theorem gar nicht vorkommen, bis auf die Einschränkung $b_0^{(\nu)} \neq 0$ ganz willkürlich angenommen werden. Die $\beta_i^{(0)}, \beta_i^{(1)}, \cdots$ werden dann von selbst derart, daß (56) und (57) besteht.

§ 5.

Anwendung auf Differentialgleichungen.

Wir betrachten homogene lineare Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten rationale Funktionen der unabhängigen Variabeln sind. Jede solche Differentialgleichung läßt sich auf die „Normalform" bringen:

$$\sum_{i=0}^{m} x^i (c_{i,0} + c_{i,1} x + \cdots + c_{i,n+1} x^{n+1}) \frac{d^i y}{d x^i} = 0, \tag{58}$$

wobei man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen darf, daß wenigstens eine der Zahlen $c_{i,0}$ und wenigstens eine der Zahlen $c_{i,n+1}$ von Null verschieden ist. Auch die c mit dem ersten Index m verschwinden nicht alle, weil sonst die Differentialgleichung von geringerer als m^{ter} Ordnung wäre.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich das allgemeine Integral an der Stelle $x = 0$ bestimmt verhält, lautet dann bekanntlich: $c_{m,0} \neq 0$.

Wir untersuchen jetzt die gegenteilige Annahme:

$$c_{m,0} = 0. \tag{59}$$

Dann ist also der Nullpunkt eine Stelle der Unbestimmtheit für das allgemeine Integral; aber einige Partikulärintegrale können sich sehr wohl bestimmt verhalten. Um dies zu prüfen, setze man

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu x^{\varrho+\nu} \tag{60}$$

in die Differentialgleichung ein. Dann erhält man, wenn zur Abkürzung

$$c_{0,h} + c_{1,h}\varrho + c_{2,h}\varrho(\varrho-1) + \cdots + c_{m,h}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-m+1) = f_h(\varrho) \tag{61}$$
$$(h = 0, 1, \cdots, n+1)$$

gesetzt wird, zur Berechnung der Koeffizienten γ_ν die Formeln:

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 f_0(\varrho) = 0,\\
&\gamma_1 f_0(\varrho+1) + \gamma_0 f_1(\varrho) = 0,\\
(62)\quad &\gamma_2 f_0(\varrho+2) + \gamma_1 f_1(\varrho+1) + \gamma_0 f_2(\varrho) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\gamma_{\nu+n+1} f_0(\varrho+\nu+n+1) + \gamma_{\nu+n} f_1(\varrho+\nu+n) + \cdots + \gamma_\nu f_{n+1}(\varrho+\nu) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Soll die Entwicklung (60) wirklich mit der ϱ^{ten} Potenz von x beginnen, also $\gamma_0 \neq 0$ sein, so folgt aus der ersten dieser Gleichungen das

bekannte Resultat, daß $f_0(\varrho) = 0$, also ϱ eine Wurzel der *determinierenden Fundamentalgleichung* sein muß. Wir nehmen jetzt an, es sei sogar ϱ eine gemeinsame Wurzel der $\frac{p(p+1)}{2}$ Gleichungen:

$$f_h(\varrho+i) = 0 \quad \text{für} \quad h + i < p,$$

wo p eine positive ganze Zahl bedeutet.*) Dann sind die p ersten der Gleichungen (62) ohne weiteres erfüllt, und es bleibt zur Berechnung der γ_ν bloß das Gleichungssystem:

$$(63)\quad \begin{aligned} &\gamma_p f_0(\varrho+p) + \gamma_{p-1} f_1(\varrho+p-1) + \cdots + \gamma_0 f_p(\varrho) = 0^{**}),\\ &\gamma_{p+1} f_0(\varrho+p+1) + \gamma_p f_1(\varrho+p) + \cdots + \gamma_0 f_{p+1}(\varrho) = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\gamma_{\nu+n+1} f_0(\varrho+\nu+n+1) + \gamma_{\nu+n} f_1(\varrho+\nu+n) + \cdots + \gamma_\nu f_{n+1}(\varrho+\nu) = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Die Frage ist jetzt, ob man dieses System durch solche Werte von γ_ν befriedigen kann, daß die Reihe (60) einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat. Ist dies der Fall, so stellt die betreffende Reihe in ihrem Konvergenzgebiet ein Integral der Differentialgleichung dar.

Nun ist nach der Annahme (59) $c_{m,0} = 0$. Da aber, wie zu Beginn des Paragraphen bemerkt wurde, die Zahlen

$$c_{0,0},\ c_{1,0},\ \cdots,\ c_{m,0}$$

nicht sämtlich verschwinden, so sei etwa $c_{m-j,0}$ die letzte von Null verschiedene. Dann ist $j \geqq 1$, und nach (61) wird $f_0(\varrho)$ genau vom $(m-j)^{\text{ten}}$ Grad.***)

Weiter setzen wir von jetzt an

$$(64)\qquad c_{m,1} \neq 0$$

voraus, so daß $f_1(\varrho)$ genau vom m^{ten} Grad ist. Die übrigen Funktionen $f_h(\varrho)$ sind höchstens vom m^{ten} Grad; sie können ganz gut auch von geringerem Grad sein und zum Teil sogar identisch verschwinden. Nur $f_{n+1}(\varrho)$ darf jedenfalls nicht identisch verschwinden, weil von den in $f_{n+1}(\varrho)$

---

*) Übrigens muß $p \leqq m - 1$ sein. Denn es ist ja insbesondere

$$f_0(\varrho + i) = 0 \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \cdots, p-1;$$

daher hat die Gleichung $f_0(x) = 0$ mindestens p verschiedene Wurzeln. Aber $f_0(x)$ ist nach der Definitionsgleichung (61) höchstens vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grad, da nach Annahme $c_{m,0} = 0$ ist. Also folgt $p \leqq m - 1$; w. z. b. w.

**) Ist $p > n + 1$, so bricht die linke Seite dieser Gleichung natürlich schon mit dem Glied $\gamma_{p-n-1} f_{n+1}(\varrho + p - n - 1)$ ab; analog bei der nächsten Gleichung, da ja der Index der Funktionen f höchstens gleich $n + 1$ ist.

***) Die Zahl j wird nach Herrn Thomé (Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik, Bd. 75) als *charakteristischer Index* bezeichnet.

vorkommenden Koeffizienten $c_{0,n+1}, c_{1,n+1}, \cdots, c_{m,n+1}$ ja auch mindestens einer von Null verschieden sein sollte.

Sei daher N eine so große Zahl, daß die Ausdrücke

$$f_0(\varrho+\nu+n+1) \quad \text{und} \quad f_{n+1}(\varrho+\nu)$$

für $\nu \geqq N$ nicht mehr verschwinden, und wir behalten uns vor, die Zahl N durch eine weitere Forderung noch zu vergrößern. Aus (63) folgt dann für $\nu \geqq N$:

$$(65) \qquad \gamma_{\nu+n+1} = -\frac{f_{n+1}(\varrho+\nu)}{f_0(\varrho+\nu+n+1)}\gamma_\nu - \frac{f_n(\varrho+\nu+1)}{f_0(\varrho+\nu+n+1)}\gamma_{\nu+1} - \cdots$$
$$\cdots - \frac{f_1(\varrho+\nu+n)}{f_0(\varrho+\nu+n+1)}\gamma_{\nu+n}.$$

Hier sind rechter Hand die Koeffizienten der γ rationale Funktionen von ν, und speziell der Koeffizient von γ_ν ist stets von Null verschieden. Der Koeffizient von $\gamma_{\nu+n}$ hat nach der auf pag. 456 festgesetzten Bezeichnung die Form:

$$-\frac{c_{m,1}\{\nu^m\}}{c_{m-j,0}\{\nu^{m-j}\}} = -\frac{c_{m,1}}{c_{m-j,0}}\{\nu^j\}.$$

Auch die übrigen Koeffizienten sind von der Form

$$b_i\{\nu^{k_i}\},$$

wo aber alle $k_i \leqq j$ sind. Man kann daher auf die Differenzengleichung (65) das Theorem pag. 462 anwenden, und findet, daß im allgemeinen

$$|\gamma_\nu| > m^\nu(\nu!)^j$$

wird, so daß die Reihe (60) für alle x divergiert. Nur wenn die Ausgangswerte $\gamma_N, \gamma_{N+1}, \cdots, \gamma_{N+n}$ einer gewissen linearen homogenen Gleichung genügen, erhält man statt dessen:*)

$$(66) \qquad |\gamma_\nu| < M^\nu(\nu!)^{-\underset{i=0}{\overset{n-1}{\mathrm{Min}}}\frac{j-k_i}{n-i}} \leqq M^\nu.$$

*) Das Theorem pag. 462 hat indes nur für $n>0$ Bedeutung. In der Differentialgleichung (58) kann aber auch $n=0$ sein. Dann geht (65) über in

$$(65\text{a}) \qquad \gamma_{\nu+1} = -\frac{f_1(\varrho+\nu)}{f_0(\varrho+\nu+1)}\gamma_\nu = b\{\nu^j\}\gamma_\nu \qquad (\nu \geqq N),$$

und daher ist unbedingt

$$|\gamma_\nu| > m^\nu(\nu!)^j,$$

außer für $\gamma_N = 0$. Der Fall $n=0$ läßt sich daher nachträglich dem allgemeinen subsumieren, und es bleiben alle Folgerungen, insbesondere auch das auf der folgenden Seite formulierte Theorem bestehen. Die Gleichung (67) lautet einfach: $\gamma_N = 0$; da dann wegen (65a) auch $\gamma_\nu = 0$ für $\nu > N$, so sind die Integrale der Form (60) im Fall $n=0$, vom Faktor x^ϱ abgesehen, sämtlich Polynome.

Besagte lineare Gleichung können wir, wenn nur N hinreichend groß gewählt wird, stets in der Gestalt

(67) $$b_0^{(N)}\gamma_N + \beta_1^{(N)}\gamma_{N+1} + \cdots + \beta_n^{(N)}\gamma_{N+n} = 0$$

annehmen, wobei

$$b_0^{(N)} = -\frac{f_{n+1}(\varrho+N)}{f_0(\varrho+N+n+1)},$$

und $\beta_1^{(N)}, \beta_2^{(N)}, \cdots, \beta_n^{(N)}$ das Wertesystem einer gewissen Kette n^{ter} Ordnung ist.

Wir bestimmen jetzt $N+n+1$ Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{N+n}$ derart, daß sie den $N+n-p+1$ ersten Gleichungen (63) und außerdem der Gleichung (67) genügen. Es sind das im ganzen $N+n-p+2$ homogene lineare Gleichungen für $N+n+1$ Unbekannte. Ein solches Gleichungssystem hat bekanntlich mindestens $p-1$ linear unabhängige Lösungen. Zu jeder Lösung berechnen wir dann die Zahlen $\gamma_{N+n+1}, \gamma_{N+n+2}, \cdots$ sukzessive aus den noch nicht benutzten Gleichungen (63), oder, was dasselbe ist, aus (65). Diese Zahlen γ_ν werden dann immer, da ja die Gleichung (67) erfüllt ist, auch der Ungleichung (66), also

$$|\gamma_\nu| < M^\nu$$

genügen; daher hat dann die Reihe (60) allemal einen von Null verschiedenen Konvergenzradius. Wir sehen somit, daß es mindestens $p-1$ linear unabhängige Koeffizientensysteme γ_ν gibt, welche den Gleichungen (63) genügen, und für welche die Reihe (60) in einem gewissen Gebiet konvergiert. Das besagt aber, daß es mindestens $p-1$ linear unabhängige Integrale der Form (60) gibt. Daher:

Theorem: *Wenn in der Differentialgleichung*

$$\sum_{i=0}^{m} x^i(c_{i,0} + c_{i,1}x + \cdots + c_{i,n+1}x^{n+1})\frac{d^iy}{dx^i} = 0$$

der Koeffizient $c_{m,0} = 0$, *aber* $c_{m,1} \neq 0$ *ist, und wenn* ϱ *eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen*

$$f_h(\varrho+i) = 0 \quad \textit{für} \quad h+i<p$$

ist, so gibt es mindestens $p-1$ *linear unabhängige Integrale der Form*

$$y = x^\varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu x^\nu.$$

Die bisher notwendige Annahme, daß nicht alle $c_{i,0}$ verschwinden, wurde in der Fassung des Theorems weggelassen, weil es auch ohne diese Annahme richtig bleibt. Wenn nämlich alle $c_{i,0}$ verschwinden, so kann man die Differentialgleichung durch x dividieren, ohne die Normalform

zu zerstören; wegen $c_{m,1} \neq 0$ gehört sie dann dem Typus an, bei dem das *allgemeine* Integral sich bestimmt verhält, den man also nach den gewöhnlichen Methoden erledigen kann. Man sieht auch ohne weiteres aus dem System (63), da jetzt $f_0(\varrho)$ identisch verschwindet, daß von den γ_ν mindestens $p-1$ willkürlich bleiben. Für genügend große ν nimmt außerdem die allgemeine Gleichung (63) die Form an:

$$\gamma_{\nu+n} = -\frac{f_2(\varrho+\nu+n-1)}{f_1(\varrho+\nu+n)}\gamma_{\nu+n-1} - \cdots - \frac{f_{n+1}(\varrho+\nu)}{f_1(\varrho+\nu+n)}\gamma_\nu,$$

und da wegen $c_{m,1} \neq 0$ der Grad von $f_1(\varrho)$ den der übrigen $f_h(\varrho)$ mindestens erreicht, so folgt hieraus (unter Benutzung von Ungleichung (15)):

$$|\gamma_\nu| < M^\nu,$$

so daß die Reihe jetzt stets einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat, ohne daß die $p-1$ willkürlichen γ irgend welchen Einschränkungen unterliegen müssen.

Besonderes Interesse verdient der Fall $\varrho = 0$. Die Bedingungen des Theorems werden dann

$$f_h(i) = 0 \quad \text{für} \quad h+i<p,$$

und dies ist, wie leicht zu sehen, gleichbedeutend mit

$$c_{i,h} = 0 \quad \text{für} \quad h+i<p.$$

Die Differentialgleichung nimmt daher die Form an:

$$\sum_{i=0}^{p-1} x^i\left(c_{i,p-i}x^{p-i} + c_{i,p+1-i}x^{p+1-i} + \cdots + c_{i,n+1}x^{n+1}\right)\frac{d^iy}{dx^i}$$

$$+\sum_{i=p}^{m} x^i\left(c_{i,0} + c_{i,1}x + \cdots + c_{i,n+1}x^{n+1}\right)\frac{d^iy}{dx^i} = 0\text{*)},$$

wobei zu beachten ist, daß die zweite Summe noch mindestens zwei Terme enthält (siehe die erste Fußnote pag. 471). Jetzt kann man durch x^p dividieren und erhält dann wegen $c_{m,0} = 0$:

$$\sum_{i=0}^{p-1} P_i(x)\frac{d^iy}{dx^i} + \sum_{i=p}^{m-1} x^{i-p}Q_i(x)\frac{d^iy}{dx^i} + x^{m-p+1}R(x)\frac{d^my}{dx^m} = 0,$$

wo $P_i(x)$, $Q_i(x)$, $R(x)$ Polynome sind, und wegen $c_{m,1} \neq 0$ speziell $R(0) \neq 0$. Es ergibt sich so das

Korollar I: *Die Differentialgleichung m^{ter} Ordnung*

$$x^{m-p+1}Ry^{(m)} + x^{m-p-1}Q_{m-1}y^{(m-1)} + x^{m-p-2}Q_{m-2}y^{(m-2)} + \cdots$$
$$+ x^0Q_py^{(p)} + P_{p-1}y^{(p-1)} + P_{p-2}y^{(p-2)} + \cdots + P_0y = 0,$$

*) Ist $p > n+1$, so läuft die erste der beiden Summen natürlich nur von $i = p-n-1$ an.

wo R, Q_i, P_i Polynome in x bedeuten, von denen das erste im Nullpunkt nicht verschwindet, hat mindestens $p-1$ linear unabhängige, im Nullpunkt analytische Integrale.

Nach den seither üblichen Methoden dürfte sich dieser Satz kaum beweisen lassen. Es gelingt dies nur, wenn alle Q_i im Nullpunkt verschwinden, was dem Fall von vorhin entspricht, wo alle $c_{i,0}=0$ waren. Für $p=m-1$ gestattet der Satz noch die folgende Formulierung:

Korollar II: *Hat eine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung Polynome zu Koeffizienten, so sind in einer* **doppelten** *Nullstelle des Koeffizienten der höchsten Ableitung mindestens $m-2$ linear unabhängige Integrale analytisch.*

Bekanntlich sind in einer einfachen Nullstelle mindestens $m-1$ Integrale analytisch. Für eine doppelte Nullstelle konnte aber das obige meines Wissens seither nur in dem Fall bewiesen werden, daß auch der Koeffizient der zweithöchsten Ableitung in dem betreffenden Punkt verschwindet. Es ist nun sehr wahrscheinlich, daß ganz allgemein in einer i-fachen Nullstelle wenigstens noch $m-i$ Integrale analytisch sind. Doch konnte ich diese Vermutung für $i>2$ mit meiner Methode nicht mehr beweisen und auch in der Literatur einen Beweis nicht finden.

Hierbei sei noch auf den Zusammenhang dieser Frage mit dem folgenden, zuerst von Herrn Poincaré ausgesprochenen Satz hingewiesen:*)

„Sind die Koeffizienten einer linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung Polynome p^{ten} Grades $(p<m)$, so sind mindestens $m-p$ linear unabhängige Integrale im Endlichen überall analytisch."

Herr Poincaré hat diesen Satz mit Hilfe der Laplaceschen Transformation bewiesen; doch ist sein Beweis nur für den Fall erschöpfend, daß der Koeffizient der höchsten Ableitung der Laplaceschen Transformierten bloß *einfache* Nullstellen hat, weil bei mehrfachen Nullstellen unter anderem der Übelstand auftritt, daß gerade die obige durch keinen Beweis gestützte Vermutung zu Hilfe genommen wird.**) Herr Poincaré bemerkt aber, daß der Beweis sich auch direkt (d. h. ohne Laplacesche Transformation) führen lasse, und in der Tat gelangt man durch folgende einfache Überlegung zum Ziel:

Sei in einer regulären Stelle ξ

$$y_1, y_2, \cdots, y_m$$

---

*) Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. American Journal of Mathematics, vol. 7 (1885).

**) Durchgreifender dürfte vielleicht die Methode sein, mit welcher Herr Helge von Koch zum gleichen Satz gelangte (Comptes Rendus, 116 (1893), pag. 368). Leider ist aber der Beweis nicht durchgeführt.

ein Fundamentalsystem, so daß jedes Integral die Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$$

hat, wo $c_1, \cdots, c_m$ Konstanten sind. Die im Endlichen gelegenen singulären Punkte sind die Nullstellen des Koeffizienten der höchsten (m^{ten}) Ableitung, welche die Ordnungszahlen $i_1, i_2, \cdots, i_r$ haben mögen; es ist

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_r = p.$$

Nun führe man das allgemeine Integral y vom Punkt ξ aus auf irgend einem Weg in die erste Nullstelle. Dort bleiben, die fragliche Vermutung als richtig angenommen, $m - i_1$ Integrale analytisch, welche sich offenbar durch i_1 homogene lineare Relationen zwischen den Konstanten $c_1, c_2, \cdots, c_m$ charakterisieren lassen. Ebenso bleiben in der zweiten Nullstelle $m - i_2$ Integrale analytisch, welche sich also durch i_2 analoge Relationen charakterisieren lassen usw. Betrachtet man schließlich diejenigen Integrale, deren Konstanten $c_1, \cdots, c_m$ allen $i_1 + i_2 + \cdots = p$ Relationen zugleich genügen, so bleiben diese in sämtlichen Punkten (außer ∞) analytisch. Die genannten p Relationen lassen aber bekanntlich mindestens $m - p$ der Größen $c_1, \cdots, c_m$ willkürlich, so daß in der Tat mindestens $m - p$ linear unabhängige Integrale im Endlichen überall analytisch sind. W. z. b. w.

Man sieht, dieser Beweis setzt ebenfalls die strittige Vermutung als zutreffend voraus und kann daher bis jetzt als ausreichend nur gelten, wenn der Koeffizient der höchsten Ableitung bloß *einfache* Nullstellen hat, weil ja dann die Vermutung nur für $i = 1$ benutzt wird. Während weiteres mit den bisherigen Mitteln wohl nicht bewiesen werden kann, folgt aus unserem Korollar II als neu noch die Tatsache, *daß der Poincarésche Satz richtig bleibt, auch wenn der Koeffizient der höchsten Ableitung zweifache, aber keine mehr als zweifachen Nullstellen hat.* Dann wird nämlich die Vermutung außer für $i = 1$ nur noch für $i = 2$ beansprucht, in welchem Falle sie aber mit Korollar II identisch, also bewiesen ist.

§ 6.

Über eine spezielle Klasse linearer Differentialgleichungen mit einem im Endlichen überall holomorphen Integral.

Als Anwendung der Ergebnisse des § 4 untersuchen wir die Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$P_0(x)y + P_1(x)y' + \cdots + P_n(x)y^{(n)} + Q(x)y^{(n+1)} = 0, \tag{68}$$

wo $Q(x)$ ein Polynom n^{ten} (aber nicht geringeren) Grades bedeutet, während die $P_i(x)$ für $i = 0, 1, \cdots, n$ vom i^{ten} oder auch von geringerem Grad sind.

Sei x_0 irgend ein Wert, für den das Polynom Q nicht verschwindet,

so daß also x_0 eine reguläre Stelle der Differentialgleichung ist. Das allgemeine Integral hat dann in der Nähe von x_0 die Form

$$(69)\qquad y=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\eta_\nu}{\nu!}(x-x_0)^\nu.$$

Die Rekursionsformel für die η_ν findet man entweder, indem man diesen Ausdruck für y in die Differentialgleichung einträgt, oder, da ja $\eta_\nu = y^{(\nu)}(x_0)$ ist, indem man die Differentialgleichung ν-mal differenziert. Die zweite Methode ist hier bequemer; man findet, unter Berücksichtigung des angegebenen Grades der verschiedenen Polynome:

$$P_0 y^{(\nu)}+\left[P_1 y^{(\nu+1)}+\binom{\nu}{1}P_1' y^{(\nu)}\right]+\left[P_2 y^{(\nu+2)}+\binom{\nu}{1}P_2' y^{(\nu+1)}+\binom{\nu}{2}P_2'' y^{(\nu)}\right]+\cdots$$
$$+\left[P_n y^{(\nu+n)}+\cdots+\binom{\nu}{n}P_n^{(n)}y^{(\nu)}\right]+\left[Q y^{(\nu+n+1)}+\cdots+\binom{\nu}{n}Q^{(n)}y^{(\nu+1)}\right]=0.$$

Setzt man hier $x=x_0$, $y^{(\nu)}=\eta_\nu$ und faßt die einzelnen Glieder etwas anders zusammen, so erhält man die gesuchte Rekursionsformel:

$$(70)\qquad g_0(\nu)\eta_\nu+g_1(\nu)\eta_{\nu+1}+\cdots+g_{n+1}(\nu)\eta_{\nu+n+1}=0 \qquad (\nu=0,1,2,\cdots),$$

wo die $g_i(\nu)$ die Bedeutung haben:

$$g_0(\nu)=P_0(x_0)+\binom{\nu}{1}P_1'(x_0)+\cdots+\binom{\nu}{n}P_n^{(n)}(x_0),$$
$$(71)\; g_i(\nu)=P_i(x_0)+\binom{\nu}{1}P'_{+1}(x_0)+\cdots+\binom{\nu}{n-i}P_n^{(n-i)}(x_0)+\binom{\nu}{n+1-i}Q^{(n+1-i)}(x_0)$$
$$(i=1,2,\cdots,n),$$
$$g_{n+1}(\nu)=Q(x_0).$$

Danach ist $g_{n+1}(\nu)$ von Null verschieden und hängt von ν nicht ab. Man beachte weiter, daß $g_0(\nu)$ von x_0 nicht abhängt; denn da P_i höchstens vom i^{ten} Grad, so ist die i^{te} Ableitung $P_i^{(i)}$ vom Argument nicht abhängig. Wenn nun $g_0(\nu)$ identisch in ν verschwindet, so ist insbesondere $P_0=0$; also hat die Differentialgleichung das Integral $y=1$. Wenn weiter $g_0(\nu)$ zwar nicht identisch, aber doch für gewisse ganzzahlige, nicht negative Werte von ν verschwindet, so hat die Differentialgleichung mindestens ein Polynom (eventuell von Null verschiedene Konstante) zum Integral. Denn sei $\nu=N$ ein solcher Wert, also $g_0(N)=0$. Dann kann man das Gleichungssystem (70) dadurch befriedigen, daß man $\eta_\nu=0$ setzt für $\nu>N$, während $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_N$ aus den N ersten der Gleichungen (70) bestimmt werden. Dies ist offenbar immer möglich, und das Polynom

$$y=\sum_{\nu=0}^{N}\frac{\eta_\nu}{\nu!}(x-x_0)^\nu$$

ist dann ein Integral der Differentialgleichung. Unter Umständen kann

es sogar mehrere Polynome geben, welche die Differentialgleichung befriedigen. Als Beispiel dafür diene außer den trivialen Fällen, wo die Koeffizienten von y und y' verschwinden, etwa die Gleichung

$$3y - 3xy' + x^2y'' + ax^2y''' = 0,$$

bei welcher $g_0(\nu)$ für $\nu = 1$ und $\nu = 3$ verschwindet, und welche die zwei Integrale hat:

$$y_1 = x, \quad y_2 = 6ax^2 + x^3.$$

Ganz anders verhält sich die Sache in dem allgemeineren Fall, wenn $g_0(\nu)$ für keinen der Werte $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ verschwindet; es ist dann insbesondere auch $g_0(0) \neq 0$, das heißt: $P_0 \neq 0$. Aus (70) folgt jetzt zunächst:

$$\eta_\nu = -\frac{g_1(\nu)}{g_0(\nu)}\eta_{\nu+1} - \frac{g_2(\nu)}{g_0(\nu)}\eta_{\nu+2} - \cdots - \frac{g_{n+1}(\nu)}{g_0(\nu)}\eta_{\nu+n+1} \tag{72}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

woraus man ersieht, daß die Differentialgleichung jedenfalls kein Polynom mehr als Integral zuläßt. Denn wäre dies etwa vom N^{ten} Grad, so wäre $\eta_N \neq 0$, aber $\eta_\nu = 0$ für $\nu > N$, was mit Gleichung (72) für $\nu = N$ im Widerspruch steht.

Fürs weitere beachte man, daß die Polynome

$$P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$$

nach Annahme höchstens einen Grad haben, der gleich ihrem Index ist, und daß dieser Maximalgrad zum mindesten von $P_0(x)$ wirklich erreicht wird. Sei etwa $P_{n-j}(x)$ das letzte unter ihnen, welches den zulässigen Maximalgrad wirklich erreicht, so daß j eine Zahl zwischen 0 und n bedeutet, die Grenzen eingeschlossen. Dann ist

$$P_{n-j}^{(n-j)}(x_0) \neq 0, \quad P_i^{(i)}(x_0) = 0 \quad \text{für} \quad i > n-j.$$

Nach (71) wird daher $g_0(\nu)$ genau vom $(n-j)^{\text{ten}}$ Grad in ν. Weiter ist nach Annahme $Q(x)$ genau vom n^{ten} Grad in x; daher wird wieder nach (71) $g_1(\nu)$ wegen des Gliedes $\binom{\nu}{n} Q^{(n)}(x_0)$ genau vom n^{ten} Grad in ν. Die übrigen $g_i(\nu)$ werden höchstens vom $(n+1-i)^{\text{ten}}$ Grad. Schreibt man also Gleichung (72) in der Form

$$\eta_\nu = b_n\{\nu^{k_n}\}\eta_{\nu+1} + b_{n-1}\{\nu^{k_{n-1}}\}\eta_{\nu+2} + \cdots + b_0\{\nu^{k_0}\}\eta_{\nu+n+1},$$

wobei zu beachten ist, daß der Koeffizient von $\eta_{\nu+n+1}$ nie verschwindet, so ist:

$$k_n = n - (n-j) = j,$$
$$k_i \leqq i - (n-j) = j - n + i \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1),$$

folglich auch

$$\frac{k_n - k_i}{n-i} \geqq \frac{j - (j-n+i)}{n-i} = 1 > -j = -k_n.$$

Die Differenzengleichung (72) erfüllt demnach die Voraussetzungen des Theorems auf pag. 469. Daher wird im allgemeinen für unendlich viele ν

$$|\eta_\nu| > m^\nu \nu!$$

werden, so daß die Reihe (69) nur einen endlichen Konvergenzradius hat. Nur in dem einen Fall, wenn die Anfangswerte $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n$ in einem ganz eindeutig bestimmten Verhältnis zueinander stehen, wird

$$m^\nu(\nu!)^{-j} < |\eta_\nu| < M^\nu(\nu!)^{-j}. \tag{73}$$

Da j nicht negativ ist, hat daher jetzt die Reihe (69) einen unendlich großen Konvergenzradius, stellt also eine ganze transzendente Funktion dar.*) Man gewinnt so das

Theorem: *Die Differentialgleichung* $(n+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung*

$$P_0(x)y + P_1(x)y' + \cdots + P_n(x)y^{(n)} + Q(x)y^{(n+1)} = 0,$$

wo die Polynome P_i *höchstens einen Grad gleich ihrem Index haben, und* Q *genau vom* n^{ten} *Grad ist, hat, wenn der Ausdruck*

$$g_0(\nu) = P_0 + \binom{\nu}{1}P_1' + \binom{\nu}{2}P_2'' + \cdots + \binom{\nu}{n}P_n^{(n)}$$

für mindestens einen der Werte $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ *verschwindet, wenigstens ein Polynom zum Integral. Wenn aber* $f_0(\nu)$ *für keinen der angegebenen Werte verschwindet, so existiert ein und nur ein Partikulärintegral, welches eine ganze, notwendig transzendente, Funktion ist.*

Über diese ganze transzendente Funktion läßt sich nun noch weiteres aussagen. Bedeutet nämlich ε eine beliebig kleine positive Zahl, so folgt aus (73) für genügend große Werte von ν:

$$\frac{1}{(\nu!)^{j+1+\varepsilon}} < \left|\frac{\eta_\nu}{\nu!}\right| < \frac{1}{(\nu!)^{j+1-\varepsilon}}.$$

Dies besagt aber, daß der μ-Index**) der ganzen Funktion gleich $j+1$ ist. Insbesondere wird also, wenn $j \geqq 1$ ist, das heißt, wenn das Polynom $P_n(x)$ nicht den n^{ten} Grad erreicht, der μ-Index mindestens gleich 2; also die *Höhe* der Funktion gleich Null. Daher:

Zusatz: *Der* μ*-Index der ganzen transzendenten Funktion des obigen Theorems hat den Wert* $j+1$, *wenn* $P_{n-j}(x)$ *das letzte unter den Polynomen*

$$P_0(x),\ P_1(x), \cdots, P_n(x)$$

---

*) Der Fall $n=0$, auf welchen das Theorem pag. 469 wieder nicht anwendbar ist, ordnet sich, wie man direkt sieht, im Endresultat dem allgemeinen Fall wieder unter. Die Differentialgleichung lautet ja für $n=0$ einfach: $ay + by' = 0$.

**) Terminologie nach Vivanti-Gutzmer: Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, pag. 229. Leipzig 1906.

bedeutet, welches den zulässigen Maximalgrad wirklich erreicht. Insbesondere ist die Funktion dann und nur dann von der Höhe Null, wenn $P_n(x)$ von geringerem als dem n^{ten} Grad ist.

Um dasjenige Verhältnis $\eta_0 : \eta_1 : \cdots : \eta_n$ zu berechnen, welches die ganze transzendente Funktion hervorbringt, brauchen wir nur die Gleichung (72) mit der Differenzengleichung in dem Theorem auf pag. 469 in Übereinstimmung zu bringen, also

$$(74)\qquad -\frac{g_1(\nu)}{g_0(\nu)} = b_n^{(\nu)},\ -\frac{g_2(\nu)}{g_0(\nu)} = b_{n-1}^{(\nu+1)},\ \cdots,\ -\frac{g_{n+1}(\nu)}{g_0(\nu)} = b_0^{(\nu+n)}$$

zu setzen. Dann ist für genügend große N die Kette n^{ter} Ordnung

$$(75)\qquad \begin{bmatrix} b_0^{(N)}, & b_0^{(N+1)}, & b_0^{(N+2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n^{(N)}, & b_n^{(N+1)}, & b_n^{(N+2)}, & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \beta_1^{(N)} \\ \vdots \\ \beta_n^{(N)} \end{cases}$$

konvergent, und aus dem Gleichungssystem

$$(76)\qquad b_i^{(N)}\eta_{N+1} + b_{i-1}^{(N+1)}\eta_{N+2} + \cdots + b_0^{(N+i)}\eta_{N+i+1} = \beta_i^{(N)}\eta_{N+1}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

ergibt sich das Verhältnis $\eta_{N+1} : \eta_{N+2} : \cdots : \eta_{N+n+1}$, woraus vermöge (72) leicht auch $\eta_0 : \eta_1 : \cdots : \eta_n$ gewonnen wird.

Man kann auch die Kette

$$(77)\qquad \begin{bmatrix} b_0^{(0)}, & b_0^{(1)}, & b_0^{(2)}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n^{(0)}, & b_n^{(1)}, & b_n^{(2)}, & \cdots \end{bmatrix}$$

einführen, deren Elemente $b_i^{(\nu)}$ nun für $i + \nu \geqq n$ durch die Gleichungen (74) gegeben sind, für $i + \nu < n$ aber bis auf die Einschränkung $b_0^{(\nu)} \neq 0$ ganz willkürlich angenommen werden dürfen. Nach Nr. VIII wird diese Kette konvergieren oder divergieren, je nachdem der Ausdruck

$$(78)\qquad B_0^{(N)} b_0^{(N)} + B_0^{(N+1)}\beta_1^{(N)} + \cdots + B_0^{(N+n)}\beta_n^{(N)}$$

von Null verschieden ist oder nicht, und im Konvergenzfall ist das Wertesystem gegeben durch die Formeln:

$$(79)\qquad \beta_i^{(0)} = b_0^{(0)} \frac{B_i^{(N)} b_0^{(N)} + B_i^{(N+1)}\beta_1^{(N)} + \cdots + B_i^{(N+n)}\beta_n^{(N)}}{B_0^{(N)} b_0^{(N)} + B_0^{(N+1)}\beta_1^{(N)} + \cdots + B_0^{(N+n)}\beta_n^{(N)}}.$$

Die B sind dabei natürlich mittels der Rekursionsformeln

$$B_i^{(\nu+n+1)} = b_0^{(\nu)} B_i^{(\nu)} + b_1^{(\nu)} B_i^{(\nu+1)} + \cdots + b_n^{(\nu)} B_i^{(\nu+n)}$$

$$B_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{„ } i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \cdots, n)$$

zu bilden. Der kritische Ausdruck (78) geht nun aber, wenn man ihn mit der von Null verschiedenen Zahl η_{N+1} multipliziert, nach (76) über in

$$\sum_{s=0}^{n}\left(b_s^{(N)}\eta_{N+1}+b_{s-1}^{(N+1)}\eta_{N+2}+\cdots+b_0^{(N+s)}\eta_{N+s+1}\right)B_0^{(N+s)}.$$

Nach den Untersuchungen zu Beginn des § 4 hängt aber diese Summe gar nicht vom Index N ab*), und hat daher, indem man $N=0$ setzt, den Wert $b_0^{(0)}\eta_1$. Die Kette (77) wird daher dann und nur dann konvergieren, wenn $\eta_1 \neq 0$ ist.

Analog nimmt auch der Zähler der rechten Seite von (79), wenn man ihn mit η_{N+1} multipliziert, die Gestalt

$$\sum_{s=0}^{n}\left(b_s^{(N)}\eta_{N+1}+b_{s-1}^{(N+1)}\eta_{N+2}+\cdots+b_0^{(N+s)}\eta_{N+s+1}\right)B_i^{(N+s)}$$

an. Dieser Ausdruck ist ebenfalls von N unabhängig und daher, indem man wieder $N=0$ setzt, gleich

$$b_i^{(0)}\eta_1+b_{i-1}^{(1)}\eta_2+\cdots+b_0^{(i)}\eta_{i+1}.$$

Folglich konvergiert die Kette (77) für $\eta_1 \neq 0$, und ihr Wertesystem ist dann

$$\beta_i^{(0)}=\frac{b_i^{(0)}\eta_1+b_{i-1}^{(1)}\eta_2+\cdots+b_0^{(i)}\eta_{i+1}}{\eta_1}, \tag{80}$$

während sie für $\eta_1=0$ divergiert. Für $i=n$ geht (80) speziell über in

$$\beta_n^{(0)}=\frac{\eta_0}{\eta_1}. \tag{81}$$

Nun hatten die η_ν die Bedeutung

$$\eta_\nu=y^{(\nu)}(x_0),$$

wo y diejenige bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte ganze transzendente Funktion ist, die der Differentialgleichung (68) genügt. x_0 war ein beliebiger Wert, für den $Q(x_0)\neq 0$ ist.

Denken wir jetzt x_0 *variabel*, so werden die Polynome $g_i(\nu)$ auch ganze rationale Funktionen der Variabeln x_0. Da aber insbesondere $g_0(\nu)$ von x_0 gar nicht abhängt, so werden auch die $b_i^{(\nu)}$, das heißt die Elemente der Kette (77), ganze rationale Funktionen von x_0. *Diese Kette konvergiert dann für alle x_0, welche nicht Nullstellen der Funktionen Q oder y' sind, und ihr Wertesystem ist nach* (80) *und* (81)

$$\beta_i^{(0)}=\frac{b_i^{(0)}y'(x_0)+b_{i-1}^{(1)}y''(x_0)+\cdots+b_0^{(i)}y^{(i+1)}(x_0)}{y'(x_0)}, \tag{82}$$

und speziell

*) Sie hat nämlich das Bildungsgesetz des Ausdrucks Φ_N (Formel (40)), da ja die Differenzengleichung der η_ν die adjungierte von derjenigen der $B_0^{(\nu)}$ ist.

$$\beta_n^{(0)} = \frac{y(x_0)}{y'(x_0)}. \tag{83}$$

In den Nullpunkten von y' divergiert dagegen die Kette, während die Nullpunkte von Q überhaupt nicht in Betracht kommen, weil für diese ja die an jede Kette geknüpfte Bedingung $b_0^{(\nu)} \neq 0$ nicht erfüllt ist.

§ 7.

Arithmetische Eigenschaften gewisser transzendenter Funktionen.

In Fortsetzung der Untersuchungen des vorigen Paragraphen nehmen wir jetzt speziell an, daß die Gradzahlen der Polynome

$$P_1(x),\ P_2(x), \cdots, P_n(x)$$

kleiner sind als ihr Index, also $j = n$. Setzen wir demgemäß

$$P_i(x) = Q_{i-1}(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

und wählen außerdem $P_0 = -1$ (was ja stets zu erreichen ist, indem man die Gleichung durch $-P_0$ dividiert), so nimmt die Differentialgleichung (68) die Form an:

$$y = Q_0(x)\, y' + Q_1(x)\, y'' + \cdots + Q_n(x)\, y^{(n+1)}, \tag{84}$$

wo nun Q_n genau vom n^{ten} Grad ist, und die andern Q_i höchstens einen Grad gleich ihrem Index haben. Es wird jetzt

$$\begin{aligned} &g_0(\nu) = -1, \\ &g_i(\nu) = Q_{i-1}(x_0) + \binom{\nu}{1} Q_i'(x_0) + \cdots + \binom{\nu}{n+1-i} Q_n^{(n+1-i)}(x_0) \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \cdots, n+1). \end{aligned} \tag{85}$$

Da demnach $g_0(\nu)$ nie verschwindet, so hat die Differentialgleichung ein und nur ein Partikulärintegral y, welches eine ganze, notwendig transzendente Funktion ist, und zwar, weil $j = n$ ist, mit dem μ-Index $n + 1$.

Die Elemente der Kette (77) sind jetzt (vergl. (74)):

$$b_{n-i}^{(\nu+i)} = g_{i+1}(\nu) \qquad (i = 0, 1, \cdots, n). \tag{86}$$

Die willkürlichen Anfangselemente $b_i^{(\nu)}$ für $i + \nu < n$ wollen wir speziell folgendermaßen wählen:

$$\begin{aligned} b_0^{(\nu)} &= 1 \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n-1), \\ b_i^{(\nu)} &= 0 \qquad (i > 0,\ i + \nu < n). \end{aligned} \tag{87}$$

Dadurch sind dann alle Elemente der Kette (77) definiert, und diese nimmt die Gestalt

$$(88)\qquad \begin{bmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1, & 1, & g_{n+1}(\nu) \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & g_n(0)\;, & g_n(\nu+1) \\ 0, & 0, & \cdots, & g_{n-1}(0), & g_{n-1}(1), & g_{n-1}(\nu+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & g_2(0), & \cdots, & g_2(n-3), & g_2(n-2), & g_2(\nu+n-1) \\ g_1(0), & g_1(1), & \cdots, & g_1(n-2), & g_1(n-1), & g_1(\nu+n) \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty}$$

an. Ihr Wertesystem ist nach den Formeln (82), (83) unter Berücksichtigung von (87) gleich:

$$(89)\qquad \beta_1^{(0)}=\frac{y''(x_0)}{y'(x_0)},\quad \beta_2^{(0)}=\frac{y'''(x_0)}{y'(x_0)},\ \cdots,\ \beta_{n-1}^{(0)}=\frac{y^{(n)}(x_0)}{y'(x_0)},\quad \beta_n^{(0)}=\frac{y(x_0)}{y'(x_0)},$$

vorausgesetzt, daß x_0 keine Nullstelle von y' ist, in welchem Fall die Kette divergieren würde, und selbstverständlich auch keine Nullstelle des Polynoms Q_n.

Von jetzt ab setzen wir voraus, daß *die Koeffizienten der Polynome* Q_i *sämtlich rationale Zahlen sind; auch* x_0 *sei eine rationale Zahl.* Dann werden die $g_i(\nu)$ als Funktionen von ν ebenfalls nur rationale Zahlen zu Koeffizienten haben. Ist aber h deren Hauptnenner, so werden die Elemente der Kette

$$(90)\qquad \begin{bmatrix} h^{n+1}, & h^{n+1}, & \cdots, & h^{n+1}, & h^{n+1}, & h^{n+1}g_{n+1}(\nu) \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & h^n g_n(0), & h^n g_n(\nu+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & h^2 g_2(0), & \cdots, & h^2 g_2(n-3), & h^2 g_2(n-2), & h^2 g_2(\nu+n-1) \\ hg_1(0), & h\,g_1(1), & \cdots, & h\,g_1(n-2), & h\,g_1(n-1), & h\,g_1(\nu+n) \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty}$$

nun lauter *ganze* rationale Zahlen sein. Diese Kette ist aber halbäquivalent zur Kette (88), und hat daher das Wertesystem:

$$h^n\beta_1^{(0)},\quad h^{n-1}\beta_2^{(0)},\ \cdots,\ h\beta_n^{(0)},$$

also nach (89):

$$h^n\frac{y''(x_0)}{y'(x_0)},\quad h^{n-1}\frac{y'''(x_0)}{y'(x_0)},\ \cdots,\ h^2\frac{y^{(n)}(x_0)}{y'(x_0)},\quad h\,\frac{y(x_0)}{y'(x_0)},$$

außer wenn etwa $y'(x_0)=0$ ist, in welchem Fall ja die Kette (88), also auch (90) divergiert.

Nun ist aber nach (85) $g_1(\nu)$ von höherem Grad in ν als die übrigen $g_i(\nu)$, und folglich erfüllt die Kette (90) alle Voraussetzungen des Satzes der Nr. XII. Sie ist daher erstens konvergent, und folglich kann nicht $y'(x_0)=0$ sein. Zweitens aber existiert nach dem gleichen Satz keine Relation der Form

$$P_0 h^{n+1} + P_1 h^n \frac{y''(x_0)}{y'(x_0)} + \cdots + P_{n-1} h^2 \frac{y^{(n)}(x_0)}{y'(x_0)} + P_n h \frac{y(x_0)}{y'(x_0)}$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten P_i. Beide Aussagen zusammengenommen sind offenbar gleichbedeutend damit, daß keine Relation der Form

$$p_0 y(x_0) + p_1 y'(x_0) + p_2 y''(x_0) + \cdots + p_n y^{(n)}(x_0) = 0$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten p_i besteht. Dies ergibt das

Theorem: *Bedeutet $y(x)$ diejenige stets existierende und bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte ganze transzendente Funktion, welche der linearen Differentialgleichung*

$$y = Q_0(x) y' + Q_1(x) y'' + \cdots + Q_n(x) y^{(n+1)} = 0$$

genügt, wo die Polynome $Q_i(x)$ rationale Koeffizienten haben und vom höchstens i^{ten} Grade sind, speziell $Q_n(x)$ genau vom n^{ten} Grad; ist ferner x_0 eine rationale Zahl, für welche $Q_n(x_0) \neq 0$ ist: dann existiert keine Relation der Form

$$p_0 y(x_0) + p_1 y'(x_0) + \cdots + p_n y^{(n)}(x_0) = 0$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten p_i.

Man beachte dabei, daß die Bedingung $Q_n(x_0) \neq 0$ nicht unterdrückt werden kann. Denn ist $Q_n(x_0) = 0$, so existiert in der Tat eine Relation der obigen Form, nämlich, wie ohne weiteres aus der Differentialgleichung zu entnehmen:

$$y(x_0) - Q_0(x_0) y'(x_0) - Q_1(x_0) y''(x_0) - \cdots - Q_{n-1}(x_0) y^{(n)}(x_0) = 0.$$

Herr Hurwitz hat den folgenden Satz bewiesen*):

„Die ganze transzendente Funktion $y(x)$ genüge folgenden Bedingungen:

1) Für jedes endliche k und x ist $\lim\limits_{\nu=\infty} k^\nu y^{(\nu)}(x) = 0$.

2) $y(x)$ befriedige eine Differentialgleichung der Form

$$\varphi y^{(n+1)} = \varphi_n y^{(n)} + \varphi_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_1 y' + \varphi_0 y,$$

wo $\varphi, \varphi_n, \cdots, \varphi_0$ Polynome in x mit ganzzahligen Koeffizienten bedeuten.

Dann ist stets mindestens eines der Verhältnisse

$$y : y' : y'' : \cdots : y^{(n)}$$

irrational, wenn x rational, und $\varphi(x) \neq 0$ ist.“

Die in obigem Theorem auftretende Funktion y genügt den Hurwitzschen Bedingungen, da ja ihr μ-Index gleich $n+1$ ist. Aber was wir

*) Über arithmetische Eigenschaften gewisser transzendenter Funktionen II. Math. Ann., Bd. 32 (1888).

über diese Funktion ausgesagt haben, reicht weit über die Hurwitzsche Aussage hinaus. Andererseits geht allerdings auch der Hurwitzsche Satz über den unsern hinaus, insofern er sich auf eine viel allgemeinere Funktionenklasse bezieht. Indes kommt unseren Entwicklungen doch gerade für den Hurwitzschen Satz noch eine besondere Bedeutung zu. Denn Herr Hurwitz hat als Beispiel von Funktionen, die seinen Bedingungen genügen, lediglich gewisse hypergeometrische Reihen höherer Ordnung angegeben, und es war durchaus nicht ausgemacht, ob es andere derartige Funktionen überhaupt noch gibt. Durch unsere Untersuchungen gewinnt man nun eine recht ausgedehnte Klasse von solchen Funktionen. Denn nicht nur die im letzten Theorem erwähnten gehören dazu, sondern auch die in dem Theorem pag. 479 genannten, wenn man dort nur $P_n(x)$ von geringerem als dem n^{ten} Grad annimmt. Denn dann ist ja der μ-Index, wie wir sahen, mindestens gleich 2, also die Hurwitzsche Bedingung 1) erfüllt. In dieser Klasse von Funktionen sind dann die von Herrn Hurwitz angegebenen als Spezialfälle enthalten.

Ich behandle zum Schluß als ein einfaches Beispiel die Funktion

$$(91) \qquad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{(m\nu)!}.$$

Diese genügt einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung der Form

$$(92) \qquad y = a_1 y' + a_2 x y'' + a_3 x^2 y''' + \cdots + a_m x^{m-1} y^{(m)},$$

wo die a_i ganze rationale Zahlen sind. In der Tat: setzt man die Reihe (91) für y in die Differentialgleichung ein, so entsteht eine Identität, wenn die a_i der Gleichung

$$(93) \qquad \begin{aligned} a_1\nu + a_2\nu(\nu-1) + \cdots + a_m\nu(\nu-1)\cdots(\nu-m+1) \\ = m\nu(m\nu-1)(m\nu-2)\cdots(m\nu-m+1) \end{aligned}$$

für alle ν Genüge leisten. Diese Forderung läßt sich aber erfüllen, und zwar sind dann die a_i in eindeutiger Weise als ganze Zahlen bestimmt. Denn hebt man beiderseits den Faktor ν weg, so bleibt rechts und links ein Polynom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades in ν, und indem man die Koeffizienten von $\nu^{m-1}, \nu^{m-2}, \cdots, \nu^0$ beiderseits gleich setzt, findet man sukzessive $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_1$ als ganze Zahlen.

Mit Anwendung unseres Theorems können wir daher sagen: Wenn x eine rationale, von Null verschiedene Zahl bedeutet, so existiert keine Relation der Form

$$(94) \qquad p_0 y(x) + p_1 y'(x) + \cdots + p_{m-1} y^{(m-1)}(x) = 0$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden p_i.

Nun ist aber

$$(95)\qquad y=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\nu}}{(m\nu)!}=\frac{1}{m}\sum_{\varepsilon}e^{\varepsilon\sqrt[m]{x}},$$

wo ε in der zweiten Summe die m^{ten} Einheitswurzeln durchläuft. Durch Differentiation folgt hieraus:

$$y'=\frac{1}{m^2}\sqrt[m]{x^{1-m}}\sum_{\varepsilon}\varepsilon e^{\varepsilon\sqrt[m]{x}},$$

$$y''=\frac{1-m}{m^3}\sqrt[m]{x^{1-2m}}\sum_{\varepsilon}\varepsilon e^{\varepsilon\sqrt[m]{x}}+\frac{1}{m^3}\sqrt[m]{x^{2-2m}}\sum_{\varepsilon}\varepsilon^2 e^{\varepsilon\sqrt[m]{x}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Setzt man also $x=\xi^m$, und außerdem

$$(96)\qquad \omega_i=\sum_{\varepsilon}\varepsilon^i e^{\varepsilon\xi}\quad (i=0,1,\cdots,m-1),$$

so ergibt sich:

$$(97)\qquad \begin{aligned} y\ &=r_{00}\omega_0,\\ y'\ &=r_{11}\omega_1,\\ y''\ &=r_{21}\omega_1+r_{22}\omega_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y^{(m-1)}&=r_{m-1,1}\omega_1+r_{m-1,2}\omega_2+\cdots+r_{m-1,m-1}\omega_{m-1},\end{aligned}$$

wobei die $r_{i,k}$ gewisse Funktionen von ξ sind, die für rationale ξ jedenfalls rationale Zahlwerte annehmen.*) Insbesondere ist

$$r_{i,i}=\frac{1}{m^{i+1}}\sqrt[m]{x^{i-im}}=\frac{1}{m^{i+1}}\xi^{i-im}\neq 0.$$

Daher läßt sich das System (97) umkehren, und man erhält:

$$(98)\qquad \begin{aligned} \omega_0\ &=s_{00}y,\\ \omega_1\ &=s_{11}y',\\ \omega_2\ &=s_{21}y'+s_{22}y'',\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \omega_{m-1}&=s_{m-1,1}y'+s_{m-1,2}y''+\cdots+s_{m-1,m-1}y^{(m-1)},\end{aligned}$$

wo auch die $s_{i,k}$ für rationale ξ rational sind, und speziell $s_{i,i}\neq 0$.

*) Die Akzente an y bedeuten natürlich immer noch Differentiation nach x, nicht etwa nach ξ.

Daraus folgt, daß für rationale ξ $(\neq 0)$ eine Relation der Form

$$q_0\omega_0 + q_1\omega_1 + \cdots + q_{m-1}\omega_{m-1} = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden q_i nicht existieren kann. Denn wäre dies der Fall, so würde hieraus mit Hilfe von (98) auch eine Relation der Form (94) hervorgehen, welche aber für rationale x, also erst recht für rationale ξ $(\neq 0)$, nicht existieren kann.

Damit haben wir einen recht interessanten Satz über die Exponentialfunktion nachgewiesen, der allerdings nicht neu, sondern als Spezialfall in dem Lindemannschen Satz enthalten ist. Daß dieser Spezialfall mit Hilfe der Jacobi-Ketten gewonnen werden kann, habe ich a. a. O. bereits angedeutet und die betreffenden Entwicklungen für $m = 3$ (in anderer Weise wie hier) durchgeführt.

München, im Juni 1908.

Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen.

Von

I. Schur in Berlin.

Ist eine algebraische Gleichung in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x, & a_{12} & , \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22}-x, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \cdots, & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0$$

gegeben und sind $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ ihre Wurzeln, so läßt sich, wie Herr A. Hirsch*) gezeigt hat, in sehr einfacher Weise eine obere Grenze für die absoluten Beträge der ω_ν angeben; bedeutet nämlich a die größte unter den n^2 Zahlen $|a_{\varkappa\lambda}|$, so ist

$$|\omega_\nu| \leqq na.$$

In der vorliegenden Arbeit möchte ich auf einige andere, wesentlich schärfere Ungleichungen aufmerksam machen, die für die absoluten Beträge der ω_ν bestehen. Die einfachste und zugleich wichtigste unter ihnen ist die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\omega_\nu|^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2.$$

Indem ich noch angebe, welche Bedeutung hier das Auftreten des Gleichheitszeichens besitzt, erhalte ich einen Satz (Satz II), der eine Reihe von bekannten Resultaten über Hermitesche Formen und orthogonalen Substitutionen als spezielle Fälle umschließt.

*) „Sur les racines d'une équation fondamentale", Acta Mathematica, Bd. 25, S. 367.

Der zweite Abschnitt enthält eine Anwendung meiner algebraischen Resultate auf die Theorie der linearen homogenen Integralgleichung

$$\lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(s).$$

Einem von Herrn E. Schmidt für reelle symmetrische Kerne $K(s, t)$ angegebenen Verfahren folgend, zeige ich, wie man auch für einen allgemeinen Kern den Begriff der Ordnung eines Eigenwerts λ auf elementarem Wege ohne Benutzung der Fredholmschen ganzen transzendenten Funktion begründen kann. Zugleich ergibt sich unter allgemeinen Voraussetzungen über den Kern $K(s, t)$ ein Beweis für die absolute Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{\lambda^{\nu}}$, in der jeder Eigenwert λ so oft zu schreiben ist, wie seine Ordnung angibt.

Abschnitt I.

Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution.

§ 1.

Im folgenden soll stets die zu einer Größe a konjugiert komplexe Zahl mit $\bar{a}$ bezeichnet werden. Ebenso soll, wenn $P = (p_{\varkappa\lambda})$ eine Matrix (lineare homogene Substitution) ist, unter $\bar{P}$ die mit Hilfe der Größen $\bar{p}_{\varkappa\lambda}$ gebildete Matrix verstanden werden. Mit P' bezeichne ich, wie üblich, die zu P konjugierte (transponierte) Matrix. Genügt P der Gleichung

$$\bar{P}' P = E, \tag{1}$$

wo $E = (e_{\varkappa\lambda})$ die Einheitsmatrix ist, d. h. wird

$$\sum_{\nu} \bar{p}_{\nu\varkappa} p_{\nu\lambda} = e_{\varkappa\lambda}, \qquad (e_{\varkappa\varkappa} = 1,\ e_{12} = e_{13} = \cdots = 0)$$

so nenne ich nach dem Vorgange von Herrn L. Autonne*) P eine *unitäre* oder auch eine *unitär orthogonale* Matrix. Die Bedeutung der Gleichung (1) ist bekanntlich die, daß die Hermitesche Einheitsform

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots$$

ungeändert bleibt, wenn $x_\varkappa$ durch $\sum_{\lambda} p_{\varkappa\lambda} x_\lambda$ $\left(\text{und also } \bar{x}_\varkappa \text{ durch } \sum_{\lambda} \bar{p}_{\varkappa\lambda} \bar{x}_\lambda\right)$

*) „Sur l'Hermitien", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. 16 (1902), S. 104.

ersetzt wird. Sind die Koeffizienten von P reell, so wird P eine gewöhnliche (reelle) orthogonale Matrix.

Es sei nun

$$A = (a_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

eine Matrix mit beliebigen reellen oder komplexen Koeffizienten. Die charakteristischen Wurzeln von A, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad |A - xE| = \begin{vmatrix} a_{11} - x, & a_{12} & , \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - x, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \cdots, & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0,$$

seien $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$. Dann gilt folgender Satz:

I. *Es läßt sich stets eine unitär orthogonale Matrix P bestimmen, sodaß die Matrix*

$$\overline{P}'AP = P^{-1}AP = \mathsf{A}$$

die Form

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & \omega_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & \omega_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}$$

erhält.

Der Beweis ist leicht zu erbringen.*) Da nämlich ω_1 eine Wurzel der Gleichung (2) ist, so können wir n Zahlen $q_1, q_2, \cdots, q_n$ bestimmen, die den n Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa} q_\lambda = \omega_1 q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

genügen und nicht sämtlich Null sind. Die Summe $\sum_{\varkappa=1}^{n} \overline{q}_\varkappa q_\varkappa = q$ ist dann eine positive Zahl. Setzt man

$$q_{\varkappa 1} = \frac{q_\varkappa}{\sqrt{q}},$$

so wird auch

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa} q_{\lambda 1} = \omega_1 q_{\varkappa 1}$$

und

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \overline{q}_{\lambda 1} q_{\lambda 1} = 1.$$

---

*) Vergl. L. Stickelberger, „Über reelle orthogonale Substitutionen", Programm der polyt. Schule, Zürich, 1877, und L. Autonne, a. a. O., S. 119.

Man bestimme nun in bekannter Weise $n(n-1)$ Zahlen

$$\begin{matrix} q_{12}, & q_{13}, & \cdots, & q_{1n} \\ q_{22}, & q_{23}, & \cdots, & q_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ q_{n2}, & q_{n3}, & \cdots, & q_{nn} \end{matrix}$$

so, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} \bar{q}_{\nu\varkappa} q_{\nu\lambda} = e_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

wird. Dann ist die Matrix

$$Q = (q_{\varkappa\lambda})$$

eine unitäre Matrix, außerdem wird

$$Q' A Q'^{-1} = \bar{Q}^{-1} A \bar{Q} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

wo die $b_{\varkappa\lambda}$ gewisse Zahlen bedeuten. Die charakteristischen Wurzeln der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ . & . & \cdots & . \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

sind dann die Größen $\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n$. Nimmt man nun den zu beweisenden Satz, der für $n = 1$ evident ist, für Matrizen mit $n - 1$ Zeilen und Spalten als richtig an, so läßt sich eine unitäre Matrix

$$R = \begin{pmatrix} r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ r_{32} & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ . & . & \cdots & . \\ r_{n2} & r_{n3} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

bestimmen, sodaß

$$R^{-1} B R = \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{32} & \omega_3 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ c_{n2} & c_{n3} & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}$$

wird. Setzt man dann

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

so wird $P = \bar{Q}S$ eine unitär orthogonale Matrix, die den Bedingungen unseres Satzes genügt.*)

Der Satz I läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

I*. *Für jede lineare homogene Substitution A in n Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_n$ lassen sich n Linearformen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ angeben, die folgenden Bedingungen genügen:*

1. *es ist*

$$y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \cdots + y_n\bar{y}_n = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n;$$

2. *die Linearform $y_\varkappa$ geht durch Anwendung der Substitution A in eine Form über, die sich linear und homogen durch $y_1, y_2, \cdots, y_\varkappa$ ausdrücken läßt.*

§ 2.

Aus

$$\bar{P}'AP = \mathsf{A} \tag{3}$$

folgt

$$\bar{P}'\bar{A}'P = \bar{\mathsf{A}}'. \tag{3'}$$

Daher ist wegen $\bar{P}'P = E$

$$\bar{P}'A\bar{A}'P = \mathsf{A}\bar{\mathsf{A}}'.$$

Es ist aber $\bar{P}' = P^{-1}$, folglich besitzen die Matrizen $A\bar{A}'$ und $\mathsf{A}\bar{\mathsf{A}}'$ als ähnliche Matrizen dieselbe Spur, und da die Spur einer Matrix der Form $P\bar{P}'$, wie man leicht sieht, nichts anderes ist als die Summe der Quadrate der absoluten Beträge aller Koeffizienten von P, so erhalten wir

$$\sum_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2 = \sum_\nu |\omega_\nu|^2 + \sum_{\varkappa > \lambda} |c_{\varkappa\lambda}|^2.$$

Insbesondere ergibt sich

$$\sum_\nu |\omega_\nu|^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2.$$

Das Gleichheitszeichen steht hier stets und nur dann, wenn die Zahlen $c_{\varkappa\lambda}$ sämtlich gleich Null sind. Dies gibt uns den Satz:

II. *Ist $A = (a_{\varkappa\lambda})$ eine beliebige lineare homogene Substitution in n Variabeln mit den charakteristischen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$, so ist*

$$\sum_\nu |\omega_\nu|^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2. \tag{4}$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier stets und nur dann, wenn sich A durch eine unitär orthogonale Transformation der Variabeln auf die Diagonalform

---

*) Sind die $a_{\varkappa\lambda}$ und die ω_ν reell, so kann P auch als reelle (orthogonale) Matrix gewählt werden.

$$\Delta = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}$$

bringen läßt.

Es ergibt sich zugleich das merkwürdige Resultat, daß, sobald

$$\sum_\nu |\omega_\nu|^2 = \sum_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2$$

ist, die Determinante $|A - xE|$ lauter lineare Elementarteiler besitzen muß.

Dieses Resultat läßt sich noch etwas verallgemeinern.

Sind nämlich die Elementarteiler von $|A - xE|$ sämtlich linear, so läßt sich eine Matrix Q von nicht verschwindender Determinante bestimmen, sodaß

$$Q^{-1}AQ = \Delta$$

wird. Dann wird

$$\bar{Q}'\bar{A}'\bar{Q}'^{-1} = \bar{\Delta}',$$

also

$$\Delta\bar{\Delta}' = Q^{-1}AQ\bar{Q}'\bar{A}'\bar{Q}'^{-1}.$$

Die Spur $\sum\limits_\nu |\omega_\nu|^2$ von $\Delta\bar{\Delta}'$ ist daher gleich der Spur der rechts stehenden Matrix oder, was dasselbe ist, gleich der Spur der Matrix

$$AQ\bar{Q}'\bar{A}'\bar{Q}'^{-1}Q^{-1} = AH\bar{A}'H^{-1},$$

wobei $H = Q\bar{Q}'$ zu setzen ist. Hierbei ist H die Matrix einer positiv definiten Hermiteschen Form von nicht verschwindender Determinante oder, wie man auch kurz sagt, eine positive Hermitesche Matrix.

Läßt sich umgekehrt eine derartige Matrix H so bestimmen, daß die Spur von $AH\bar{A}'H^{-1}$ gleich $\sum\limits_\nu |\omega_\nu|^2$ wird, so wähle man, was stets möglich ist, eine Matrix Q, für die $H = Q\bar{Q}'$ wird. Dann ist $\sum\limits_\nu |\omega_\nu|^2$ zugleich auch die Spur von

$$Q^{-1}AQ \cdot \bar{Q}'\bar{A}'\bar{Q}'^{-1} = B\bar{B}',$$

wo $B = Q^{-1}AQ$ zu setzen ist. Die charakteristischen Wurzeln der zu A ähnlichen Matrix $B = (b_{\varkappa\lambda})$ sind aber wieder die Größen $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ und, da für B

$$\sum_\nu |\omega_\nu|^2 = \sum_{\varkappa,\lambda} |b_{\varkappa\lambda}|^2$$

wird, so ist B und folglich auch A der Diagonalmatrix Δ ähnlich.

Es ergibt sich auf diese Weise der Satz:

III. *Die Elementarteiler der charakteristischen Determinante einer Matrix $A = (a_{\varkappa\lambda})$ mit den charakteristischen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ sind dann*

und nur dann sämtlich linear, wenn sich eine positive Hermitesche Matrix $H = (h_{\varkappa\lambda})$ so bestimmen läßt, daß

$$\sum_{\nu} |\omega_\nu|^2 = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} h_{\lambda\nu} h'_{\mu\varkappa} a_{\varkappa\lambda} \bar{a}_{\mu\nu}$$

wird; hierbei sollen die Zahlen $h'_{\mu\varkappa}$ die Koeffizienten von H^{-1} bedeuten. Allgemein ist bei einer beliebigen Matrix A für jede positive Hermitesche Matrix $H = (h_{\varkappa\lambda})$

$$\sum_{\nu} |\omega_\nu|^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} h_{\lambda\nu} h'_{\mu\varkappa} a_{\varkappa\lambda} \bar{a}_{\mu\nu}.$$

§ 3.

Setzt man

$$a_{\varkappa\lambda} = r_{\varkappa\lambda} + i s_{\varkappa\lambda}, \quad \omega_\nu = \varrho_\nu + i\sigma_\nu,$$

so geht die Ungleichung (4) über in

$$\sum_{\nu} (\varrho_\nu^2 + \sigma_\nu^2) \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} (r_{\varkappa\lambda}^2 + s_{\varkappa\lambda}^2). \tag{5}$$

Andererseits ist aber, da $\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_n^2$ die charakteristischen Wurzeln von A^2 sind, $\sum\limits_{\nu} \omega_\nu^2$ die Spur von A^2, also wird

$$\sum_{\nu} \omega_\nu^2 = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} a_{\lambda\varkappa},$$

oder

$$\sum_{\nu} (\varrho_\nu^2 - \sigma_\nu^2 + 2i\varrho_\nu\sigma_\nu) = \sum_{\varkappa,\lambda} (r_{\varkappa\lambda} r_{\lambda\varkappa} - s_{\varkappa\lambda} s_{\lambda\varkappa} + 2i r_{\varkappa\lambda} s_{\lambda\varkappa}).$$

Daher ist

$$\sum_{\nu} (\varrho_\nu^2 - \sigma_\nu^2) = \sum_{\varkappa,\lambda} (r_{\varkappa\lambda} r_{\lambda\varkappa} - s_{\varkappa\lambda} s_{\lambda\varkappa}). \tag{6}$$

Aus (5) und (6) ergibt sich

$$2\sum_{\nu} \varrho_\nu^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} (r_{\varkappa\lambda}^2 + r_{\varkappa\lambda} r_{\lambda\varkappa}) + \sum_{\varkappa,\lambda} (s_{\varkappa\lambda}^2 - s_{\varkappa\lambda} s_{\lambda\varkappa}),$$

$$2\sum_{\nu} \sigma_\nu^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} (r_{\varkappa\lambda}^2 - r_{\varkappa\lambda} r_{\lambda\varkappa}) + \sum_{\varkappa,\lambda} (s_{\varkappa\lambda}^2 + s_{\varkappa\lambda} s_{\lambda\varkappa}).$$

Diese Ungleichungen lassen sich auch, wie eine einfache Betrachtung lehrt, auf folgende Form bringen:

$$\sum_{\nu} \varrho_\nu^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\frac{r_{\varkappa\lambda} + r_{\lambda\varkappa}}{2}\right)^2 + \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\frac{s_{\varkappa\lambda} - s_{\lambda\varkappa}}{2}\right)^2,$$

$$\sum_{\nu} \sigma_\nu^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\frac{r_{\varkappa\lambda} - r_{\lambda\varkappa}}{2}\right)^2 + \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\frac{s_{\varkappa\lambda} + s_{\varkappa\lambda}}{2}\right)^2.$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sum_{\nu} \varrho_\nu^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} \left|\frac{a_{\varkappa\lambda}+\bar{a}_{\lambda\varkappa}}{2}\right|^2, \tag{7}$$

$$\sum_{\nu} \sigma_\nu^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} \left|\frac{a_{\varkappa\lambda}-\bar{a}_{\lambda\varkappa}}{2}\right|^2. \tag{8}$$

Man kann diese Formeln auch anders beweisen. Aus (3) und (3') folgt

$$\frac{1}{2}\bar{P}'(A \pm \bar{A}')P = \frac{1}{2}(\mathsf{A} \pm \bar{\mathsf{A}}').$$

Hieraus schließt man wie früher, daß die Summe der Quadrate der absoluten Beträge aller Koeffizienten der Matrix $\frac{1}{2}(A \pm \bar{A}')$ gleich sein muß der analog gebildeten Summe für die Matrix $\frac{1}{2}(\mathsf{A} \pm \bar{\mathsf{A}}')$. Dies gibt uns aber

$$\sum_{\varkappa,\lambda} \left|\frac{a_{\varkappa\lambda} \pm \bar{a}_{\lambda\varkappa}}{2}\right|^2 = \sum_{\nu} \left|\frac{\omega_\nu \pm \bar{\omega}_\nu}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{\varkappa>\lambda} |c_{\varkappa\lambda}|^2,$$

woraus dann wieder die Ungleichungen (7) und (8) folgen.

Es sei noch hervorgehoben, daß, wenn in einer der Ungleichungen (4), (7) und (8) das Gleichheitszeichen steht, dies auch in den beiden anderen der Fall sein muß.

§ 4.

Bezeichnet man mit a die größte der Zahlen $|a_{\varkappa\lambda}|$, mit b die größte der Zahlen $\left|\frac{a_{\varkappa\lambda}+\bar{a}_{\lambda\varkappa}}{2}\right|$ und mit c die größte der Zahlen $\left|\frac{a_{\varkappa\lambda}-\bar{a}_{\lambda\varkappa}}{2}\right|$, so folgt aus den Ungleichungen (4), (7) und (8)

$$\sum_{\nu} |\omega_\nu|^2 \leqq n^2a^2, \quad \sum_{\nu} \varrho_\nu^2 \leqq n^2b^2, \quad \sum_{\nu} \sigma_\nu^2 \leqq n^2c^2.$$

Speziell wird also

$$|\omega_\nu| \leqq na, \quad |\varrho_\nu| \leqq nb, \quad |\sigma_\nu| \leqq nc.$$

Diese Ungleichungen sind bereits von Herrn A. Hirsch a. a. O. abgeleitet worden. Sind ferner die Zahlen $a_{\varkappa\lambda}$ sämtlich reell, so wird $a_{\varkappa\varkappa} - \bar{a}_{\varkappa\varkappa} = 0$; daher ergibt sich inbesondere aus (8)

$$\sum_{\nu} \sigma_\nu^2 \leqq n(n-1)c^2.$$

Da außerdem jedes von Null verschiedene σ_ν^2 mindestens zweimal vorkommen muß, so wird

$$\sigma_\nu^2 \leqq \frac{n(n-1)}{2} c^2,$$

also

$$|\sigma_\nu| \leqq c\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Diese Ungleichung hat zuerst Herr I. Bendixson*) auf einem anderen Wege erhalten.

Ich möchte noch eine Bemerkung an die Hirschsche Ungleichung

$$|\omega_\nu| \leqq na$$

anknüpfen. Soll hier für eine Wurzel $\omega_\nu = \omega$ das Gleichheitszeichen gelten, so ergibt sich aus dem hier Bewiesenen, daß folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

1. Unter den n Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ sind $n-1$ gleich 0.

2. Die Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ sind alle von gleichem absoluten Betrage a und der absolute Betrag der Summe $\sum\limits_\varkappa a_{\varkappa\varkappa}$ ist gleich na.

3. Die Elementarteiler von $|A - xE|$ sind sämtlich linear, woraus in Verbindung mit 1. folgt, daß A vom Range 1 sein muß.

Hieraus schließt man ohne Mühe, daß die Zahlen $a_{\varkappa\lambda}$ von der Form

$$a_{\varkappa\lambda} = ae^{i(\varphi + \varphi_\varkappa - \varphi_\lambda)}$$

sein müssen, wo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ reelle Größen bedeuten.

§ 5.

Ehe ich weiter gehe, möchte ich noch darauf aufmerksam machen, daß in dem Satz II der bekannte Hadamardsche Satz über den Maximalwert einer Determinante**) enthalten ist.

Die Determinante D der Matrix $A = (a_{\varkappa\lambda})$ ist nämlich nichts anderes als das Produkt $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$. Nach dem Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel wird daher

$$(9) \qquad |D|^2 = |\omega_1|^2 |\omega_2|^2 \cdots |\omega_n|^2 \leqq \left(\frac{|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 + \cdots + |\omega_n|^2}{n}\right)^n$$
$$\leqq \left(\frac{n^2 a^2}{n}\right)^n = n^n a^{2n}.$$

Folglich ist

$$(10) \qquad |D| \leqq n^{\frac{n}{2}} a^n.$$

*) „Sur les racines d'une équation fondamentale", Acta Mathematica Bd. 25, S. 359. — Herr A. Hirsch hat noch gezeigt, daß die Bendixsonsche Ungleichung auch dann gilt, wenn nur vorausgesetzt wird, daß die $a_{\varkappa\lambda} + a_{\lambda\varkappa}$ reell sind.

**) „Résolution d'une question relative aux déterminants". Bulletin des sciences mathématiques, 1893, S. 240.

Dies ist die Hadamardsche Ungleichung. Soll $|D| = n^{\frac{n}{2}} a^n$ sein, so muß nach Hadamard weiter

$$|a_{\varkappa\lambda}| = a,$$

$$p_{\varkappa\lambda} = \sum_\nu a_{\varkappa\nu}\bar a_{\lambda\nu} = n a e_{\varkappa\lambda}$$

sein. Dies ergibt sich hier folgendermaßen. Gilt in (10) das Gleichheitszeichen, so müssen auch die Ungleichungen (9) und (4) in Gleichungen übergehen. Daher muß

(11) $$|\omega_1| = |\omega_2| = \cdots = |\omega_n| = a\sqrt{n}, \quad |a_{\varkappa\lambda}| = a$$

werden. Außerdem muß, da

$$\sum_\nu |\omega_\nu|^2 = \sum_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2$$

wird, die Matrix A der Diagonalmatrix Δ, und zugleich $A\bar A'$ der Matrix $\Delta\bar\Delta'$ ähnlich sein. Es wird aber wegen (11)

$$\Delta\bar\Delta' = naE.$$

Folglich ist auch, da diese Matrix nur sich selbst ähnlich ist,

$$A\bar A' = (p_{\varkappa\lambda}) = naE$$

d. h. $p_{\varkappa\lambda} = na e_{\varkappa\lambda}$.

§ 6.

Bezeichnet man die mit Hilfe der $\binom{n}{\nu}^2$ Unterdeterminanten ν^{ten} Grades von A gebildete Matrix mit $C_\nu A$, so werden bekanntlich*) die charakteristischen Wurzeln von $C_\nu A$ die $\binom{n}{\nu}$ Größen

$$\omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}\cdots\omega_{\alpha_\nu} \qquad (\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\nu).$$

Daher ist wegen (4)

(12) $$\sum |\omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}\cdots\omega_{\alpha_\nu}|^2 \leqq \sum |D^{(\nu)}_{\alpha\beta}|^2,$$

wo $D^{(\nu)}_{\alpha\beta}$ alle Unterdeterminanten ν^{ten} Grades von A durchläuft. Die rechts stehende Zahl ist nichts anderes als die Spur von $(C_\nu A)(C_\nu \bar A)'$. Es ist aber allgemein

$$(C_\nu P)' = C_\nu P', \quad (C_\nu P)(C_\nu Q) = C_\nu(PQ).$$

Daher ist $\sum |D^{(\nu)}_{\alpha\beta}|^2$ die Spur von $C_\nu(A\bar A')$. Bezeichnet man wie früher das allgemeine Element $\sum_\mu a_{\varkappa\mu}\bar a_{\lambda\mu}$ von $A\bar A'$ mit $p_{\varkappa\lambda}$, so wird also

*) G. Rados, „Zur Theorie der adjungirten Substitutionen", Math. Annalen, Bd. 48, S. 417.

$$(13)\quad \begin{aligned} &\sum \left|\omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}\cdots\omega_{\alpha_\nu}\right|^2 \\ &\leqq \sum \begin{vmatrix} p_{\alpha_1\alpha_1}, & p_{\alpha_1\alpha_2}, & \cdots, & p_{\alpha_1\alpha_\nu} \\ p_{\alpha_2\alpha_1}, & p_{\alpha_2\alpha_2}, & \cdots, & p_{\alpha_2\alpha_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{\alpha_\nu\alpha_1}, & p_{\alpha_\nu\alpha_2}, & \cdots, & p_{\alpha_\nu\alpha_\nu} \end{vmatrix} \qquad (\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\nu). \end{aligned}$$

Nun ist aber $A\bar{A}'$ die Matrix der positiven Hermiteschen Form

$$\sum_{\varkappa} (a_{1\varkappa}x_1 + a_{2\varkappa}x_2 + \cdots + a_{n\varkappa}x_n)(\bar{a}_{1\varkappa}\bar{x}_1 + \bar{a}_{2\varkappa}\bar{x}_2 + \cdots + \bar{a}_{n\varkappa}\bar{x}_n),$$

folglich erscheint auch jede Hauptunterdeterminante von $A\bar{A}'$ als die Determinante einer positiven Hermiteschen Form. Nach einem von Hadamard a. a. O. bewiesenen Satze ist aber eine solche Determinante höchstens gleich dem Produkt der Koeffizienten ihrer Hauptdiagonale.*) Aus (13) ergibt sich daher

$$(13')\quad \sum \left|\omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}\cdots\omega_{\alpha_\nu}\right|^2 \leqq \sum p_{\alpha_1\alpha_1}p_{\alpha_2\alpha_2}\cdots p_{\alpha_\nu\alpha_\nu} \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\nu).$$

Diese Formeln lassen sich als eine Verallgemeinerung des eben erwähnten Hadamardschen Determinantensatzes auffassen.

§ 7.

Aus der Formel (4) lassen sich noch andere interessante Ungleichungen ableiten.

Zunächst kann man, indem man beachtet, daß $\omega_1^r, \omega_2^r, \cdots, \omega_n^r$ die charakteristischen Wurzeln von A^r sind, eine obere Grenze für $\sum_\nu |\omega_\nu|^{2r}$ ableiten.

Von größerem Interesse scheint mir folgende Bemerkung zu sein.

Man habe neben der Matrix noch eine andere Matrix $B = (b_{\mu\nu})$ mit m Zeilen und Spalten. Die charakteristischen Wurzeln von B seien $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$. Dann ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \omega_\varkappa, \qquad \sum_{\mu=1}^{m} b_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^{m} \eta_\mu.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \sum_{\varkappa,\mu} |\omega_\varkappa + \eta_\mu|^2 &= \sum_{\varkappa,\mu} (\omega_\varkappa\bar{\omega}_\varkappa + \eta_\mu\bar{\eta}_\mu + \omega_\varkappa\bar{\eta}_\mu + \bar{\omega}_\varkappa\eta_\mu) \\ &= m\sum_\varkappa |\omega_\varkappa|^2 + n\sum_\mu |\eta_\mu|^2 + \sum_{\varkappa,\mu} (a_{\varkappa\varkappa}\bar{b}_{\mu\mu} + \bar{a}_{\varkappa\varkappa}b_{\mu\mu}). \end{aligned}$$

*) Vergl. auch E. Fischer, „Über den Hadamardschen Determinantensatz", Archiv der Mathematik und Physik, dritte Reihe, Bd. 13, S. 32.

Andererseits ist

$$\sum_{\varkappa,\mu} |a_{\varkappa\varkappa} + b_{\mu\mu}|^2 + m \sum_{\varkappa \neq \lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2 + n \sum_{\mu \neq \nu} |b_{\mu\nu}|^2 \quad \begin{pmatrix} \varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n \\ \mu, \nu = 1, 2, \cdots, m \end{pmatrix}$$

gleich

$$m \sum_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2 + n \sum_{\mu,\nu} |b_{\mu\nu}|^2 + \sum_{\varkappa,\mu} (a_{\varkappa\varkappa}\bar{b}_{\mu\mu} + \bar{a}_{\varkappa\varkappa} b_{\mu\mu}).$$

Daher gilt stets die Ungleichung

$$\sum_{\varkappa,\mu} |\omega_\varkappa + \eta_\mu|^2 \leqq \sum_{\varkappa,\mu} |a_{\varkappa\varkappa} + b_{\mu\mu}|^2 + m \sum_{\varkappa \neq \lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2 + n \sum_{\mu \neq \nu} |b_{\mu\nu}|^2.$$

Setzt man insbesondere $B = -A$, so kann $\eta_\mu = -\omega_\mu$ angenommen werden, und man erhält

$$\sum_{\varkappa<\mu} |\omega_\varkappa - \omega_\mu|^2 \leqq \sum_{\varkappa<\mu} |a_{\varkappa\varkappa} - a_{\mu\mu}|^2 + n \sum_{\varkappa \neq \lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2.$$

Hieraus läßt sich sofort eine obere Grenze für den absoluten Betrag der Diskriminante d der Gleichung $|A - xE| = 0$ ableiten. Aus

$$d = \prod_{\varkappa<\mu} (\omega_\varkappa - \omega_\mu)^2$$

folgt nämlich

$$|d|^{\frac{2}{n(n-1)}} \leqq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\varkappa<\mu} |\omega_\varkappa - \omega_\mu|^2,$$

daher ist

$$|d|^{\frac{2}{n(n-1)}} \leqq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\varkappa<\mu} |a_{\varkappa\varkappa} - a_{\mu\mu}|^2 + \frac{2}{n-1} \sum_{\varkappa \neq \lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2.$$

§ 8.

Setzt man speziell

$$A = \begin{pmatrix} -a_1, & -a_2 x_2, & \cdots, & -a_{n-1} x_{n-1}, & -a_n x_n \\ x_2^{-1}, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\ 0, & x_3^{-1} x_2, & \cdots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \cdots, & x_n^{-1} x_{n-1}, & 0 \end{pmatrix},$$

wo die a_ν beliebige, die x_ν von Null verschiedene Zahlen bedeuten, so wird

(14) $$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

die charakteristische Gleichung von A. Ist daher

$$b_\nu = |a_\nu|^2, \quad p_\nu = |x_\nu|^2,$$

so genügen die Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ der Gleichung (14) der Ungleichung

$$\sum_\nu |\omega_\nu|^2 \leqq b_1 + b_2 p_2 + \cdots + b_n p_n + \frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_3} + \cdots + \frac{p_{n-1}}{p_n}.^{*)}$$

Diese Formel gilt für alle positiven Zahlen $p_2, p_3, \cdots, p_n$. Für

$$p_2 = p, \quad p_3 = p^2, \quad \cdots, \quad p_n = p^{n-1}$$

erhält man die einfachere Formel

$$\sum_\nu |\omega_\nu|^2 \leqq b_1 + b_2 p + \cdots + b_n p^{n-1} + \frac{n-1}{p}.$$

Allgemeiner folgt aus (12) die Ungleichung

$$\sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots} |\omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \cdots \omega_{\alpha_\nu}|^2 \leqq \binom{n-2}{\nu-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} b_\mu p^{\mu-\nu} + \binom{n-1}{\nu-1} b_n p^{n-\nu} + \binom{n-1}{\nu} p^{-\nu},$$

die wieder für jedes positive p richtig ist. Nimmt man insbesondere a_n als von Null verschieden an, so wird für $p = b_n^{-\frac{1}{n}}$

$$\sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots} |\omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \cdots \omega_{\alpha_\nu}|^2 \leqq \binom{n-2}{\nu-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} b_\mu b_n^{\frac{\nu-\mu}{n}} + \binom{n}{\nu} b_n^{\frac{\nu}{n}}.$$

Der direkte Beweis dieser für jede algebraische Gleichung geltenden Formeln scheint schwierig zu sein.

§ 9.

Aus dem Satz II lassen sich einige bekannte Sätze über lineare Substitutionen als spezielle Folgerungen ableiten.

Es sei zunächst $A = (a_{\varkappa\lambda})$ eine Hermitesche Matrix, also $a_{\varkappa\lambda} = \bar{a}_{\lambda\varkappa}$. Dann wird

$$\sum_\nu |\omega_\nu|^2 \leqq \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} \bar{a}_{\lambda\varkappa} = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} a_{\lambda\varkappa} = \sum_\nu \omega_\nu^2.$$

Da aber andererseits $\sum_\nu \omega_\nu^2 \leqq \sum_\nu |\omega_\nu|^2$ ist, so muß $\sum_\nu \omega_\nu^2 = \sum_\nu |\omega_\nu|^2$ sein, folglich müssen die ω_ν reell sein. Zugleich ergibt sich $\sum_\nu |\omega_\nu|^2 = \sum_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2$, und dies liefert uns die bekannte Tatsache, daß jede Hermitesche Form

*) Es läßt sich zeigen, daß hier für $n > 2$ das Gleichheitszeichen nur dann stehen kann, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ ist.

durch eine unitär orthogonale Transformation der Variabeln auf die Gestalt $\omega_1 y_1 \bar{y}_1 + \omega_2 y_2 \bar{y}_2 + \cdots + \omega_n y_n \bar{y}_n$ gebracht werden kann.*)

Ist ferner A eine unitär orthogonale Matrix, so wird $A\bar{A}' = E$. Die Spur $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2$ von $A\bar{A}'$ wird dann gleich der Spur von E, also gleich n. Außerdem ist der absolute Betrag der Determinante D von A (wegen $A\bar{A}' = E$) gleich 1. Da aber $D = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$ ist, so ergibt sich

$$1 = (|\omega_1|^2 |\omega_2|^2 \cdots |\omega_n|^2)^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 + \cdots + |\omega_n|^2}{n} \leqq \frac{\sum\limits_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2}{n} = 1.$$

Daher muß

$$1 = (|\omega_1|^2 |\omega_2|^2 \cdots |\omega_n|^2)^{\frac{1}{n}} = \frac{|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 + \cdots + |\omega_n|^2}{n}$$

werden; dies erfordert, daß

$$|\omega_1|^2 = |\omega_2|^2 = \cdots = |\omega_n|^2 = 1$$

wird. Daher liegen die charakteristischen Wurzeln einer unitär orthogonalen Substitution A auf dem Einheitskreis. Zugleich ergibt sich aus $\sum\limits_{\nu} |\omega_\nu|^2 = \sum\limits_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2$, daß A durch eine unitär orthogonale Transformation der Variabeln auf die Diagonalform gebracht werden kann. — Diese beiden Sätze sind zuerst von Herrn Frobenius**) aufgestellt worden.

Abschnitt II.

Eine Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen.

§ 10.

Es sei $K(s, t)$ eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte, reelle oder komplexe Funktion der reellen Variabelen s und t, die im ganzen Defi-

*) Diese Ableitung der Grundeigenschaften der Hermiteschen Formen ist gewiß weniger einfach als der sonst übliche Beweis, der sich gewissermaßen direkt auf den hier mit I bezeichneten Satz stützt. Aber es schien mir von Interesse, darauf hinzuweisen, daß sich diese Eigenschaften unmittelbar aus der die Hermiteschen Formen eindeutig kennzeichnenden Gleichung

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} \bar{a}_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} a_{\lambda\varkappa}$$

ablesen lassen.

**) „Über die principale Transformation der Thetafunktionen mehrerer Variabeln", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 95, S. 264. — Vergl. auch A. Loewy, „Über bilineare Formen mit konjugiert imaginären Variabeln", Nova Acta Acad. Leop.-Carol., Bd. 71, S. 379.

nitionsbereich stetig sein soll.*) Eine für $a \leqq s \leqq b$ stetige Funktion $\varphi(s)$ heißt dann nach Herrn Hilbert eine *zum Eigenwert λ gehörende Eigenfunktion des Kerns $K(s, t)$*, wenn

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{15}$$

ist. Herr Fredholm**) hat eine gewisse, durch $K(s, t)$ eindeutig definierte ganze transzendente Funktion

$$D(x) = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots$$

angegeben, die nur für die Eigenwerte λ des Kerns $K(s, t)$ verschwindet. Ist λ eine n-fache Nullstelle von $D(x)$, so heißt n die *Ordnung* des Eigenwerts λ. Diese Zahl n hat noch folgende Bedeutung: *es lassen sich n, aber nicht mehr als n, linear unabhängige (stetige) Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$ bestimmen, für die*

$$\int_a^b K(s, t)\, \varphi_\alpha(t)\, dt = c_{\alpha 1}\, \varphi_1(s) + c_{\alpha 2}\, \varphi_2(s) + \cdots + c_{\alpha, \alpha-1}\, \varphi_{\alpha-1}(s) + \frac{1}{\lambda}\, \varphi_\alpha(s),$$

*wird, wo die $c_{\alpha\beta}$ Konstanten sind.****)

Es ist nun von Interesse, auf elementarem Wege ohne Einführung der Fredholmschen Funktion $D(x)$ nachzuweisen, daß sich zu jedem Eigenwert λ eine ganze Zahl n angeben läßt, die durch die zuletzt erwähnte Eigenschaft charakterisiert ist. Man erhält auf diese Weise eine neue einfache Definition des Begriffs „Ordnung eines Eigenwerts". Für reelle symmetrische Kerne hat diese Aufgabe bereits Herr E. Schmidt†) gelöst. Die folgende Betrachtung schließt sich auch aufs engste dem Schmidtschen Gedankengang an.

---

*) Um einen einfachen Fall vor Augen zu haben, beschränke ich mich im folgenden auf die Betrachtung stetiger Funktionen. Es würde aber genügen anzunehmen, daß die hier vorkommenden Funktionen gewissen leicht zu formulierenden Bedingungen der Integrabilität genügen.

**) „Sur une classe d'équations fonctionnelles", Acta Mathematica, Bd. 27, S. 365.

***) J. Plemelj, „Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung", Monatshefte für Math. und Phys., Jahrgang XV (1904), S. 93. Vergl. auch E. Goursat, „Recherches sur les équations intégrales linéaires", Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse, 1908, S. 6. — Daß die Ordnung n von λ die *größte* Zahl ist, welche die im Text genannte Eigenschaft besitzt, wird erst in der Goursatschen Arbeit (§ 44) ausdrücklich hervorgehoben und bewiesen. Es läßt sich dies aber auch ohne Mühe aus den Ausführungen auf S. 119 der Plemeljschen Arbeit folgern.

†) „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen", I. Teil, Math. Annalen, Bd. 63, S. 443.

§ 11.

Wir bezeichnen im folgenden überall, wenn $\varphi(s)$ eine beliebige Funktion der reellen Variabeln s ist, die konjugiert komplexe Funktion mit $\overline{\varphi}(s)$. Sind $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$ im Intervall $a \leqq s \leqq b$ stetige Funktionen und ist

$$\int_a^b \varphi_\alpha(s)\,\overline{\varphi}_\beta(s)\,ds = e_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n) \tag{16}$$

wo die $e_{\alpha\beta}$ in derselben Weise wie in § 1 zu erklären sind, so sage ich, *die Funktionen* $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$ *bilden ein unitär orthogonales System.*

Es gilt dann folgende Regel: *Sind n linear unabhängige, für $a \leqq s \leqq b$ stetige Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s)$ gegeben, so lassen sich stets n Funktionen*

$$\varphi_\alpha(s) = \sum_{\beta=1}^{n} p_{\alpha\beta}\,\psi_\beta(s)$$

mit konstanten Koeffizienten $p_{\alpha\beta}$ bestimmen, die ein unitär orthogonales System bilden.

Der Beweis dieses Satzes, der für reelle Funktionen zuerst von Herrn E. Schmidt (a. a. O., § 3) ausgesprochen worden ist, läßt sich prinzipiell am einfachsten folgendermaßen führen. Setzt man

$$\int_a^b \psi_\alpha(s)\,\overline{\psi}_\beta(s)\,ds = h_{\alpha\beta},$$

so wird

$$\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}\,x_\alpha\,\overline{x}_\beta = \int_a^b [x_1\,\psi_1(s) + \cdots + x_n\,\psi_n(s)]\,[\overline{x}_1\,\overline{\psi}_1(s) + \cdots + \overline{x}_n\,\overline{\psi}_n(s)]\,ds$$

eine positive Hermitesche Form von nicht verschwindender Determinante.*) Die Konstanten $p_{\alpha\beta}$ sind nun so zu bestimmen, daß

$$\int_a^b \varphi_\alpha(s)\,\overline{\varphi}_\beta(s)\,ds = \sum_{\gamma,\delta} p_{\alpha\gamma}\,\overline{p}_{\beta\delta}\,h_{\gamma\delta} = e_{\alpha\beta}$$

wird. Hierzu hat man nur n Linearformen

$$y_\gamma = p_{1\gamma}x_1 + p_{2\gamma}x_2 + \cdots + p_{n\gamma}x_n$$

zu berechnen, für die

$$\sum_{\gamma,\delta} h_{\gamma\delta}\,y_\gamma\,\overline{y}_\delta = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + \cdots + x_n\overline{x}_n$$

wird, was bekanntlich stets möglich ist.

---

*) Vergl. E. Fischer, a. a. O., S. 38.

Bilden ferner $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$ ein unitär orthogonales System, und ist $f(s)$ eine beliebige für $a \leqq s \leqq b$ stetige Funktion, so setze man

$$\int_a^b f(s)\,\bar{\varphi}_\alpha(s)\,ds = A_\alpha,$$

also

$$\int_a^b \bar{f}(s)\,\varphi_\alpha(s)\,ds = \bar{A}_\alpha.$$

Dann wird

$$\int_a^b \Big[f(t) - \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha \varphi_\alpha(t)\Big]\Big[\bar{f}(t) - \sum_{\alpha=1}^n \bar{A}_\alpha \bar{\varphi}_\alpha(t)\Big]\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\bar{f}(t)\,dt - 2\sum_{\alpha=1}^n A_\alpha \bar{A}_\alpha + \sum_{\alpha,\beta} A_\alpha \bar{A}_\beta \int_a^b \varphi_\alpha(t)\,\bar{\varphi}_\beta(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\bar{f}(t)\,dt - \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha \bar{A}_\alpha.$$

Daher ist stets

$$\sum_{\alpha=1}^n A_\alpha \bar{A}_\alpha \leqq \int_a^b f(t)\bar{f}(t)\,dt.$$

Diese Ungleichung soll nach dem Vorgange von E. Schmidt (a. a. O., § 1) als die Besselsche Ungleichung bezeichnet werden.

§ 12.

Zur Abkürzung möge für jede Funktion $f(s)$

$$\int_a^b K(s,t) f(t)\,dt = K(f)$$

gesetzt werden. Wird für n linear unabhängige stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$

$$K(\varphi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta}\,\varphi_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n),$$

so sagen wir: *$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ erfahren bei Anwendung der Operation K die Substitution $A = (a_{\alpha\beta})$* oder auch *die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ bilden ein invariantes System des Kerns $K(s, t)$, das zur Substitution A gehört.* Jede in einem invarianten System vorkommende Funktion nenne ich eine *Hauptfunktion**) des Kerns. Die charakteristische Determinante $|A - xE|$

*) „Fonction principale" bei E. Goursat, a. a. O.

der Substitution A soll kurz die *charakteristische Funktion des invarianten Systems* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ heißen. Treten an Stelle von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ irgend welche n lineare homogene Verbindungen $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ der φ_α (mit konstanten Koeffizienten), die untereinander linear unabhängig sind, so bilden auch die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ ein invariantes System des Kerns und die diesem System entsprechende Substitution B ist eine zu A ähnliche Substitution. Man kann hierbei die ψ_α so wählen, daß B irgend eine vorgeschriebene zu A ähnliche Substitution wird. Hieraus folgt zugleich auf Grund der Lehre von den linearen Substitutionen, daß sich für eine charakteristische Wurzel ω von A, die genau m Elementarteiler der Determinante $|A - xE|$ zum Verschwinden bringt, m und nicht mehr als m linear unabhängige Funktionen ψ_μ der Form

$$\psi_\mu = c_{\mu 1}\varphi_1 + c_{\mu 2}\varphi_2 + \cdots + c_{\mu n}\varphi_n \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

angeben lassen, sodaß

$$K(\psi_\mu) = \omega\psi_\mu$$

wird.*) Ist ω speziell von Null verschieden, so wird $\lambda = \frac{1}{\omega}$ ein Eigenwert des Kerns $K(s, t)$.

Hat man zwei invariante Systeme $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ und $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_p$ des Kerns $K(s, t)$ und besitzen die zugehörigen charakteristischen Funktionen keinen Teiler gemeinsam, so müssen, wie in bekannter Weise geschlossen wird, die $n + p$ Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n; \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_p$ untereinander linear unabhängig sein.

Von Wichtigkeit ist auch noch folgende Bemerkung. Es seien m Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ gegeben, unter denen nur r linear unabhängig sind, etwa die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r$. Ist dann bekannt, daß für die m Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ Gleichungen der Form

$$K(\varphi_\mu) = \sum_{\nu=1}^{m} c_{\mu\nu}\varphi_\nu$$

bestehen, wo die $c_{\mu\nu}$ Konstanten sind, so erfahren offenbar die r linear unabhängigen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r$ bei Anwendung der Operation K eine gewisse lineare Substitution A, sie bilden also ein invariantes System des Kerns $K(s, t)$. Es gilt dann die leicht zu beweisende Regel: *Die charakteristische Funktion* $|A - xE|$ *des Systems* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r$ *ist ein Divisor der charakteristischen Determinante der Substitution* $C = (c_{\mu\nu})$.

*) Vergl. etwa S. Pincherle und U. Amaldi, „Le operazioni distributive" (Bologna, 1901), Kap. IV.

§ 13.

Ich beweise nun folgenden Satz:

IV. *Bilden die n Funktionen $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ ein invariantes System des Kerns $K(s,t)$ und ist*

$$(\omega_1 - x)(\omega_2 - x)\cdots(\omega_n - x) \tag{17}$$

die charakteristische Funktion dieses invarianten Systems, so ist stets

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\omega_\nu|^2 \leqq \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2\, ds\, dt. \tag{18}$$

Man bestimme nämlich n lineare homogene Verbindungen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ der ψ_α, sodaß die φ_α ein unitär orthogonales System bilden. Dann sind $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ von selbst linear unabhängige Funktionen, und wir erhalten in diesen Funktionen ein invariantes System des Kerns $K(s,t)$, dessen charakteristische Funktion wieder die Funktion (17) ist. Es sei

$$K(\varphi_\alpha) = \int_a^b K(s,t)\,\varphi_\alpha(t)\,dt = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\,\varphi_\beta(s). \tag{19}$$

Setzt man für ein gegebenes s in der Besselschen Ungleichung

$$f(t) = \bar{K}(s,t),$$

wo $\bar{K}(s,t)$ die zu $K(s,t)$ konjugiert komplexe Funktion bedeutet, so wird

$$A_\alpha = \int_a^b \bar{K}(s,t)\,\bar{\varphi}_\alpha(t)\,dt = \sum_{\beta=1}^{n} \bar{a}_{\alpha\beta}\,\bar{\varphi}_\beta(s).$$

Daher ist

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha\beta}\,\bar{a}_{\alpha\gamma}\,\varphi_\beta(s)\,\bar{\varphi}_\gamma(s) \leqq \int_a^b K(s,t)\,\bar{K}(s,t)\,dt.$$

Integriert man nun nach s von a bis b, so erhält man wegen (16)

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\,\bar{a}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha\beta}|^2 \leqq \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,\bar{K}(s,t)\,ds\,dt.^{*)} \tag{20}$$

Da aber $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ die charakteristischen Wurzeln der Substitution $A = (a_{\alpha\beta})$ sind, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\omega_\nu|^2 \leqq \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha\beta}|^2. \tag{21}$$

Aus (20) und (21) ergibt sich die zu beweisende Ungleichung (18)

---

*) Vergl. E. Schmidt, a. a. O., § 5.

Ich füge noch folgendes hinzu. Ist $Q = (q_{\alpha\beta})$ irgend eine unitär orthogonale Substitution, und setzt man

$$\chi_\alpha(s) = \sum_{\beta=1}^{n} q_{\alpha\beta}\varphi_\beta(s),$$

so bilden auch die Funktionen $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$ ein unitär orthogonales System und es wird

$$K(\chi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\chi_\beta,$$

wo die Matrix $C = (c_{\alpha\beta})$ aus der Gleichung

$$C = QAQ^{-1} = QA\overline{Q}'$$

zu berechnen ist. Aus dem Satz I ergibt sich daher, daß man jedes invariante System mit der charakteristischen Funktion (17) durch ein *unitär orthogonales System* $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$ ersetzen kann, für das

$$K(\chi_\alpha) = c_{\alpha 1}\chi_1 + c_{\alpha 2}\chi_2 + \cdots + c_{\alpha,\alpha-1}\chi_{\alpha-1} + \omega_\alpha\chi_\alpha$$

wird.

Ist speziell

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\omega_\nu|^2 = \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha\beta}|^2, \tag{22}$$

so werden die Konstanten $c_{\alpha\beta}$ von selbst gleich Null, so daß sich

$$K(\chi_\alpha) = \omega_\alpha\chi_\alpha$$

ergibt. Dies tritt z. B. stets ein, wenn $K(s,t)$ ein reeller, symmetrischer oder allgemeiner ein *Hermitescher Kern* ist, d. h. wenn $K(s,t) = \overline{K}(s,t)$ wird. Denn aus der Gleichung (19) folgt, indem man mit $\overline{\varphi}_\gamma(s)$ multipliziert und nach s zwischen a und b integriert,

$$a_{\alpha\gamma} = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\alpha(t)\,\overline{\varphi}_\gamma(s)\,dt\,ds.$$

Ist nun $K(s,t) = \overline{K}(t,s)$, so ergibt sich hieraus $a_{\alpha\gamma} = \overline{a}_{\gamma\alpha}$, d. h. $A = (a_{\alpha\beta})$ wird in diesem Fall eine Hermitesche Matrix; für eine solche ist aber die Bedingung (22) gewiß erfüllt. Zugleich ergibt sich, daß die Eigenwerte eines Hermiteschen Kerns sämtlich reell sind.

§ 14.

Es sei nun

$$\lambda = \frac{1}{\omega}$$

ein Eigenwert des Kerns $K(s,t)$. Für jede zu λ gehörende Eigenfunktion φ wird dann

$$K(\varphi) = \omega\varphi.$$

Die Funktion φ erscheint also als eine invariante Funktion des Kerns, und die zugehörige charakteristische Funktion ist $\omega - x$. Ich betrachte nun allgemeiner diejenigen invarianten Systeme $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ des Kerns, deren charakteristische Funktion gleich $(\omega - x)^n$ wird. Dann wird nach Satz IV

$$n\,|\omega|^2 \leqq k,$$

wo k das in (18) auftretende Integral bedeuten soll. Also ist $n \leqq k |\lambda|^2$, d. h. n ist unterhalb einer endlichen Grenze gelegen. *Die größte Zahl n, für die sich ein invariantes System $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ des Kerns mit der charakteristischen Funktion $\left(\frac{1}{\lambda} - x\right)^n$ angeben läßt, soll nun die Ordnung des Eigenwerts λ heißen.* Auf Grund des in § 10 erwähnten Plemelj-Goursatschen Satzes ist diese Zahl n zugleich auch die Ordnung des Eigenwerts im Fredholmschen Sinne.

Es seien ferner

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1}, \ \lambda_2 = \frac{1}{\omega_2}, \cdots, \lambda_p = \frac{1}{\omega_p}$$

p verschiedene Eigenwerte des Kerns $K(s, t)$, die Ordnung von λ_α sei n_α. Bilden dann für ein gegebenes ϱ die n_ϱ Funktionen

$$\varphi_{\varrho 1}, \varphi_{\varrho 2}, \cdots, \varphi_{\varrho n_\varrho} \tag{23}$$

ein invariantes System des Kerns mit der charakteristischen Funktion $(\omega_\varrho - x)^{n_\varrho}$, so erhalten wir in den

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$$

Funktionen (23) n linear unabhängige Funktionen, die als ein invariantes System mit der charakteristischen Funktion

$$(\omega_1 - x)^{n_1}(\omega_2 - x)^{n_2} \cdots (\omega_p - x)^{n_p}$$

erscheinen. Folglich ist nach (18)

$$n_1 |\omega_1|^2 + n_2 |\omega_2|^2 + \cdots + n_p |\omega_p|^2 \leqq k$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{n_1}{|\lambda_1|^2} + \frac{n_2}{|\lambda_2|^2} + \cdots + \frac{n_p}{|\lambda_p|^2} \leqq k.$$

Dies lehrt uns aber (vergl. E. Schmidt, a. a. O., § 5), daß die Eigenwerte des Kerns $K(s, t)$ keine Häufungsstelle im Endlichen besitzen. Zugleich ergibt sich, daß *die Reihe*

$$\sum \frac{1}{|\lambda|^2},$$

erstreckt über alle Eigenwerte λ des Kerns, wobei jeder Eigenwert so oft zu schreiben ist, wie seine Ordnung angibt, konvergent und zwar kleiner als die Zahl k ist. Hieraus folgt auch, daß die Fredholmsche ganze transzen-

dente Funktion $D(x)$, deren Geschlecht bekanntlich höchstens gleich 2 ist*), eine Produktzerlegung der Form

$$D(x) = e^{ax+bx^2}\prod\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)e^{\frac{x}{\lambda}}$$

aufweist. Dieses Resultat scheint für die hier betrachteten allgemeinen Kerne neu zu sein.

§ 15.

Unsere Betrachtung bedarf noch einer Ergänzung. Ist nämlich n wieder die Ordnung eines Eigenwerts $\lambda = \frac{1}{\omega}$ und bilden $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ ein invariantes System mit der charakteristischen Funktion $(\omega - x)^n$, so fragt es sich: inwiefern sind die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ und die zu gehörige lineare Substitution $A = (a_{\alpha\beta})$, für die

$$K(\varphi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\varphi_\beta$$

wird, durch den Eigenwert λ eindeutig bestimmt?

Diese Frage ist leicht zu entscheiden.

Hat man nämlich neben $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ noch ein zweites invariantes System $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ mit der charakteristischen Funktion $(\omega - x)^n$, so sei

$$K(\psi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta}\psi_\beta.$$

Die Substitution $(b_{\alpha\beta})$ möge mit B bezeichnet werden. Sind dann unter den $2n$ Funktionen

$$(24)\qquad \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n;\quad \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$$

r linear unabhängig, etwa $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_r$, so muß zunächst, weil doch die φ_α (und ebenso die ψ_α) linear unabhängig sein sollen, $r \geqq n$ sein. Ferner bilden die Funktionen $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_r$ wieder ein invariantes System des Kerns. Nach der am Schluß des § 12 gemachten Bemerkung muß aber die charakteristische Funktion dieses Systems ein Divisor der charakteristischen Determinante $(\omega - x)^{2n}$ der Substitution

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sein, und also gleich $(\omega - x)^r$ werden. Hieraus folgt aber, daß $r = n$ sein muß, da sonst n nicht als die Ordnung des Eigenwerts λ zu kenn-

*) Vergl. Plemelj, a. a. O., S. 101 und T. Lalesco, „Sur l'ordre de la fonction entière $D(\lambda)$ de Fredholm", Comptes Rendus, 25. November 1907, S. 906.

zeichnen wäre. Demnach ist jede der Funktionen $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ eine lineare homogene Verbindung der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ mit konstanten Koeffizienten. Zugleich ergibt sich, daß die Substitution B der Substitution A ähnlich sein muß. Sieht man ähnliche Substitutionen als nicht voneinander verschieden an, so erscheint A als eine durch λ eindeutig charakterisierte Substitution. Die Anzahl der zu λ gehörenden linear unabhängigen Eigenfunktionen des Kerns $K(s,t)$ ist dann nichts anderes als die Anzahl der Elementarteiler der Determinante $|A - xE|$.

Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ kann man passend als ein *vollständiges zum Eigenwert λ gehörendes invariantes System* bezeichnen.

Allgemeiner schließt man in ähnlicher Weise:

Man habe irgend ein invariantes System $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_p$ des Kerns $K(s,t)$, die zugehörige charakteristische Funktion sei

$$(\omega_1 - x)^{p_1} (\omega_2 - x)^{p_2} \cdots (\omega_m - x)^{p_m}, \qquad (p_1 + p_2 + \cdots + p_m = p)$$

wo $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ voneinander verschieden sein sollen. Jede nicht verschwindende unter den Zahlen ω_μ ist dann der reziproke Wert eines Eigenwerts λ_μ des Kerns, und ist n_μ die Ordnung dieses Eigenwerts, so ist $p_\mu \leqq n_\mu$. Sind insbesondere alle m Zahlen $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ von Null verschieden und bilden die Funktionen

$$\varphi_{\mu 1}, \varphi_{\mu 2}, \cdots, \varphi_{\mu n_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m) \tag{25}$$

ein vollständiges zu λ_μ gehörendes invariantes System, so läßt sich jede der p Funktionen $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_p$ durch die $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ Funktionen (25) *linear und homogen mit konstanten Koeffizienten darstellen.*

Über die Darstellung einer beliebigen stetigen Funktion.

Von

Johannes Mollerup in Kopenhagen.

Die bekannten Annäherungen einer beliebigen stetigen Funktion sind schon in mannigfacher Weise begründet worden; die Beweise beruhen auf verschiedenen analytischen Hilfsmitteln: bestimmten Integralen, Fourierschen oder Taylorschen Entwicklungen usw. Es wird im folgenden eine axiomatische Herleitung dieser Darstellungen gegeben; genau wie wir eine gegebene reelle Zahl in mannigfacher Weise durch konvergente Folgen anderer reeller Zahlen, z. B. rationaler Zahlen bestimmen können, und zwar deshalb, weil diese Tatsache eine unmittelbare Folge der Definition der reellen Zahl ist, so können wir lediglich aus dem Fundamentalsatz, daß eine in einem Intervall gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen immer als Grenzfunktion eine stetige Funktion hat, herleiten, daß eine gegebene stetige Funktion in mannigfacher Weise durch gleichmäßig konvergente Folgen von anderen stetigen Funktionen, z. B. Polynomen oder trigonometrischen Summen, wie von Weierstraß gezeigt worden, darstellbar ist.

Es ist jedoch zu bemerken, daß die Hilfsmittel unseres Beweises wesentlich andere sind, als diejenigen, die bei dem entsprechenden Nachweise für die reellen Zahlen gewöhnlich benutzt werden (vergl. S. 512). In der Tat beruht unser ganzes Verfahren auf der Heranziehung der Zahlen der zweiten Zahlenklasse.

Wir beweisen zuerst zwei einfache mengentheoretische Hilfssätze.

Satz 1. *Sind a und b zwei reelle Zahlen, $a < b$, und liegt zwischen a und b eine der Größe nach wohlgeordnete Menge reeller Zahlen, dann ist dieselbe immer abzählbar.*

Betrachten wir nämlich die Intervalle von einem Element bis zum nächsten, so entsteht eine Intervallmenge, die nach einem bekannten Satze von G. Cantor (Acta Math. 2, 1883, S. 376) abzählbar ist.

Satz 2. *Ist eine abzählbare Menge M auf irgend eine Weise geordnet, dann hat sie in dieser Ordnung entweder ein letztes Element oder sie enthält eine Untermenge vom Typus ω ohne nachfolgendes Element* (jede solche Untermenge wollen wir eine *letzte Untermenge* vom Typus ω nennen).

Es sei die Menge

$$M \equiv \{a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_n \cdots\}$$

und dieselbe Menge in der gegebenen Ordnung M'; wir greifen zuerst $a_{n_1} = a_1$ heraus, dann das erste Element a_{n_2} von M, das auch in M' nach a_1 folgt, dann wieder das erste Element a_{n_3} von M, das auch in M' nach a_{n_2} folgt usw.; wir nehmen an, daß die gegebene Ordnung M' kein letztes Element enthält. Sollte nun M' ein Element a_m enthalten, das nach der Untermenge $(a_{n_1}\, a_{n_2} \cdots)$ folgt, dann hätten wir z. B.

$$n_p < m < n_{p+1};$$

dann könnte aber $a_{n_{p+1}}$ gegen Voraussetzung nicht das erste Element von $\{a_1\, a_2\, a_3 \cdots\}$ sein, das in der gegebenen Ordnung nach a_{n_p} folgt.

Im folgenden wird dieser Satz nur in dem Falle gebraucht, daß M' *wohlgeordnet* ist.

Um den späteren Beweisgang übersichtlicher zu machen, möchte ich hier hervorheben, daß diese Sätze eine besondere Approximation einer gegebenen Zahl durch immer wachsende Zahlenfolgen liefern; es kommt hierbei nur die Anordnung der Zahlen in Betracht, nicht die Größe der zwischenliegenden Intervalle. Es sei die zu approximierende Zahl a und $b < a$; man bilde $b_1, b_2, b_3, \cdots$ wo

$$b < b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < a$$

mit der Grenze $b_\omega \leqq a$. Ist $b_\omega < a$, dann bilden wir

$$b_\omega < b_{\omega+1} < b_{\omega+2} < \cdots < a.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so müssen wir nach den Sätzen 1 und 2 schließlich zu einer Folge gelangen, die a als Grenzpunkt hat.

Zur Basis der Darstellung aller in einem Intervall (ab) *stetigen Funktionen gebrauchen wir eine abzählbare Menge von stetigen Funktionen*

$$1,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \cdots$$

und deren linearen Verbindungen mit rationalen Koeffizienten. An diese Funktionenmenge stellen wir die folgende wesentliche Forderung:

Wenn $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gegebene rationale Zahlen sind, dann enthält die Basis immer eine Funktion, die in $x_1, x_2, \cdots, x_n$ verschwindet und sonst durchweg positiv ist.

Diese Forderung ist jedenfalls erfüllt, wenn die φ Potenzen von x $(x, x^2, x^3, \cdots)$ oder trigonometrische Ausdrücke $(\sin mx, \cos mx)$ sind.

Es sei die *Basis* R_x. Bilden wir mittels R_x gleichmäßig konvergente Funktionsfolgen und konvergente Zahlenfolgen, dann erzeugen wir neue stetige Funktionen und beliebige reelle Zahlen, die ein *Funktionskontinuum* C_x bilden, welches auch das Zahlenkontinuum enthält.

Satz 3. *C_x ist abgeschlossen, d. h. jede von einer gleichmäßig konvergenten Funktionsfolge aus C_x, $\{c_1(x), c_2(x), \cdots\}$, erzeugte Funktion $C(x)$ ist die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionsfolge aus R_x.*

Beweis einleuchtend.

Satz 4. *Ist $f(x)$ stetig im Intervall (ab), und $a(x)$ eine Funktion von C_x, die kleiner als $f(x)$ im ganzen Intervall ist, dann enthält C_x eine Funktion $b(x)$, so daß im ganzen Intervall*

$$a(x) \leqq b(x) < f(x),$$

indem das Gleichheitszeichen nie oder nur in einer endlichen Anzahl vorausgegebener rationaler Stellen, $x_1, x_2, \cdots, x_n$, erfüllt ist; außerdem können wir, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist, $b(x) - a(x) < \varepsilon$ im ganzen Intervall annehmen.

Es sei $p(x)$ eine Basisfunktion, die in $x_1, x_2, \cdots, x_n$ verschwindet und sonst im ganzen Intervall durchweg positiv ist. Wir bilden dann

$$a_0(x) = a(x) + p(x), \qquad a_1(x) = \frac{a(x) + a_0(x)}{2}$$

$$a_2(x) = \frac{a(x) + a_1(x)}{2}$$

$$\vdots$$

$$a_m(x) = \frac{a(x) + a_{m-1}(x)}{2}.$$

$$\vdots$$

Die Folge $\{a_0(x), a_1(x), a_2(x), \cdots\}$ nimmt dann gleichmäßig gegen $a(x)$ ab; alle Funktionen stimmen in $x_1, x_2, \cdots, x_n$ überein. Von einer gewissen Zahl m ab erfüllen dann die $a_m(x)$ die im Satze für $b(x)$ aufgestellten Bedingungen.

Weil dieser Prozeß öfters zur Anwendung kommt, bezeichnen wir ihn mit dem besonderen Namen „*Kombination von $a(x)$ mit $p(x)$*".

Satz 5. *Ist $f(x)$ eine beliebige im Intervall (ab) stetige Funktion, dann gibt es eine Folge von Basisfunktionen, die gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.*

Es sei im ganzen Intervall $a(x) < f(x)$, wo $a(x)$ eine stetige Funktion aus C_x ist, z. B. eine Basisfunktion; eine stetige Funktion $b(x)$ *gehört dem Raum (af) an*, wenn im ganzen Intervall

$$a(x) \leqq b(x) \leqq f(x).$$

Wir wollen jetzt den Raum (af) in der Weise ausfüllen, daß derselbe auch eine gegen $f(x)$ gleichmäßig konvergierende Folge enthält.

1. *Der Raum* (af) *enthält eine Funktion* $a_1(x)$ *aus* C_x,

$$a(x) < a_1(x) < f(x) \quad \text{(Satz 4)},$$

sowie auch eine gleichmäßig konvergente immer wachsende Folge von Funktionen aus C_x.

Den maximalen Abstand zwischen a und f bezeichnen wir mit $\overline{af}$. Wir brauchen nur nach Satz 4 die Funktion $a_1(x)$

$$a(x) < a_1(x) < f(x)$$

und ebenso $a_2(x)$, $a_3(x)$, $\cdots$ zu bestimmen, so daß

$$a(x) < a_1(x) < a_2(x) < a_3(x) < \cdots < f(x)$$

und außerdem jedesmal

$$\overline{a_n a_{n+1}} \leqq \frac{1}{2}\,\overline{a_{n-1} a_n}.$$

2. *Der Raum* (af) *enthält Funktionen aus* C_x, *die in mindestens je einem Punkte von* n *gegebenen Teilintervallen* $f(x)$ *beliebig nahe kommen.*

Der Gedanke des Beweisgangs ist der gleiche, der oben in der Bemerkung nach Satz 2 zum Ausdruck gekommen ist. Der Raum (af) wird durch fortgesetzte Kombination mit einer Funktion $p(x) > a(x)$ mit immer wachsenden Funktionsfolgen ausgefüllt. Sobald aber die gegebene Funktion durch eine Grenzfunktion in gewissen Punkten erreicht wird, dann muß dieselbe korrigiert werden, weil die weiteren durch die Konstruktion entstandenen Funktionen ja nicht dem Zwischenraum angehören würden. Diese Korrektion findet nun in der Weise statt, daß jedenfalls auf einer Ordinate eine immer wachsende Folge beschrieben wird.

Wir nehmen an, daß die gesuchte Approximation schon durch $b(x)$ in i der gegebenen Intervalle erreicht ist, so daß

$$a(x) < b(x) < f(x)$$

und $f(x) - b(x) < \varepsilon$ in einem (und also in unendlich vielen) rationalen Punkt jedes der i Intervalle. Es seien diese i Punkte $x_1, x_2, \cdots, x_i$; wir erstreben die Approximation in einem neuen Intervall. Nach 1. bestimmen wir erstens $b_1(x)$, so daß

$$b(x) \leqq b_1(x) < f(x).$$

und zwar soll hier wie im folgenden das Gleichheitszeichen in den Punkten $x_1, x_2, \cdots, x_i$ gelten.

Weiter finden wir nach 1. $b_2(x)$, $b_3(x)$, $\cdots$, wo

$$b_1(x) \leqq b_2(x) \leqq b_3(x) \cdots$$

und immer

$$\overline{b_n b_{n+1}} < \frac{1}{2}\,\overline{b_{n-1} b_n}.$$

Es sei die Grenzfunktion $b_\omega(x)$.

a) Erreicht $b_\omega(x)$ in keinem Punkte $f(x)$, dann verdoppeln wir die Menge durch $b_{\omega+1}(x)$, $b_{\omega+2}(x)$, $\cdots$; ist $b_{\omega\cdot 2}(x)$ die neue Grenzfunktion, dann verfügen wir so über die Abstände, daß

$$\overline{b_\omega b_{\omega\cdot 2}} < \frac{1}{2}\,\overline{b b_\omega}.$$

b) Erreicht dagegen $b_\omega(x)$ $f(x)$ in Punkten, die sämtlich den i Intervallen angehören, dann wird die Menge in folgender Weise geändert. Es sei $h(x)$ eine Basisfunktion, die in $x_1, x_2, \cdots, x_i$ und einem rationalen Punkt x_{i+1} eines neuen Intervalls verschwindet, die aber sonst überall positiv ist. Wir bilden $h_1(x) = b_\omega(x) - h(x)$ und kombinieren $b_\omega(x)$ mit $h_1(x)$; hierdurch finden wir eine Funktion $h_n(x)$, die mit Ausnahme der Punkte $x_1, x_2, \cdots, x_i$ größer als $b_1(x)$ ist und die außerdem für $x = x_{i+1}$ dieselbe Ordinate Y_{i+1} wie $b_\omega(x)$ besitzt. $h_n(x) = b'_\omega(x)$ soll dann $b_\omega(x)$ ersetzen; die Menge zwischen $b_1(x)$ und $b_\omega(x)$ wird durch eine Kombination von b_1 und $b'_\omega(x)$ ersetzt. Nun wird die Menge im Raum $(b_1 b'_\omega)$ verdoppelt wie oben die Menge im Raum $(b_1 b_\omega)$.

Wir können in dieser Weise von der Möglichkeit absehen, daß $f(x)$ innerhalb der i Intervalle erreicht wird, weil wir nötigenfalls das Korrektionsverfahren anwenden können. Es entsteht also eine gleichmäßig konvergente Folge

$$b_\omega(x),\ b_{\omega\cdot 2}(x),\ b_{\omega\cdot 3}(x),\ \cdots,$$

wo

$$\overline{b_\omega b_{\omega\cdot 2}} < \frac{1}{2}\,\overline{b b_\omega},\qquad \overline{b_{\omega\cdot 2} b_{\omega\cdot 3}} < \frac{1}{2}\,\overline{b_\omega b_{\omega\cdot 2}}\ \cdots.$$

Die Grenzfunktion ist $b_{\omega^2}(x)$; sie läßt sich nötigenfalls wie früher korrigieren, wobei außer den Punkten $x_1, x_2, \cdots, x_i$ immer der Punkt Y_{i+1} festgehalten wird. Entsteht durch Korrektion $b'_{\omega^2}(x)$, die überall $> b_\omega$, nur nicht in $x_1, x_2, \cdots, x_i$, dann wird die Menge

$$\{b_{\omega\cdot 2}(x),\ b_{\omega\cdot 3}(x)\ \cdots\}$$

durch eine Kombination von $b'_{\omega^2}(x)$ mit b_ω ersetzt, und in ähnlicher Weise können wir uns die entstehenden Zwischenräume ausgefüllt denken. In dieser Weise fahren wir nun fort; jede gefundene abzählbare Menge ohne letzte Funktion hat eine letzte Menge vom Typus ω,

$$\{b_{\gamma_1}(x),\ b_{\gamma_2}(x),\ \cdots\}$$

wo immer

$$\overline{b_{\gamma_\nu} b_{\gamma_{\nu+1}}} < \frac{1}{2}\,\overline{b_{\gamma_{\nu-1}} b_{\gamma_\nu}};$$

die Grenzfunktion b_{γ_ω} wird nötigenfalls korrigiert und bildet dann die Ausgangsfunktion einer Verdoppelung der vorhandenen Menge. Das Verfahren kann also nur dadurch abbrechen, daß eine Funktion gefunden wird, die in einem neuen Intervall Anschluß an die gegebene Funktion

erreicht; weil nun auf Y_{i+1} eine immer steigende Menge beschrieben wird, muß nach Satz 1 die ganze Menge abzählbar sein. Dieselbe hat also nach Satz 2 entweder eine letzte Funktion oder eine letzte Menge vom Typus ω mit einer Grenzfunktion. Die gefundene Funktion $c(x)$ liegt wie schon $b_1(x)$ oberhalb $b(x)$ im ganzen Intervall, und

$$f(x) - c(x) < \varepsilon$$

in $i+1$ Teilintervallen.

Wir können nun mit einer Konstanten anfangen, die um ε kleiner als das Minimum von $f(x)$ ist, und erreichen dann immer steigend allmählich Anschluß in allen n Intervallen.

Nunmehr beweisen wir den Satz 5 wie folgt. Zuerst enthält die Basis eine Funktion $a(x) < f(x)$ in (ab). (ab) wird halbiert; $a_1(x)$ soll dann eine Funktion aus C_x sein, die dem Raum (af) angehört, so daß in zwei Punkten der Teilintervalle

$$f(x) - a_1(x) < \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ beliebig} > 0).$$

Dann halbieren wir beide Teilintervalle; $a_2(x)$ soll nun eine Funktion aus C_x sein, die dem Raum $(a_1 f)$ angehört, so daß in vier Punkten der vier Teilintervalle

$$f(x) - a_2(x) < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Fahren wir in dieser Weise fort, dann muß $f(x)$ die Grenze der Folge

$$a_1(x) < a_2(x) < a_3(x) \cdots$$

sein; dieselbe konvergiert aber, weil sie immer wachsend ist, gleichmäßig, laut eines Satzes von Dini (Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali § 99; vergl. Erhard Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen, Math. Ann. Bd. 63, S. 471). Nach Satz 3 läßt sich schließlich die gefundene Folge durch eine Folge von Basisfunktionen ersetzen.

Es leuchtet ein daß alles Vorhergehende ungeändert für einen n-dimensionalen Raum gültig bleibt.

Zur Transformation von Raumkurven.

Von

E. Salkowski in Charlottenburg.

Zwei Raumkurven C und C_1 lassen sich in mannigfachster Weise punktweise aufeinander beziehen. Jede derartige Zuordnung bestimmt ein Gesetz, durch das die eine Raumkurve C in die andere C_1 übergeführt wird. Zwischen den Bestimmungsstücken der beiden Kurven werden dann je nach der Art der Zuordnung mehr oder weniger einfache Beziehungen bestehen, deren analytische Herleitung aus den vorgegebenen Bedingungen keinerlei sachliche Schwierigkeiten bereitet. Ist das Gesetz zu speziell gewählt, so kann es vorkommen, daß es entweder gar keine Kurven gibt, die ihm genügen, oder nur eine spezielle Klasse von Raumkurven, für welche dann die Vorschrift als definierende Eigenschaft angesehen werden kann. Verlangt man beispielsweise eine Raumkurve C_1, die mit der Kurve C alle Tangenten gemeinsam hat, so müssen C und C_1 zusammenfallen: das gewählte Gesetz ist nicht geeignet, zwei verschiedene Kurven aufeinander zu beziehen. Die Forderung dagegen, daß zwei Kurven gemeinsame Hauptnormalen besitzen sollen, kann nur durch eine besondere Klasse von Kurven erfüllt werden und daher zur Definition dieser Bertrandschen Kurven benutzt werden.

Wählt man etwas weniger spezielle Beziehungen, so gewinnt man den Vorteil, Kurven von unbekannten Eigenschaften mit solchen zu verbinden, die genauer bekannt sind, und aus dieser Verbindung Hilfsmittel zur Forschung zu gewinnen.

Insbesondere liegt es nahe, die geometrisch leicht übersehbare Verbindung der Fundamentaltrieder der Kurven in entsprechenden Punkten heranzuziehen. Man wird die Beziehungen zwischen zwei Kurven untersuchen, deren Tangenten in entsprechenden Punkten einander parallel sind oder aufeinander senkrecht stehen. Stellt man dasselbe Problem für die Binormalen oder Hauptnormalen, so kommt man zu weiteren Verwandtschaftsgesetzen, denen sich die Raumkurven unterwerfen lassen.

Die Fragen finden sich in der Literatur verstreut und vereinzelt behandelt. Die Beziehung zweier Raumkurven mit parallelen Tangenten findet sich in der französischen Literatur als *transformation de Combescure**) bezeichnet; auch Aoust**) beschäftigt sich in seinem reichhaltigen Lehrbuch mit diesen „courbes parallèles". In neuerer Zeit hat Herr N. J. Hatzidakis***) die Relationen zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge zweier so aufeinander bezogenen Kurven aufgestellt und die Formeln auf Gebilde im n-dimensionalen Raum ausgedehnt.

Kurven, deren Hauptnormalen einander parallel sind, hat Aoust†) zum ersten Male betrachtet. L. Bianchi††) benutzte dann einen speziellen Fall dieser Beziehung — wenn die Linienelemente der beiden Kurven gleich sind — um die Gleichungen der Bertrandschen Kurven aus denen für die Kurven konstanter Krümmung herzuleiten.

Die Beziehung zweier Kurven durch Orthogonalität der Linienelemente ist von G. Sannia†††) nach den Methoden der natürlichen Geometrie untersucht worden.

Alle diese Arbeiten gehen aber rein analytisch vor, und es ist daher vielleicht nicht überflüssig, zu dem einfachen geometrischen Gehalt dieser Transformationen zurückzukehren und aus ihm ihre Eigenschaften abzulesen. Der erste Teil der vorliegenden Untersuchung stellt sich daher die Aufgabe, systematisch *alle durch Parallelität oder Orthogonalität zweier Kanten der Fundamentaltrieder zweier Kurven ermöglichten Relationen* aufzustellen, eine geometrische Erzeugungsweise für jede einzelne zu bestimmen und die charakteristischen Gleichungen geometrisch herzuleiten.

Der *zweite Abschnitt* wendet die Beziehung durch parallele Tangenten auf die Theorie der *Loxodromen* an. Nachdem zu einer beliebigen Kurve die ihr parallel zugeordnete Loxodrome durch zwei Quadraturen bestimmt ist, wird insbesondere das Problem der *loxodromischen Schraubenlinien* auf seine Quadraturen, das Problem der *Loxodromen konstanter Krümmung*

---

*) Der Verf. bemerkte diese Tatsache erst, nachdem er der Berliner Math. Gesellschaft über einige Anwendungen dieser Transformation berichtet hatte. (Sitzungsberichte der B. M. G. 4, S. 64-69.)

**) Aoust, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Paris 1876. S. 382.

***) N. J. Hatzidakis, Om nogle Konsekvenser af Frenet's og Brunel's Formler. Nyt Tidskr. f. Math. 13, 1902; auch G. Sannia, Trasformazione di Combescure ed altre analoghe per le curve storte. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo 20, S. 83-92, 1905.

†) Aoust, a. a. O. S. 368.

††) Bianchi, Differentialgeometrie. Deutsch von Lukat, Leipzig 1896/99. S. 32.

†††) G. Sannia, Deformazioni infinitesime delle curve inestendibili e corrispondenza per ortogonalità di elementi. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo. 21, S. 229-256. 1906.

sowie das der *Doppelloxodromen* auf seine Differentialgleichungen zurückgeführt.

Der *dritte Teil* stellt eine Anwendung der Transformation durch orthogonale Linienelemente dar. Nach der Bestimmung der Kurven, die einer gewöhnlichen Schraubenlinie in der angegebenen Weise zugeordnet sind, wird man durch Spezialisierung der Untersuchung *auf eine besondere Art von Kurven konstanter Krümmung geführt, unter denen sich unendlich viele algebraische befinden.* Dies Ergebnis erscheint insofern von einigem Interesse, als bisher außer dem Kreise noch keine algebraischen Kurven konstanter Krümmung bekannt waren. Die hier untersuchten Kurven bieten außerdem das Interesse einer anschaulichen geometrischen Erzeugungsweise und besitzen eine Reihe von Eigenschaften, die sie einerseits mit der Theorie der Flächen zweiter Ordnung, andererseits mit den zyklischen Kurven der Ebene in nahe Beziehung setzen.

Im vierten Teil wird abschließend die Untersuchung verallgemeinert und auf die Kurven ausgedehnt, die auf den Tangentenflächen von Schraubenlinien als geodätische Linien auftreten. Ihre Bestimmung in natürlichen Gleichungen erfordert nur Eliminationen, während ihre endlichen Gleichungen durch eine Quadratur gewonnen werden. Sie besitzen die charakteristische Eigenschaft, daß ihre Hauptnormalen den Zylinder, auf dem die Gratlinie ihrer rektifizierenden Fläche geodätisch ist, einhüllen.

I.

Kurvenpaare, deren Haupttriederkanten parallel oder orthogonal sind.

1. *Zwei Kurven C_1 und C_2 seien punktweise so aufeinander bezogen, daß ihre Tangenten in entsprechenden Punkten parallel sind.*

Mit den Tangenten sind auch die durch sie bestimmten Schmiegungsebenen parallel, also auch die Lote auf diesen, d. h. die Binormalen der Kurven. Sind aber Tangenten und Binormalen parallel, so sind es auch die Hauptnormalen, die mit den beiden ersten Linien ein Rechtssystem von Achsen bilden müssen.

Kurven, deren Linienelemente in entsprechenden Punkten parallel sind, haben überall parallele Fundamentaltrieder. Ihre Kontingenz- und Schmiegungswinkel sind einander gleich, und sie besitzen daher in entsprechenden Punkten stets dasselbe Verhältnis von Krümmung und Torsion.

Eine ausgezeichnete Rolle spielen dieser Transformation gegenüber die allgemeinen Schraubenlinien. Da bei ihnen das Verhältnis von Krümmung

und Torsion konstant ist, geht bei jeder derartigen Transformation eine Schraubenlinie in eine andere Kurve derselben Art über, und umgekehrt gibt es immer eine Transformation durch parallele Linienelemente, die zwei beliebig gewählte Schraubenlinien mit demselben Krümmungsverhältnis und parallelen Achsen ineinander überführt. Man kann daher die Eigenschaften der allgemeinen Schraubenlinien leicht aus denen der gewöhnlichen, die dem Rotationszylinder angehören, herleiten.

Da je zwei entsprechende Linienelemente einander parallel sind, so erzeugen die Geraden, welche entsprechende Punkte beider Kurven miteinander verbinden, eine abwickelbare Fläche.

Geometrisch erzeugt man die zu einer Kurve C zugeordneten Kurven, indem man durch C eine beliebige abwickelbare Fläche legt und auf dieser die Kurven bestimmt, die die erzeugenden Geraden der Fläche parallel zur gegebenen Kurve durchschneiden.

Da zwei beliebige ebene Kurven einander stets parallel zugeordnet werden können, realisiert man die Zuordnung auch folgendermaßen:

Man verbindet diejenigen Punkte zweier beliebiger Kurven einer Ebene, in denen die Tangenten parallel sind, geradlinig und biegt nun die Ebene so, daß die Verbindungslinien geradlinig bleiben. Alsdann geben die beiden gewählten Kurven eines der gesuchten Kurvenpaare im Raume.

2. *Zwei Kurven C und C' sollen in entsprechenden Punkten parallele Binormalen besitzen.*

Sind die Binormalen parallel, so sind es auch die Schmiegungsebenen; daraus folgt aber die Parallelität der Tangenten, die als Schnitte benachbarter Schmiegungsebenen anzusehen sind. Die Transformation ist also mit der vorigen identisch.

3. *Besitzen zwei Kurven in entsprechenden Punkten parallele Hauptnormalen,* so sind ihre rektifizierenden Ebenen parallel, also auch ihre rektifizierenden Geraden; die rektifizierenden Kurven sind einander also durch parallele Linienelemente zugeordnet.

Zwei Kurven, deren Hauptnormalen in entsprechenden Punkten parallel sind, liegen daher als geodätische Linien auf solchen abwickelbaren Flächen, deren Gratlinien parallele Linienelemente besitzen.

Insbesondere sind, was von vornherein erwartet werden mußte, die geodätischen Linien einer und derselben abwickelbaren Fläche durch Transformation mittels paralleler Hauptnormalen ineinander überzuführen. Die Tangenten der geodätischen Linien einer abwickelbaren Fläche in je zwei entsprechenden d. h. auf derselben Erzeugenden liegenden Punkten bilden aber, wie bekannt und geometrisch evident ist, einen auf der Fläche konstanten Winkel ϑ. Liegen aber die Kurven C_1 und C_2 als Geodätische

auf zwei verschiedenen abwickelbaren Flächen F_1 und F_2 mit parallelen Erzeugenden, so kann man auf F_1 der Kurve C_2 eine Linie C_2' durch parallele Linienelemente zuordnen. Da C_2' mit C in entsprechenden Punkten denselben Winkel bildet, so gilt das auch von C_1 und C_2:

Lassen sich zwei Kurven durch parallele Hauptnormalen aufeinander beziehen, so bilden ihre Tangenten in entsprechenden Punkten überall denselben Winkel ϑ.*)

Die Krümmungsverhältnisse der Kurven hängen von dem Winkel ϑ ab. Zunächst ist für alle Kurven mit parallelen Hauptnormalen der Winkel der ganzen Krümmung $d\omega''$ derselbe. Bezeichnet man nun den Winkel, den die Kurve C_1 mit ihrer rektifizierenden Geraden bildet, mit φ_1, den entsprechenden Winkel der Kurve C_2 mit ihrer rektifizierenden Geraden mit φ_2, so ist, wenn $\varkappa_i$, τ_i Krümmung und Torsion der Kurve C_i bezeichnen:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\varkappa_1}{\tau_1}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\varkappa_2}{\tau_2}$$

und

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \vartheta.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{\varkappa_2\tau_1 - \varkappa_1\tau_2}{\tau_1\tau_2 + \varkappa_1\varkappa_2} = \operatorname{tg}\vartheta,$$

d. h. das Verhältnis von Krümmung und Torsion der einen Kurve ist eine lineare gebrochene Funktion derselben Größe für die andere Kurve.**)

Für $\vartheta = 0$ kommt man auf die Transformation durch parallele Linienelemente zurück, für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erhält man die spezielle Art der Zuordnung, bei der die Tangente der einen Kurve der Binormale der andern parallel ist.

Man betrachte nunmehr diejenigen Transformationen, bei denen entsprechende Bestimmungsstücke senkrecht zueinander stehen.

4. *Zwei Kurven C_1 und C_2 seien durch Orthogonalität ihrer Linienelemente aufeinander bezogen.*

Man realisiert diese Transformation allgemein in folgender Weise: Man wählt auf der Tangentenfläche von C_1 irgend eine Filarevolvente und bestimmt die Gratlinie der abwickelbaren Fläche, die von den Normalen jener Tangentenfläche längs der Filarevolvente gebildet wird, dann sind die Parallelkurven dieser Gratlinien der Kurve C durch orthogonale Linienelemente zugeordnet.

Die Abhängigkeit, in der Krümmung und Torsion der beiden Kurven C_1 und C_2 stehen, richtet sich nach dem willkürlich vorzuschreibenden

*) Aoust, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, 1876, S. 369—370.
**) Aoust, a. a. O., S. 370.

Gesetz, nach welchem der Winkel ϑ_1 der Tangente von C_2 mit der Hauptnormale von C_1 sich ändert.

Es seien P_2, P_2', P_2'' benachbarte Punkte der Kurve C_2. Durch $P_2 P_2'$ lege man die Ebene senkrecht zur Tangente $P_1 P_1'$ der Kurve C_1, ebenso sei durch $P_2' P_2''$ die Normalebene zu dem Linienelement $P_1' P_1''$ der ersten Kurve gelegt. Die beiden Ebenen schneiden sich unter dem Winkel $d\omega_1$ der Nachbartangenten von C_1 in einer Geraden $P_2' Q_2'$ parallel zu der Binormalen von C_1 in P_1. In der ersten Ebene liegt ferner die Parallele $P_2' R_2'$ zur Hauptnormale von C_1 in P_1, in der zweiten Ebene die Parallele $P_2' R_2''$ zur Hauptnormale und die Parallele $P_2' Q_2''$ zur Binormale von C_1 in P_1'. Konstruiert man nun die Einheitskugel um P_2', die alle Geraden in den eben bezeichneten Endpunkten schneiden möge, ferner $P_2 P_2'$ in S_2', $P_2' P_2''$ in S_2'', dann ergeben sich ohne weiteres folgende Beziehungen aus der Figur:

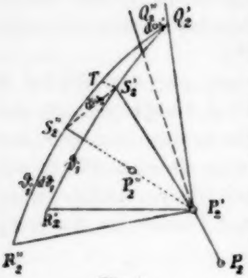


Fig. 1.

$$\sphericalangle\, S_2' Q_2' S_2'' = d\omega_1,$$

$$\operatorname{arc} S_2' Q_2' = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1,$$

$$\operatorname{arc} S_2'' Q_2' = \frac{\pi}{2} + d\omega_1' - (\vartheta_1 + d\vartheta_1),$$

$$\operatorname{arc} S_2' S_2'' = d\omega_2.$$

Fällt man nun von S_2' auf $S_2'' Q_2'$ das Lot $S_2' T$, so ist dieses gleich $d\omega_1 \cos\vartheta$, und das infinitesimale Dreieck $S_1' S_2'' T$ ergibt

$$d\omega_2^2 = d\omega_1^2 \cos^2\vartheta_1 + (d\vartheta_1 - d\omega_1')^2.$$

Setzt man nun noch eine beliebige Beziehung zwischen den Linienelementen ds_1 und ds_2 der beiden Kurven fest, so ergibt sich als charakteristisches Gleichungssystem der Transformation

$$ds_2 = f_2\, ds_1,$$

$$f_2^2 \varkappa_2^2 = \varkappa_1^2 \cos^2\vartheta_1 + \left(\frac{d\vartheta_1}{ds_1} - \tau_1\right)^2.$$

Hierin bedeuten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Krümmungen, τ_1 und τ_2 die Torsionen der beiden Kurven.

Um auch τ_2 in Beziehung zu setzen mit den Bestimmungsstücken von C_1, benutze man die Reziprozität in den Eigenschaften der beiden Kurven. Da in der Tat auch die Tangente von C_2 senkrecht auf der

von C_1 steht, so muß, wenn ϑ_2 ihren Winkel mit der Hauptnormalen von C_1 bedeutet, die Gleichung

$$d\omega_1^2 = d\omega_2^2 \cos^2\vartheta_2 + (d\vartheta_2 - d\omega_2')^2$$

erfüllt sein.

Bildet die Tangente von C_1 mit der Hauptnormalen von C_2 den Winkel ϑ_2, so ist ihr Winkel mit der Binormalen von C_2 gleich dessen Komplement; dann ist aber auch der Winkel der Normalebene von C_1 mit der Schmiegungsebene von C_2 gleich $\frac{\pi}{2} - \vartheta_2$; der Winkel dieser beiden Ebenen ist aber in der Figur mit $TS_2''S_2'$ bezeichnet; daher wird:

$$\sin\vartheta_2 = \frac{d\vartheta_1 - d\omega_1'}{d\omega_2}$$

und dementsprechend

$$\sin\vartheta_1 = \frac{d\vartheta_2 - d\omega_2'}{d\omega_1}.$$

Diese äußerst allgemeine Transformation, in deren Gleichungen die beiden Funktionen f und ϑ keinerlei Beschränkungen unterworfen, also vollkommen willkürlich sind, umfaßt gewisse Spezialfälle von besonderer Wichtigkeit.

Solche Fälle sind die folgenden:

a. *Die Hauptnormalen von C_2 seien den Tangenten von C_1 parallel.*

In diesem Falle wird:

$$\vartheta_2 = 0,$$

also

$$d\vartheta_1 = d\omega_1',$$

sowie

$$d\omega_2 = d\omega_1 \cos\vartheta_1$$

und

$$d\omega_2' = d\omega_1 \sin\vartheta_1.$$

Die geometrische Deutung dieser Transformation, die im dritten Teil der vorliegenden Untersuchung sich als zweckmäßiges Hilfsmittel zur Behandlung spezieller Probleme erweisen wird, ist einfach.

Wenn die Hauptnormale von C_2 der Tangente von C_1 parallel ist, so ist auch die rektifizierende Ebene von C_2 parallel der Normalebene von C_1, d. h. die rektifizierende Kurve von C_2 ist der Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte von C_1 durch parallele Linienelemente zugeordnet.

b. Sollen die *Binormalen von C_2 den Tangenten von C_1 parallel* sein, so sind notwendig die Hauptnormalen der Kurven parallel zueinander, und es liegt wiederum ein Fall vor, der von geringerem Interesse ist und später in aller Kürze erledigt werden soll.

5. *Die Beziehung zweier Kurven durch senkrechte Binormalen* bietet kein selbständiges Interesse, da man durch Übergang zu den Kurven der

Schmiegungskugelmittelpunkte sofort auf die soeben erledigte Transformation durch orthogonale Linienelemente geführt wird.

6. *Die Kurven C_1 und C_2 haben in entsprechenden Punkten senkrechte Hauptnormalen.*

In diesem Falle stehen die rektifizierenden Ebenen aufeinander senkrecht, und in der rektifizierenden Ebene r_1 der Kurve C_1 liegen Parallele zu den Hauptnormalen h_2 der Kurve C_2.

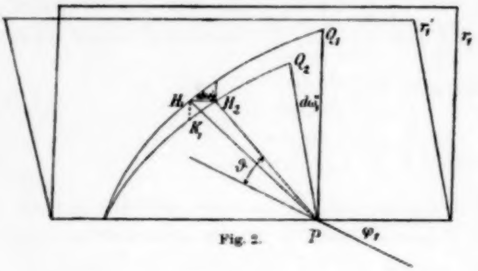


Fig. 2.

Errichtet man auf der Schnittgeraden zweier benachbarten rektifizierenden Ebenen die Lote PQ_1 und PQ_2, so schließen diese den Winkel $d\omega_1''$ der ganzen Krümmung der Kurve C_1 ein. Zwei aufeinanderfolgende Tangenten von C_1 bilden mit der rektifizierenden Geraden denselben Winkel φ_1, der durch die bekannten Gleichungen

$$\sin\varphi_1 = \frac{d\omega_1}{\sqrt{d\omega_1^{\,2} + d\omega_1'^{\,2}}},$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{d\omega_1'}{\sqrt{d\omega_1^{\,2} + d\omega_1'^{\,2}}}$$

gegeben ist.

Die sukzessiven Hauptnormalenrichtungen PH_1 und PH_2 bilden mit den Tangentenrichtungen die Winkel ϑ_1 und $\vartheta_1 + d\vartheta_1$. Konstruiert man wieder um P die Einheitskugel und fällt von H_1 auf Q_2H_2 das Lot H_1K_1, so ist

$$H_1K_1 = d\omega_1'' \sin(\varphi_1 + \vartheta_1),$$

$$K_1H_2 = d\vartheta_1,$$

$$H_1H_2 = d\omega_2',$$

so daß unter Berücksichtigung der Bestimmungsgleichungen von φ_1 sich ergibt:

$$d\omega_2''^{2} = (d\omega_1 \cos\vartheta_1 + d\omega_1' \sin\vartheta_1)^2 + d\vartheta_1^{\,2}.$$

Analog gilt naturgemäß auch die Gleichung

$$d\omega_1''^{2} = (d\omega_2 \cos\vartheta_2 + d\omega_2' \sin\vartheta_2)^2 + d\vartheta_2^{\,2},$$

wobei ϑ_2 den Winkel der Hauptnormale von C_1 mit der Tangente von C_2 bedeutet.

Diese äußerst allgemeine Zuordnung der Kurven C_1 und C_2 wird leichter übersichtlich, wenn man sie durch eine Folge einfacherer schon bekannter Transformationen darstellt.

Sind die Hauptnormalen der Kurven C_1 und C_2 senkrecht zueinander, so sind es auch die rektifizierenden Ebenen, und die Gratlinien C_3 und C_4 der von ihnen umhüllten abwickelbaren Flächen besitzen orthogonale Binormalen. Geht man von den Kurven C_3 und C_4 zu ihren Schmiegungskugelmittelpunktskurven über, so sind diese Linien C_5 und C_6 durch senkrechte Tangenten einander zugeordnet. An Stelle der Kurven der Schmiegungskugelmittelpunkte kann man von C_3 und C_4 auch zu irgend zwei Planevolventen dieser Kurven übergehen, die sich ja aus den ersteren durch eine Transformation mittels paralleler Linienelemente ergeben. Mit anderen Worten:

> Sind zwei Raumkurven C_5 und C_6 durch orthogonale Linienelemente verknüpft, so sind die geodätischen Linien ihrer Polarflächen aufeinander durch senkrechte Hauptnormalen bezogen;

und umgekehrt:

> Besitzen zwei Raumkurven überall in entsprechenden Punkten senkrechte Hauptnormalen, so sind ihre rektifizierenden Flächen Polarflächen von Kurven, die einander durch senkrechte Linienelemente entsprechen.

Durch eine geringe Modifikation dieses Gedankenganges ergibt sich folgende allgemeine Konstruktion einer Kurve C_2, die einer beliebig vorgegebenen Kurve C_1 in der verlangten Art entspricht:

> Der Kurve C_1 ordne man eine Kurve C' so zu, daß deren Tangenten den Hauptnormalen von C_1 parallel sind. Legt man nun durch C' eine beliebige abwickelbare Fläche, so sind deren geodätische Linien C_2 der Kurve C_1 durch orthogonale Hauptnormalen zugeordnet.

Es seien noch in aller Kürze der Vollständigkeit halber diejenigen Transformationen untersucht und auf die schon bekannten Fälle zurückgeführt, bei denen ungleichartige Kanten der Fundamentaltrieder der Kurven C_1 und C_2 einander durch Parallelität oder Orthogonalität zugeordnet sind.

Soll *die Tangente von C_1 der Binormale von C_2 parallel* sein, so hat man C_1 der Rückkehrkante der Polarfläche durch parallele Tangenten zuzuordnen; diese Transformation ist demnach durch die Gleichungen

$$d\omega_1 = d\omega_2',$$
$$d\omega_1' = d\omega_2$$

charakterisiert.

Der Fall, daß die *Tangente von* C_1 *der Hauptnormale von* C_2 *parallel* ist, war schon an früherer Stelle als bemerkenswerter Sonderfall der Transformation durch orthogonale Linienelemente behandelt.

Wenn die *Binormale von* C_1 *der Hauptnormale von* C_2 *parallel* sein soll, so sind die Tangenten ihrer Schmiegungsmittelpunktskurven der Hauptnormalen von C_1 parallel zugeordnet; in den charakteristischen Gleichungen der eben besprochenen Transformation vertauschen dann, ohne daß weitere Änderungen eintreten, $d\omega_1$ und $d\omega_1'$ ihre Rolle.

Soll *die Tangente von* C_1 *zur Binormalen von* C_2 *senkrecht* sein, so ist C_1 der Schmiegungskugelmittelpunktskurve oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Planevolventen von C_2 durch orthogonale Linienelemente zugeordnet.

Sind *die Tangenten von* C_1 *senkrecht zu den Hauptnormalen von* C_2, so ist C_1 der rektifizierenden Kurve von C_2 in der soeben erledigten Weise zugeordnet, d. h. die Tangenten von C_1 sind senkrecht zu den Planevolventen der rektifizierenden Kurve von C_2.

Wenn endlich *die Binormalen von* C_1 *den Hauptnormalen von* C_2 *senkrecht* sein sollen, so ergibt sich durch dieselbe Überlegung wie vorher, daß die Schmiegungskugelmittelpunktskurve von C_1 der Gratlinie der Polarfläche der rektifizierenden Kurve von C_2 durch orthogonale Linienelemente zugeordnet sein muß.

II.

Die Loxodromen.

Als Loxodromen bezeichnet man die Kurven, die die Parallelkreise einer Rotationsfläche unter einem konstanten Winkel schneiden, oder, was dasselbe ist, Kurven, die die Ebenen eines Büschels isogonal durchsetzen.*)

Man kann einer jeden Kurve des Raumes eine Loxodrome durch parallele Tangenten zuordnen, und zwar für jede beliebig vorgeschriebene Richtung des Trägers des Ebenenbüschels und für jeden Wert ε des konstanten Winkels.

Geometrisch läßt sich diese Zuordnung auf folgende Weise realisieren. Für jeden Punkt P der gegebenen Raumkurve C konstruiere man in der Ebene, die zur Richtung des gewählten Trägers t senkrecht steht, diejenige Gerade PQ, die mit der Kurventangente PP_1 den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ bildet. Durch t lege man zu dieser Geraden eine senkrechte Ebene. Entspricht nun die Ebene E dem Punkte P der gegebenen Kurve, die Ebene E_1 dem Nachbarpunkte P_1, so kann man, von einem beliebigen

*) G. Scheffers, Über Loxodromen. Leipz. Ber. 1902, S. 363—370.

Punkte R von E ausgehend, die Parallele zu PP_1 konstruieren, die E_1 in R_1 trifft. Setzt man die eben beschriebene Konstruktion von R_1 aus fort, so erhält man weitere Punkte $R_2, R_3, \cdots$. Der auf diese Weise konstruierte Polygonalzug ergibt beim Übergang zur Grenze eine Loxodrome, die der Kurve P durch parallele Linienelemente zugeordnet ist. Da die Bestimmung der Geraden PQ im allgemeinen zweideutig ist, gibt es stets zwei reelle oder imaginäre Loxodromen, die den Bedingungen genügen und die nur dann zusammenfallen, wenn die Ausgangskurve C mit dem Träger t des Ebenenbüschels überall den Winkel ε bildet. Dann ist C eine allgemeine Schraubenlinie und Geodätische auf einem Zylinder, dessen erzeugende Geraden mit t parallel sind. Die gefundene Loxodrome ist dann nichts anderes als die gewöhnliche Schraubenlinie, die in der Tat auf dem Rotationszylinder als Loxodrome liegt.

Auf diese Weise erhält man leicht alle Loxodromen, die gleichzeitig allgemeine Schraubenlinien sind. Alle derartigen Kurven lassen sich nämlich durch parallele Linienelemente auf die gewöhnlichen Schraubenlinien beziehen. Man erschöpft also diese Kurvenklasse, indem man als Kurve C die gewöhnliche Schraubenlinie wählt und sodann der Geraden t alle möglichen Lagen, dem Winkel ε alle nur möglichen Werte zuschreibt.

Um den durchgeführten Gedankengang in eine analytische Form zu setzen, bezeichne man von der gegebenen Kurve die Richtungskosinus der Tangente mit a, b, c, die der Binormale mit a', b', c' und die der Hauptnormale mit a'', b'', c''.

Die feste Gerade t, die als Träger des von der Loxodrome isogonal zu durchsetzenden Ebenenbüschels gewählt ist, sei durch die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= p + \alpha u, \\ y &= q + \beta u, \\ z &= r + \gamma u \end{aligned}$$

gegeben, in denen $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ willkürlich gewählte Konstanten bedeuten, die nur durch die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

eingeschränkt sein mögen. Eine Ebene durch die Gerade t ist durch die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= p + \alpha u + \alpha_1 u, \\ y &= q + \beta u + \beta_1 u, \\ z &= r + \gamma u + \gamma_1 u \end{aligned}$$

bestimmt. Bedeuten hierin $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ nicht Konstanten, sondern Funktionen eines Parameters, so stellen die Gleichungen (2) den Ebenenbüschel

$$\begin{vmatrix} x-p, & \alpha, & \alpha_1 \\ y-q, & \beta, & \beta_1 \\ z-r, & \gamma, & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0$$

dar, dessen Achse die Gerade t ist.

In jeder der Ebenen, die konstanten Werten von α_1, β_1, γ_1 entsprechen, bilden die Geraden u = konst. und v = konst. ein Koordinatensystem, das man, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, als rechtwinklig voraussetzen kann. Ist dies der Fall, so tritt zu der Bedingung

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \tag{3}$$

die diese Größen als Richtungskosinus einer Geraden zu erfüllen haben, noch die Gleichung

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0, \tag{4}$$

während die vorgeschriebene Bedingung, daß die Richtung (a, b, c) mit den Ebenen des Büschels den Winkel ε bildet, die Form annimmt:

$$\sin\varepsilon = \begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha_1 \\ b & \beta & \beta_1 \\ c & \gamma & \gamma_1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Führt man die elementare Rechnung aus, die aus den Gleichungen (3), (4), (5) α_1, β_1, γ_1 als Funktionen der gegebenen Richtungskosinus a, b, c bestimmt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{1-\lambda^2}\left[(b\gamma - c\beta)\sin\varepsilon + (a - \alpha\lambda)\sqrt{\cos^2\varepsilon - \lambda^2}\right], \\ \beta_1 &= \frac{1}{1-\lambda^2}\left[(c\alpha - a\gamma)\sin\varepsilon + (b - \beta\lambda)\sqrt{\cos^2\varepsilon - \lambda^2}\right], \\ \gamma_1 &= \frac{1}{1-\lambda^2}\left[(a\beta - b\alpha)\sin\varepsilon + (c - \gamma\lambda)\sqrt{\cos^2\varepsilon - \lambda^2}\right]. \end{aligned} \tag{A}$$

Dabei kann die Quadratwurzel positiv oder negativ sein. Die Größen

$$\begin{aligned} \lambda &= a\alpha + b\beta + c\gamma, \\ \lambda' &= a'\alpha + b'\beta + c'\gamma, \\ \lambda'' &= a''\alpha + b''\beta + c''\gamma \end{aligned}$$

bedeuten die Kosinus der Winkel, die die feste Gerade mit der Tangente, Binormale und Hauptnormale der Kurve bildet.

Die Gleichungen (2) werden die gesuchte Loxodrome darstellen, wenn man u und v so bestimmt, daß die Richtung der Tangenten der Kurve mit der Richtung a, b, c zusammenfällt.

Die Bedingungen hierfür, nämlich:

$$a\,ds - \alpha\,du - \alpha_1\,dv = v\,d\alpha_1,$$
$$b\,ds - \beta\,du - \beta_1\,dv = v\,d\beta_1,$$
$$c\,ds - \gamma\,du - \gamma_1\,dv = v\,d\gamma_1$$

werden nach einigen Reduktionen der auflösenden Determinanten durch die Ausdrücke

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} \sin\varepsilon\,\frac{dv}{v} &= -\frac{d\omega}{1-\lambda^2}\left(\lambda\lambda''\sin\varepsilon + \lambda'\sqrt{\cos^2\varepsilon - \lambda^2}\right),\\ \sin\varepsilon\,\frac{du}{v} &= -\frac{\lambda\,d\omega}{1-\lambda^2}\left(\lambda' + \frac{\lambda\lambda''\sin\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\varepsilon - \lambda^2}}\right),\\ \sin\varepsilon\,\frac{ds}{v} &= -\frac{d\omega}{1-\lambda^2}\left(\lambda' + \frac{\lambda\lambda''\sin\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\varepsilon - \lambda^2}}\right)\end{aligned}$$

erfüllt. In diesen Gleichungen bedeutet

$$d\omega = \frac{da}{a''} = \frac{db}{b''} = \frac{dc}{c''} = \frac{d\lambda}{\lambda''}$$

den Kontingenzwinkel, u die Länge der Büschelachse von einem beliebigen Anfangspunkt gemessen, v den Abstand des Punktes (x, y, z) von der festen Achse.

Um die endlichen Gleichungen der Loxodrome zu erhalten, hat man zunächst die erste Gleichung (I) zur Bestimmung von v zu integrieren und sodann, nachdem der gefundene Wert von v in die zweite Gleichung eingesetzt ist, aus diesen u durch Quadratur zu ermitteln.

Die Bestimmung der endlichen Gleichungen der Loxodromen, die einer gegebenen Kurve durch parallele Tangenten zugeordnet werden können, erfordert zwei Quadraturen.

Von den natürlichen Gleichungen der Kurven ergibt sich die eine nach Bestimmung von v durch bloße Elimination aus den Gleichungen

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \frac{d\omega}{d\omega'} = \frac{da}{da'}$$

und

$$\sin\varepsilon\,\frac{1}{\varkappa} = \frac{v}{1-\lambda^2}\left(\lambda' + \frac{\lambda\lambda''\sin\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\varepsilon - \lambda^2}}\right),$$

während die zweite noch die Integration der dritten Gleichung (I) erfordert. Die natürlichen Gleichungen der Loxodromen mit vorgeschriebener Indikatrix der Tangenten werden also, unabhängig von ihren endlichen Geichungen, ebenfalls durch zwei Quadraturen gefunden.

Zwischen du, dv und ds bestehen, wie sich aus den Formeln ablesen läßt, wie aber auch einfache geometrische Anschauung zeigt, leicht angebbare Relationen. Sind nämlich LOP_1 und LOQ_2 zwei benachbarte Ebenen des Büschels, $P_1P_2 = ds$ das Bogenelement der Loxodrome, so sind die Lote OP_1 und OQ_2 auf LO gleich v und $v + dv$, das Lot P_2Q_2

auf OQ_2 gleich du und der Kosinus des Winkels $P_1P_2Q_2 = \psi$ gleich λ. Fällt man nun von P_1 auf Q_2O das Lot P_1R_2, so ist $Q_2R_2 = dv$ und der Winkel $R_2P_2P_1$ gleich ε. Aus dem Dreieck $P_1Q_2P_2$ folgt dann unmittelbar

$$\frac{du}{ds} = \lambda \tag{6}$$

und aus dem Dreieck $R_2P_2Q_2$:

$$dv^2 = R_2P_2^2 - du^2$$
$$= ds^2\cos^2\varepsilon - ds^2\lambda^2,$$

so daß

$$\frac{dv}{ds} = \sqrt{\cos^2\varepsilon - \lambda^2} \tag{7}$$

wird.

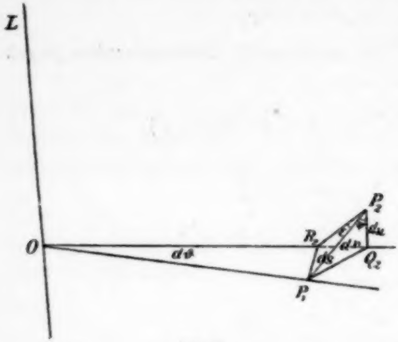


Fig. 3.

Bezeichnet man den Winkel P_1OQ_2 zweier benachbarter Ebenen des Büschels mit $d\vartheta$, so ergibt sich analytisch

$$d\vartheta^2 = d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2$$
$$= \frac{d\omega^2}{(1-\lambda^2)^2}\left(\lambda' + \frac{\lambda\lambda''\sin\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\varepsilon - \lambda^2}}\right)^2,$$

was mit der geometrisch evidenten Gleichung

$$v\,d\vartheta = ds\sin\varepsilon$$

identisch ist. Diese Gleichung, mit (6) und (7) zusammen, vermittelt den Übergang von dem hier eingeschlagenen Gange der Untersuchung zu der üblichen Darstellung, bei welcher, wie auch hier, unmittelbar die allgemeine Beziehung zwischen u, v und ϑ gewonnen wird:

$$v^2\,d\vartheta^2 = \operatorname{tg}^2\varepsilon\,(du^2 + dv^2). \tag{II}$$

Will man alle *Loxodromen* finden, *die gleichzeitig Schraubenlinien sind*, so hat man in das System der Formeln (I) für a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' die Richtungskosinus der Tangenten, Binormalen und Hauptnormalen der gewöhnlichen Schraubenlinie

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = mt$$

einzuführen, also

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(-\alpha\sin t + \beta\cos t + \gamma m),$$

$$\lambda' = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\left(-\alpha\sin t + \beta\cos t + \frac{\gamma}{m}\right),$$

$$\lambda'' = -\alpha \cos t - \beta \sin t,$$

$$d\omega = \frac{dt}{\sqrt{1+m^2}}$$

zu setzen.

Hieraus ergibt sich:

$$\sin \varepsilon \lg v = \sin \varepsilon \lg \sqrt{1-\lambda^2} - \int \frac{m\,dt\left(-\alpha \sin t + \beta \cos t - \frac{\gamma}{m}\right)\sqrt{R}}{(1+m^2) - (-\alpha \sin t + \beta \cos t + \gamma m)^2}$$

und

$$u = \int \frac{-\alpha \sin t + \beta \cos t + \gamma m}{\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{R}}\,dv,$$

Gleichungen, in denen zur Abkürzung

$$R = \cos^2 \varepsilon - \frac{1}{1+m^2}(\alpha \sin t - \beta \cos t - \gamma m)^2$$

gesetzt worden ist.

Die Formeln werden in ihrer Allgemeinheit nicht eingeschränkt, wenn man $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ voraussetzt; diese Annahme würde nur eine Drehung des Koordinatensystems bedingen.

Ist dagegen $\alpha = \beta = 0$, so reduziert sich der Integrand der in dem Ausdruck für $\log v$ auftretenden Quadratur auf eine Konstante, und es resultiert in diesem Falle, in dem die Zylinderachse parallel der Büschelachse ist, wie es sein muß, als loxodromische Linie die zylindro-konische Schraubenlinie.

Kreuzen sich Schraubenlinienachse und Loxodromenachse rechtwinklig so ist $\gamma = 0$. Dabei drückt sich $\log v$ mittels elementarer Funktionen durch t aus, während im allgemeineren Falle das auftretende Integral ein elliptisches ist:

Das Problem der loxodromischen Schraubenlinien löst sich durch elliptische Integrale und ihre Ausartungen.

Die *endlichen Gleichungen aller Loxodromen* können, wie Herr Scheffers*) nachgewiesen hat, durch ausführbare Operationen bestimmt werden. Ihre explizite Aufstellung schließt sich leicht an die Gleichung (2) an, die aus der Gleichung der Minimallinien

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

durch die Transformation

$$(8)\qquad \begin{aligned} x &= v \cos(i\vartheta \operatorname{tg} \varepsilon),\\ y &= v \sin(i\vartheta \operatorname{tg} \varepsilon),\\ z &= u \end{aligned}$$

hervorgeht.

*) G. Scheffers, Über Loxodromen. Leipz. Ber. 1902, S. 363—370.

Nun kennt man die endlichen Gleichungen der Minimallinien:

$$
\begin{aligned}
x &= T' \cos t - T'' \sin t,\\
y &= T' \sin t + T'' \cos t, \qquad (9)\\
z &= i(T + T''),
\end{aligned}
$$

Gleichungen, in denen T eine willkürliche Funktion des Parameters t bedeutet. Aus den Gleichungen (8) und (9) ergeben sich die Bestimmungsgrößen u, v, ϑ der allgemeinen Loxodrome unmittelbar in endlicher Form. Die Annahme $\alpha = \beta = 0$ schränkt die Allgemeinheit der Kurve nicht ein, da sie eine einfache Drehung des Koordinatensystems bedeutet. Die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x &= v\alpha_1 = v \cos\vartheta,\\
y &= v\beta_1 = v \sin\vartheta,\\
z &= u,
\end{aligned}
$$

in denen u, v, ϑ in der angegebenen Weise aus (8) und (9) entnommen werden, stellen somit die allgemeine Loxodrome dar, deren Achse die z-Achse ist.*)

Für *Loxodromen konstanter Krümmung* muß

$$\varkappa = \frac{d\omega}{ds} = \frac{\sin\varepsilon}{vC} = \frac{\sin\varepsilon}{p}$$

konstant sein, also

$$v = \frac{p}{C},$$

wobei p eine Konstante bedeutet und zur Abkürzung

$$C = -\frac{1}{1-c^2}\left(c' + \frac{cc''\sin\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\varepsilon - c^2}}\right)$$

gesetzt ist.

Das Problem führt also auf das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
\sin\varepsilon\, dv &= p\,\frac{dc}{c''}\sqrt{\cos^2\varepsilon - c^2},\\
\frac{p}{v} &= -\frac{1}{1-c^2}\left(c' + \frac{cc''\sin\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\varepsilon - c^2}}\right),\\
1 &= c^2 + c'^2 + c''^2,
\end{aligned}
$$

*) Vgl. E. Salkowski, Schraubenlinien und Loxodromen. Sitzungsber. Math. Gesellsch. Berlin 7, S. 83—87, 1908.

woraus sich eine Differentialgleichung 1. Ordnung für c als Funktion von v ergibt. Sieht man diese als gelöst an, so findet man u durch eine Quadratur.

Das Problem der Loxodromen konstanter Krümmung erfordert die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung und die Ausführung einer Quadratur.

Damit *eine Kurve auf doppelte Weise als Loxodrome* aufgefaßt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß das Gleichungssystem (I) (S. 529), das die Loxodrome als Kurve im Ebenenbüschel definierte, für zwei verschiedene Büschel erfüllt sei, daß also gleichzeitig die Gleichungen

$$\sin \varepsilon_1 \frac{d v_1}{v_1} = d\omega\, L_1 \sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 - \lambda_1^2},$$

$$\sin \varepsilon_1 \frac{d u_1}{v_1} = d\omega\, L_1 \lambda_1,$$

$$\sin \varepsilon_1 \frac{d s}{v_1} = d\omega\, L_1,$$

sowie

$$\sin \varepsilon_2 \frac{d v_2}{v_2} = d\omega\, L_2 \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 - \lambda_2^2},$$

$$\sin \varepsilon_2 \frac{d u_2}{v_2} = d\omega\, L_2 \lambda_2,$$

$$\sin \varepsilon_2 \frac{d s}{v_2} = d\omega\, L_2$$

erfüllt sind. Hierin ist

$$L_1 = -\frac{1}{1-\lambda_1^2}\left(\lambda_1' + \frac{\lambda_1 \lambda_1'' \sin \varepsilon_1}{\sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 - \lambda_1^2}}\right)$$

und entsprechend

$$L_2 = -\frac{1}{1-\lambda_2^2}\left(\lambda_2' + \frac{\lambda_2 \lambda_2'' \sin \varepsilon_2}{\sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 - \lambda_2^2}}\right)$$

gesetzt. Diese Gleichungen sind dann und nur dann miteinander verträglich, wenn

$$\frac{L_1 v_1}{\sin \varepsilon_1} = \frac{L_2 v_2}{\sin \varepsilon_2},$$

da auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Größe, der Krümmungsradius der Kurve, steht.

Durch logarithmische Ableitung beider Seiten der Gleichung und Elimination von v_1 und v_2 ergibt sich als Differentialgleichung des Problems

$$\frac{d L_1}{L_1} + L_1 \frac{d\omega \sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 - \lambda_1^2}}{\sin \varepsilon_1} = \frac{d L_2}{L_2} + L_2 \frac{d\omega \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 - \lambda_2^2}}{\sin \varepsilon_2}.$$

Dazu treten die folgenden Relationen zwischen $\lambda_1, \lambda_1', \lambda_1''$ und $\lambda_2, \lambda_2', \lambda_2''$:

$$\lambda_1^2 + \lambda_1'^2 + \lambda_1''^2 = 1,$$
$$\lambda_2^2 + \lambda_2'^2 + \lambda_2''^2 = 1,$$
$$\frac{d\lambda_1}{\lambda_1''} = \frac{d\lambda_2}{\lambda_2''} = d\omega,$$
$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1'\lambda_2' + \lambda_1''\lambda_2'' = l,$$

wobei l den Kosinus des konstanten Winkels, den die beiden Büschelachsen miteinander bilden, bezeichnet.

Benutzt man die drei endlichen Gleichungen zwischen den sechs Größen zur Elimination von drei von ihnen, so bleibt ein System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung stehen:

> Die Bestimmung der Doppelloxodromen, d. h. derjenigen Kurven, die zwei verschiedenen Rotationsflächen als loxodromische Linien angehören können, erfordert die Lösung eines Systems von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

III.

Algebraische Raumkurven konstanter Krümmung.

Die Zuordnung zweier Raumkurven durch parallele Linienelemente ist besonders nützlich in der Theorie der allgemeinen Schraubenlinien, die sich nur aufeinander in der angegebenen Weise beziehen lassen. Für andere Zwecke erweisen sich von den im ersten Teil untersuchten Transformationen andere, allgemeinere von größerem Nutzen.

Insbesondere soll von uns jetzt die Zuordnung zweier Raumkurven durch orthogonale Linienelemente zur Untersuchung einer gewissen Klasse von Raumkurven konstanter Krümmung herangezogen werden. Unter den Kurven dieser Klasse, die alle auf Rotationsflächen zweiter Ordnung gelegen sind, gibt es unendlich viele algebraische. Dies Ergebnis erscheint deswegen bemerkenswert, weil es bisher noch nicht gelungen ist, trotz der einfachen geometrischen Erzeugungsweise der Kurven konstanter Krümmung durch eine Verbiegung der Ebene eines Kreises, bei der seine Tangenten geradlinig bleiben, algebraische Kurven dieser Art aufzufinden. Daß die von Herrn Chassiotis*) neuerdings gefundenen Kurven konstanter Krümmung nicht, wie er behauptet, algebraisch sind, ergibt eine Betrachtung seiner Lösungsformeln:

---

*) S. Chassiotis, Notes sur les courbes gauches. Nouvelles Annales, 4. sér., 5, S. 394—399, 1905.

$$x = \quad a\int \sin u \cos u \sqrt{1+\cos^2 u}\, du,$$
$$y = -a\int \cos^2 u \sqrt{1+\cos^2 u}\, du,$$
$$z = \quad a\int \sin u \sqrt{1+\cos^2 u}\, du$$

ohne weiteres, da man erkennt, daß nur die erste der Quadraturen durch eine algebraische Funktion von $\cos u$ gelöst wird, während das zweite Integral elliptisch, das dritte logarithmisch ist.

Eine Kurve $(P) \equiv (x, y, z)$ habe als Richtungskosinus der Tangenten (a, b, c), der Binormalen (a', b', c') und der Hauptnormalen (a'', b'', c''); ihr Linienelement sei ds, ihre Krümmung $\varkappa$ und ihre Torsion τ. Besitzt nun die Kurve $(P_1) \equiv (x_1, y_1, z_1)$ in entsprechenden Punkten mit (P) orthogonale Linienelemente, so muß

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

oder

$$a_1 = a' \sin\vartheta + a'' \cos\vartheta,$$
(1) $$b_1 = b' \sin\vartheta + b'' \cos\vartheta,$$
$$c_1 = c' \sin\vartheta + c'' \cos\vartheta$$

sein. In diesen und allen folgenden Formeln haben die Größen mit dem Index 1 für (P_1) dieselbe Bedeutung wie die Größen ohne Index für die Kurve (P). Der Winkel ϑ zwischen der Tangente von (P_1) und der Hauptnormale von (P) ist keiner Beschränkung unterworfen.

Setzt man nun zwischen den Bogenelementen ds_1 und ds eine Beziehung

(2) $$ds_1 = f(s)\, ds$$

willkürlich fest, so erhält man mittels der Frenetschen Gleichungen durch elementare Rechnung

(3) $$f(s)\,\varkappa_1 = \sqrt{\varkappa^2 \cos^2\vartheta + \left(\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 - \tau\right)^2}.$$

Da $\varkappa_1 > 0$ ist, so muß der Wurzel dasselbe Vorzeichen beigelegt werden, das $f(s)$ besitzt, also das positive, sobald es sich um reelle Kurven handelt. Ferner ist:

(4) $$f(s)\,\tau_1 = -\frac{\varkappa \sin\vartheta \dfrac{d\vartheta}{ds}\left(\dfrac{d\vartheta}{ds} - \tau\right) + \varkappa^2 \cos\vartheta \dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{1}{\varkappa}\left(\dfrac{d\vartheta}{ds} - \tau\right)\right]}{\varkappa^2 \cos^2\vartheta + \left(\dfrac{d\vartheta}{ds} - \tau\right)^2} - \varkappa \sin\vartheta.$$

Diese Gleichungen sind nur der Form nach verschieden von den die Transformation charakterisierenden Formeln, wie sie vorher (S. 522) geometrisch hergeleitet sind, und aus denen sie sich durch leichte Umrechnung ergeben. Sie finden sich zuerst in einer neueren Arbeit des Herrn G. Sannia*), der sie mit Hilfe der Methoden der natürlichen Geometrie herleitet.

Aus den Gleichungen (1) ergibt sich jede zu (P) durch Orthogonalität der Elemente zuzuordnende Kurve (P_1) durch Quadraturen:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= \int f(s)\,(a'\sin\vartheta + a''\cos\vartheta)\,ds,\\
y_1 &= \int f(s)\,(b'\sin\vartheta + b''\cos\vartheta)\,ds,\\
z_1 &= \int f(s)\,(c'\sin\vartheta + c''\cos\vartheta)\,ds.
\end{aligned}
$$

In diesen Formeln sind f und ϑ völlig willkürliche Funktionen von s. Ist die Kurve (P) gegeben, so kann man

$$\varkappa_1 = \varkappa_1(s_1), \qquad \tau_1 = \tau_1(s_1)$$

willkürlich annehmen. Eliminiert man nämlich aus den Gleichungen (2), (3), (4) die Funktion $f(s)$, so erhält man ein System von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung für s_1 und ϑ.

Man kann zwei beliebige Kurven (P) und (P_1) stets in eine solche Lage zueinander bringen, daß sie sich durch Orthogonalität der Elemente zugeordnet sind.

Eine Ausnahme bilden nur die geraden Linien $\varkappa = 0$, denen sich offenbar keine anderen als ebene Kurven zuordnen lassen, ein Ergebnis, das aus (3) und (4) unmittelbar hervorgeht.

Im Prinzip könnte man diese Transformation dazu benutzen, um die endlichen Gleichungen einer durch ihre natürlichen Gleichungen gegebenen Kurve $(\varkappa_1, \tau_1, s_1)$ zu bestimmen. Indessen würde die wirkliche Ausführung einen der Einfachheit des Problems, das durch eine Riccatische Differentialgleichung und Quadraturen gelöst wird, nicht entsprechenden analytischen Apparat erfordern.

Die Kurven konstanter Krümmung $\varkappa_1 = 1$ werden erhalten, wenn man in die Gleichungen (5)

$$f = \sqrt{\varkappa^2\cos^2\vartheta + \left(\frac{d\vartheta}{ds} - \tau\right)^2}$$

einführt, sie ergeben sich demnach durch die Quadraturen

*) G. Sannia, Deformazioni infinitesime delle curve inestendibili e corrispondenza per ortogonalità di elementi. Rend. Circ. Mat. Palermo **21**, S. 236, 1906.

$$x_1 = \int (a' \sin\vartheta + a'' \cos\vartheta) \sqrt{\varkappa^2 \cos^2\vartheta + \left(\frac{d\vartheta}{ds} - \tau\right)^2}\, ds,$$

$$y_1 = \int (b' \sin\vartheta + b'' \cos\vartheta) \sqrt{\varkappa^2 \cos^2\vartheta + \left(\frac{d\vartheta}{ds} - \tau\right)^2}\, ds,$$

$$z_1 = \int (c' \sin\vartheta + c'' \cos\vartheta) \sqrt{\varkappa^2 \cos^2\vartheta + \left(\frac{d\vartheta}{ds} - \tau\right)^2}\, ds.$$

Diese Formeln, die jede Kurve konstanter Krümmung 1 auf unendlich viele Weisen darstellen, da neben den Bestimmungsgrößen der Kurve (P) auch noch ϑ als willkürliche Funktion von s auftritt, würden vor den zahlreichen möglichen anderen Formeln, die ebenfalls die Kurven konstanter Krümmung liefern, keinen Vorzug verdienen, wenn sie nicht gestatteten, durch passende Wahl der zuordnenden Kurve und der Transformation spezielle Kurven zu gewinnen, deren Eigenschaften geometrisches Interesse besitzen.

Die Formeln werden besonders einfach, wenn

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \tau$$

gewählt wird, dann ist nämlich:

$$(6) \qquad \begin{aligned} f\varkappa_1 &= \varkappa \cos\vartheta, \\ f\tau_1 &= -\varkappa \sin\vartheta, \end{aligned}$$

und es folgt aus den Gleichungen (1), daß

$$a_1'' = -a, \quad b_1'' = -b, \quad c_1'' = -c$$

ist. Die gewählte Beziehung ordnet also *die Tangenten der Kurve* (P) *den Hauptnormalen der Kurve* (P_1) *parallel* zu, und es ist daher nach den früher erhaltenen Ergebnissen die Polarfläche von (P) der rektifizierenden Fläche von (P_1) durch parallele erzeugende Geraden zugeordnet.

Als Kurve (P) wähle man die gemeine Schraubenlinie

$$x = \cos v, \quad y = \sin v, \quad z = mv,$$

dann ist die Linie (P_1) die allgemeine Geodätische auf der Tangentialfläche einer allgemeinen Schraubenlinie. Hier wird

$$\vartheta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\, v = nv.$$

Sucht man diejenigen Geodätischen, bei denen zwischen $\varkappa_1$ und τ_1 eine beliebig vorgeschriebene Relation besteht, so erhält man aus (6) f als Funktion von ϑ und damit die endlichen Gleichungen der gesuchten Kurven durch Quadraturen. Handelt es sich insbesondere um die Kurven konstanter Krümmung $\varkappa_1 = 1$, so wird

$$f = \frac{\cos nv}{1+m^2},$$

und man erhält, wenn man den Index an der Koordinatenbezeichnung von jetzt ab dauernd fortläßt:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \int (n \sin v \sin nv + \cos v \cos nv) \cos nv \, dv,$$
$$y = +\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \int (n \cos v \sin nv - \sin v \cos nv) \cos nv \, dv,$$
$$z = -\frac{1}{1+m^2} \int \sin nv \cos nv \, dv,$$

und nach Ausführung der Quadraturen:

$$\text{(A)} \quad \begin{aligned} x &= -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin(1+2n)\, v + \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin(1-2n)\, v + \frac{1}{2} \sin v\right), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{1-n}{4(1+2n)} \cos(1+2n)\, v + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos(1-2n)\, v + \frac{1}{2} \cos v\right), \\ z &= \frac{1}{4m\sqrt{1+m^2}} \cos 2nv. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten lassen erkennen, daß zwischen den Koordinaten immer dann algebraische Gleichungen bestehen, wenn n eine rationale Zahl ist. In diesem Falle erhält man also stets *algebraische Kurven mit konstanter Krümmung*. Alle durch die Gleichungen (A) dargestellten Kurven liegen auf Rotationsflächen zweiten Grades mit vertikaler Umdrehungsachse

$$A(x^2+y^2) = B + C(z+D)^2,$$

wobei A, B, C, D nur von der Steigung der Schraubenlinie abhängen:

$$A = (1+m^2),$$
$$B = \frac{27n^4}{4(1-n^2)(1-4n^2)^2},$$
$$C = \frac{4n^2}{(1-4n^2)(1-n^2)}, \qquad D = \frac{1}{4n}(1+2n^2).$$

Fassen wir alle Ergebnisse zusammen:

> Die geodätischen Linien auf der Tangentenfläche der allgemeinen Schraubenlinie lassen sich durch Quadraturen finden, die Kurven konstanter Krümmung unter ihnen explizite darstellen. Diese sind stets die Schnittkurven der Tangentenfläche mit Rotationsflächen zweiten Grades; sie sind daher algebraisch, wenn die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche, auf der sie liegen, algebraisch ist.

Offenbar gibt es nicht auf *jeder* Schraubenlinientangentenfläche geodätische Linien, die konstante Krümmung besitzen. Die Schrauben-

linien, auf deren Tangentenfläche derartige Linien existieren, wird man erhalten, wenn man zur Kurve (x, y, z), die durch das Gleichungssystem (A) gegeben ist, die Rückkehrkante (ξ, η, ζ) der rektifizierenden Fläche bestimmt. Wendet man die allgemeinen Formeln*)

$$\xi = x + \varkappa \frac{\varkappa a' - \tau a}{\varkappa \tau' - \tau \varkappa'},$$

$$\eta = y + \varkappa \frac{\varkappa b' - \tau b}{\varkappa \tau' - \tau \varkappa'},$$

$$\zeta = z + \varkappa \frac{\varkappa c' - \tau c}{\varkappa \tau' - \tau \varkappa'}$$

auf unser Beispiel an, so ergibt sich, da die Krümmung

$$\varkappa = 1,$$

die Torsion

$$\tau = -\operatorname{tg} nv,$$

und das Bogenelement

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cos nv\, dv$$

ist:

$$\xi = x + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \sin v \cos^2 nv,$$

$$\eta = y + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cos v \cos^2 nv,$$

$$\zeta = z + \frac{1}{m\sqrt{1+n^2}} \cos^2 nv,$$

oder:

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{3n}{4\sqrt{1+m^2}} \left\{ \frac{\sin(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\sin(1-2n)v}{1-2n} \right\}, \\ \eta &= \frac{-3n}{4\sqrt{1+m^2}} \left\{ \frac{\cos(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\cos(1-2n)v}{1-2n} \right\}, \\ \zeta &= \frac{3}{4m\sqrt{1+m^2}} \cos 2nv + \frac{1}{2m\sqrt{1+m^2}}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren, daß auch die Schraubenlinie, auf deren Tangentenfläche die zu untersuchende Kurve konstanter Krümmung liegt, einer Rotationsfläche zweiter Ordnung mit der z-Achse als Drehachse angehört. Es wird nämlich

$$A'(\xi^2 + \eta^2) = B' + C'(\zeta + D')^2,$$

wobei

*) Vgl. etwa G. Scheffers, Einleitung in die Theorie der Kurven. 1901. S. 354—355.

$$A' = \frac{16}{9}\,\frac{1+m^2}{n^2},$$

$$B' = \frac{4}{(1-4n^2)^2},$$

$$C' = -\frac{64}{9}\,\frac{m^2(1+m^2)}{1-4n^2},$$

$$D' = -\frac{1}{2m\sqrt{1+m^2}} = -\frac{1-n^2}{2n}$$

gesetzt ist.

Vergleichen wir dies Ergebnis mit dem früheren, so erkennt man, daß A, A', B, B' stets positiv sind, daß dagegen C und C' immer entgegengesetzte Vorzeichen haben; liegt also, was für

$$n < \frac{1}{2}$$

eintritt, die Schraubenlinie auf einem Rotationsellipsoid, so gehört die Kurve (A) einem Rotationshyperboloid an. Für

$$n > \frac{1}{2}$$

dagegen liegt die Schraubenlinie auf einem Hyperboloid, ihre Geodätische konstanter Krümmung auf einem Ellipsoid.

Aus den Gleichungen (B) bestimmen sich die Elemente der Schraubenlinie, und so ergibt ihr Bogendifferential

$$ds = \frac{\pm 3}{\sqrt{1+m^2}} \cos nv \sin nv \, dv,$$

so daß die Bogenlänge

$$\sigma = \pm \frac{3}{4m} \cos 2nv$$

wird, während ihr Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{3}{2m} \sin 2nv$$

ist. Da außerdem die Tangente der Kurve der Binormalen der Schraubenlinie auf dem Kreiszylinder, von der die Untersuchung ausging, parallel ist, so wird das konstante Verhältnis von Krümmung und Torsion unserer Kurve gleich m. Ihre natürlichen Gleichungen lauten demgemäß:

$$\frac{\varkappa}{\tau} = m$$

und

$$\frac{16m^2}{9}\sigma^2 + \frac{4m^2}{9}\varrho^2 = 1$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Die Schraubenlinien, deren natürliche Gleichungen

$$\frac{\varkappa}{\tau} = m, \quad 4\sigma^2 + \varrho^2 = \left(\frac{3}{2m}\right)^2$$

sind, gehören Rotationsflächen zweiter Ordnung an, und zwar liegen sie auf einem Rotationsellipsoid, wenn

$$n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} < \frac{1}{2}$$

ist; auf einem einschaligen Rotationshyperboloid, wenn

$$1 > n > \frac{1}{2}$$

ist. Auf der Fläche ihrer Tangenten liegt eine geodätische Linie konstanter Krümmung, die gleichfalls einer Rotationsfläche zweiter Ordnung mit derselben Umdrehungsachse angehört. Beide Kurven, die Schraubenlinie wie die Geodätische konstanter Krümmung, sind algebraisch, wenn n eine rationale Zahl ist.

Aus den natürlichen Gleichungen der Schraubenlinie ergibt sich, daß man sie erhält, wenn man die Astroide

$$\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}}$$

oder:

$$\xi = \frac{1}{m}\cos^3\varphi, \quad \eta = \frac{1}{m}\sin^3\varphi$$

unter Erhaltung ihrer Krümmung so tordiert, daß sie in eine Schraubenlinie mit dem Krümmungsverhältnis m übergeht; oder anders ausgesprochen, so, daß sie mit der ξ-Achse einen konstanten Winkel bildet, dessen Tangente m ist. Beachtet man, daß der Winkel φ für die ebene Kurve dieselbe Bedeutung hat, wie der Winkel nv für die tordierte Kurve, daß ferner das Stück der Tangente der Astroide von der Kurve bis zur ξ-Achse die Länge

$$e = \frac{1}{m}\cos^2\varphi$$

besitzt, eine Länge, die gleich der Entfernung eines Punktes (x, y, z) der Kurve (A) von dem entsprechenden Punkte (ξ, η, ζ) der Kurve (B) ist, so erkennt man, daß die Kurve konstanter Krümmung bei der Torsion der Astroide aus der ξ-Achse hervorgegangen ist. Dabei ist wohl zu beachten, daß die ξ-Achse der ebenen Figur in doppelter Weise aufgefaßt werden muß: einmal als Tangente der Astroide in einer Spitze, dann als kürzeste Verbindungslinie zweier Spitzen, Linien, die nach der Torsion im Raume eine ganz verschiedene Bedeutung erlangen; erstere ist auch auf der Tangentenfläche geradlinig, letztere ist die geodätische Linie konstanter Krümmung, die uns beschäftigt.

Um die Gestalt der Schraubenlinie (B) und der mit ihr verbundenen Kurve (A) genauer kennen zu lernen, sei zunächst der Zylinder betrachtet, auf dem die Schraubenlinie Geodätische ist. Seine Leitkurve in der xy-Ebene hat die Gleichungen:

$$\xi_0 = p\left(\frac{\sin\alpha v}{\alpha} - \frac{\sin\beta v}{\beta}\right),$$

$$\eta_0 = -p\left(\frac{\cos\alpha v}{\alpha} - \frac{\cos\beta v}{\beta}\right),$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{3n}{4\sqrt{1+m^2}} = p,$$

$$1 + 2n = \alpha,$$

$$1 - 2n = \beta$$

gesetzt ist. Das Linienelement der Kurve ist durch die Gleichung:

$$d\sigma_0 = 2p \sin\frac{\alpha-\beta}{2} v\, dv,$$

ihr Krümmungradius ϱ_0 durch die Formel:

$$\varrho_0 = \frac{4p}{\alpha+\beta} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} v$$

bestimmt, so daß die natürliche Gleichung der Kurve

$$(\alpha-\beta)^2\sigma_0^2 + (\alpha+\beta)^2\varrho_0^2 = 16p^2,$$

oder unter Berücksichtigung der Bedeutung von α und β,

$$4n^2\sigma_0^2 + \varrho_0^2 = 4p^2$$

lautet. Die Kurve ist demnach*) eine Epizykloide, wenn $n < \frac{1}{2}$, eine Hypozykloide, wenn $n > \frac{1}{2}$. Der feste Kreis hat den Radius

$$R_0 = \frac{4np}{1-4n^2},$$

der rollende Kreis den Radius

$$r_0 = \frac{p}{1+2n},$$

so daß der Modul der Kurve

$$\frac{r_0}{R_0} = \frac{1-2n}{4n}$$

wird.

Die Schraubenlinie hat wie ihre Projektion auf die xy-Ebene und wie die Astroide, durch deren Torsion sie entsteht, in den Punkten

*) Vgl. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie, Leipzig 1902, S. 9 oder G. Loria, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1902, S. 491. Die Schraubenlinien auf Rotationsflächen zweiter Ordnung, von denen eine spezielle hier vorliegt, sind von Herrn W. Blaschke in einer soeben erschienenen Arbeit „Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien", Monatshefte für Math. u. Phys. 19, S. 188—204, systematisch untersucht worden. Dort finden sich auch literarische Nachweise des Problems.

$$v = \frac{\lambda\pi}{2n} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \cdots)$$

überall Spitzen. Diese verteilen sich, je nachdem λ gerade oder ungerade ist, auf die beiden Parallelkreise

$$\zeta = \frac{5}{4m\sqrt{1+m^2}} \qquad \left(v = \frac{2k\pi}{2n}\right)$$

und

$$\zeta = \frac{-1}{4m\sqrt{1+m^2}} \qquad \left(v = \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),$$

deren Radien gleich R_0 sind und die die höchsten und tiefsten Punkte der Schraubenlinie enthalten.

Die Kurve liegt demnach zu beiden Seiten des Äquators

$$\zeta = \frac{1}{2m\sqrt{1+m^2}},$$

der sie in zwei miteinander zur Deckung zu bringende Hälften teilt. Ihre Schnittpunkte mit dem Äquator entsprechen den Werten

$$v = \frac{\lambda\pi}{4n}$$

des Parameters.

Die Kurve konstanter Krümmung (A) erreicht ihre höchsten Punkte gleichfalls für $v = \frac{k\pi}{n}$, und zwar liegen sie auf dem Parallelkreis

$$\zeta = \frac{1}{4m\sqrt{1+m^2}}$$

der Rotationsfläche zweiter Ordnung, auf der die ganze Kurve liegt. Ihre tiefsten Punkte, die für

$$v = \frac{2k+1}{2n}\pi$$

erreicht werden, fallen mit den tiefsten Punkten der Schraubenlinien zusammen. Der Parallelkreis

$$\zeta = \frac{-1}{4m\sqrt{1+m^2}},$$

dem sie angehören, ist also der Berührungskreis*) der beiden koaxialen Rotationsflächen zweiter Ordnung, um die es sich hier handelt.

Für diese tiefsten Punkte $v = \frac{2k+1}{2n}\pi$ wird

$$ds = 0,$$

$$\tau = \infty,$$

dagegen ist wie immer

$$\varkappa = 1.$$

*) Vgl. S. 557.

Diese Relationen bedeuten, daß die Kurve auch für diese Punkte Spitzen besitzt. Während nämlich das Linienelement ds sich immer mehr der Null nähert, wird der Kontingenzwinkel

$$d\omega = \varkappa ds$$

von derselben Ordnung unendlich klein. Die Tangente in dem vorliegenden Punkte ist also stationär. Dagegen bleibt der Schmiegungswinkel

$$d\omega' = \tau ds = \frac{-1}{\sqrt{1+m^2}} \sin nv\, dv$$

von derselben Größenordnung wie in dem übrigen Verlauf der Kurve. Die Schmiegungsebene dreht sich also um die stationäre Tangente in demselben Sinne weiter.

In den höchsten Punkten der Kurve dagegen ist wegen

$$v = \frac{\varkappa\pi}{n}$$

$$\tau = 0,$$

also, da ds hier von derselben Größenordnung wie dv,

$$d\omega' = 0;$$

in diesen Punkten besitzt die Kurve also eine stationäre Schmiegungsebene.

Ehe dazu übergegangen wird, die einfachsten Beispiele der in ihrem allgemeinen Verlauf nunmehr bekannten Kurven im speziellen zu untersuchen, seien die gewonnenen Ergebnisse folgendermaßen zusammengefaßt:

> Wenn man eine Astroide ohne Änderung ihrer Krümmung so tordiert, daß sie als Kurve konstanter Steigung auf eine Rotationsfläche zweiter Ordnung gelegt werden kann, deren Achse vertikal ist, so geht sie in eine Schraubenlinie über, deren Projektion auf die Äquatorebene der Rotationsfläche eine zyklische Kurve ist, und zwar eine Epizykloide, wenn die Kurve auf ein Ellipsoid, eine Hypozykloide, wenn die Kurve auf ein einschaliges Hyperboloid gelegt ist. Die Achsen der Astroide gehen bei der Torsion in geodätische Linien der Tangentenfläche über, die zwei nicht aufeinanderfolgende Spitzen verbinden. Es sind Kurven konstanter Krümmung, die ebenfalls auf einer Rotationsfläche zweiter Ordnung liegen und in den Spitzen der Gratlinie selbst Spitzen haben. Sie sind algebraisch, wenn sie geschlossen sind, und dies ist der Fall, wenn die Astroide in eine algebraische Schraubenlinie tordiert wird. Die so konstruierten Kurven sind die einzigen Geodätischen auf den Tangentenflächen von Schraubenlinien, die konstante Krümmung besitzen.

In der ganzen Untersuchung spielte die Annahme

$$n = \frac{1}{2}$$

eine Ausnahmerolle. In diesem Falle sind die Quadraturen, die die Koordinaten (x, y, z) der Kurve (A) bestimmen, nicht wie sonst ausführbar Es wird nämlich:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\int\left(\frac{1}{2}\sin v \sin\frac{v}{2} + \cos v \cos\frac{v}{2}\right)\cos\frac{v}{2}\,dv,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\int\left(\frac{1}{2}\cos v \sin\frac{v}{2} - \sin v \cos\frac{v}{2}\right)\cos\frac{v}{2}\,dv,$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\int\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}\,dv,$$

woraus sich die Quadraturen folgendermaßen ergeben:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left[\frac{3}{8}v + \frac{1}{2}\sin v + \frac{1}{16}\sin 2v\right],$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left[\frac{1}{2}\cos v + \frac{1}{16}\cos 2v\right],$$

$$z = \frac{1}{2\sqrt{1+m^2}}\cos v.$$

Diese Kurve liegt nicht mehr auf einer Rotationsfläche zweiter Ordnung, sondern gehört einem parabolischen Zylinder an, dessen erzeugende Geraden parallel zur x-Achse sind und dessen Achsenebene der xy-Ebene parallel ist. Die Kurve ist transzendent, sie bietet daher nicht das Interesse, das den übrigen Kurven, die rationalen Werten des n entsprechen, zukommt.

Der besseren Übersicht halber seien die Formelsysteme, die für die geometrische Darstellung der Kurven zu berücksichtigen sind, hier noch einmal zusammengestellt.

I.

Die Kurven konstanter Krümmung.

1. Gleichungen:

$$x = \frac{-1}{\sqrt{1+m^2}}\left(\frac{1-n}{4(1+2n)}\sin(1+2n)v + \frac{1+n}{4(1-2n)}\sin(1-2n)v + \frac{1}{2}\sin v\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left(\frac{1-n}{4(1+2n)}\cos(1+2n)v + \frac{1+n}{4(1-2n)}\cos(1-2n)v + \frac{1}{2}\cos v\right)$$

$$z = \frac{1}{4m\sqrt{1+m^2}}\cos 2nv = \frac{1-n^2}{4n}\cos 2nv.$$

2. Bogenelement:

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cos n v .$$

3. Torsion:

$$\tau = -\operatorname{tg} n v.$$

4. Spitzen treten auf für

$$v = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

5. Sie gehört einer Fläche 2. Ordnung an, deren Halbachsenquadrate

$$a^2 = \frac{27 n^4}{4(1-4n^2)^2}, \qquad c^2 = \frac{-27 n^2}{16(1-4n^2)}$$

sind, deren Achsenverhältnis also

$$\frac{a}{c} = \frac{2ni}{\sqrt{1-4n^2}}$$

ist. Ihr Mittelpunkt liegt auf der z-Achse in der Höhe

$$z = -\frac{1+2n^2}{4n}.$$

6. Natürliche Gleichungen:

$$\varkappa = 1; \qquad \tau^2 = \frac{m^2 s^2}{1-m^2 s^2}.$$

II.

Die Schraubenlinien.

1. Gleichungen:

$$\xi = p\left\{\frac{\sin(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\sin(1-2n)v}{1-2n}\right\}$$
$$\eta = -p\left\{\frac{\cos(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\cos(1-2n)v}{1-2n}\right\} \qquad p = \frac{3n}{4\sqrt{1+m^2}}$$
$$\zeta = \frac{3}{4m\sqrt{1+m^2}} \cos 2nv + \frac{1}{2m\sqrt{1+m^2}}.$$

2. Bogenelement:

$$d\sigma_0 = \pm \frac{3}{2\sqrt{1+m^2}} \sin 2nv.$$

3. Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{3}{2m} \sin 2nv.$$

4. Spitzen treten auf für

$$v = \frac{k\pi}{2n}.$$

5. Die Rotationsfläche zweiter Ordnung, der die Kurve angehört, hat die Halbachsenquadrate:

$$a'^2 = \frac{9}{4}\,\frac{n^2(1-n^2)}{(1-4n^2)^2}, \qquad b'^2 = \frac{9}{16}\,\frac{(1-n^2)^2}{n^2(1-4n^2)},$$

so daß das Verhältnis der Hauptachsen

$$\frac{a'}{c'} = \frac{2n^2}{\sqrt{1-n^2}\sqrt{1-4n^2}}$$

ist. Die Koordinaten ihres Mittelpunktes sind $x = 0$, $y = 0$, $\zeta = \frac{1-n^2}{2n}$.

III.

Die Leitkurve des Zylinders der Schraubenlinie.

1. Gleichungen:

$$\xi_0 = p\left\{\frac{\sin(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\sin(1-2n)v}{1-2n}\right\}$$

$$\eta_0 = -p\left\{\frac{\cos(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\cos(1-2n)v}{1-2n}\right\}.$$

2. Bogenelement:

$$d\sigma_0 = -2p\sin 2nv\,dv.$$

3. Krümmungsradius:

$$\varrho_0 = 2p\sin 2nv.$$

4. Radius des festen Kreises:

$$R_0 = \frac{4np}{1-4n^2}.$$

5. Radius des rollenden Kreises:

$$r_0 = \frac{p}{1+2n}.$$

6. Modul der Kurve:

$$\frac{Rv}{r_0} = \frac{4n}{1-2n}.$$

Es bedeutet ferner

$$m = \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}$$

die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente der Schraubenlinie mit der z-Achse bildet.

Beispiele.

1. Man nehme

$$n = \frac{1}{6}.$$

Die Schraubenlinie ist dann der Schnitt des über der *Kardioide*

$$\xi_0 = \frac{3}{4}p\left\{\sin\frac{4}{3}v - 2\sin\frac{2}{3}v\right\}$$

$$\eta_0 = -\frac{3}{4}p\left\{\cos\frac{4}{3}v - 2\cos\frac{2}{3}v\right\}$$

konstruierten Zylinders mit dem Ellipsoid

$$\frac{x^2+y^2}{a'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1,$$

wobei

$$a'=\frac{3}{64}\sqrt{35}$$

und

$$c'=\frac{105}{32}\sqrt{2},$$

so daß

$$\frac{a'}{c'}=\frac{1}{2\sqrt{70}}<\frac{1}{16}$$

wird. Die Schraubenlinie gehört also einem lang gestreckten Rotationsellipsoid an, dessen Rotationsachse den Durchmesser des Äquators um mehr als das 16fache übertrifft.

Die entsprechende Kurve konstanter Krümmung

$$x=\frac{\sqrt{35}}{6\cdot 32}\left\{5\sin\frac{4}{3}v+14\sin\frac{2}{3}v+13\sin v\right\},$$

$$y=\frac{\sqrt{35}}{6\cdot 32}\left\{5\cos\frac{4}{3}v+14\cos\frac{2}{3}v+16\cos v\right\},$$

$$z=\frac{35}{24}\cos 2nv$$

liegt auf dem einschaligen Rotationshyperboloid, dessen reelle Halbachse

$$a=\frac{3}{64}\sqrt{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^3,$$

dessen imaginäre Halbachse

$$c=\frac{3}{16}\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^3$$

ist. Die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Rotationsflächen beträgt

$$\zeta-z=\frac{3}{4n}=\frac{9}{2}.$$

Die Spitzen der Schraubenlinie entsprechen den Parameterwerten $v=\frac{k\pi}{2n}=3k\pi$, sie reduzieren sich also hier auf zwei, auf die Schnittpunkte der Geraden

$$\xi=0,\quad \eta=\frac{3}{4}p=\frac{\sqrt{35}}{64}$$

mit dem Ellipsoid in den Punkten

$$\zeta_1=\frac{175}{24}\quad\text{und}\quad\zeta_2=-\frac{35}{24}.$$

Die Kurve konstanter Krümmung besitzt nur eine Spitze, für

$$v=\frac{2k+1}{2n}\pi=6k\pi+3\pi;$$

ihre Koordinaten sind

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{\sqrt{35}}{64}, \quad \zeta = -\frac{35}{24}.$$

Sie erreicht ihren höchsten Punkt auch in der $\eta\zeta$-Ebene, nämlich für

$$v = \frac{k\pi}{n} = 6k\pi;$$

seine Koordinaten haben die Werte:

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{35\sqrt{35}}{6 \cdot 32}, \quad \zeta = +\frac{35}{24}.$$

2. Für

$$n = \frac{1}{4}$$

wird

$$\frac{R_0}{r_0} = 2;$$

die Schraubenlinie liegt also auf dem Zylinder, dessen Leitlinie die *zweispitzige Epizykloide*

$$\xi_0 = \frac{2}{3}p\left\{\sin\frac{3}{2}v - 3\sin\frac{v}{2}\right\},$$

$$\eta_0 = -\frac{2}{3}p\left\{\cos\frac{3}{2}v - 3\cos\frac{v}{2}\right\}$$

ist. Der Radius des festen Kreises ist:

$$R_0 = \frac{4}{3}p,$$

der des beweglichen Kreises

$$r_0 = \frac{2}{3}p,$$

wobei

$$p = \frac{3}{64}\sqrt{15}$$

gesetzt ist. Das Ellipsoid, dem die Schraubenlinie angehört, hat die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

und zwar ist

$$a' = \frac{1}{8}\sqrt{15}, \quad c' = \frac{15}{8}\sqrt{3}, \quad \frac{a'}{c'} = \frac{1}{3\sqrt{5}}.$$

Auch hier ist die Rotationsachse noch mehr als sechs Mal so lang als der Äquatordurchmesser.

Die Kurve konstanter Krümmung, die für $n = \frac{1}{4}$ erhalten wird, hat die Gleichungen:

$$x = \frac{-\sqrt{15}}{32}\left\{\sin\frac{3}{2}v + 5\sin\frac{v}{2} + 4\sin v\right\},$$

$$y = \frac{\sqrt{15}}{32}\left\{\cos\frac{3}{2}v + 5\cos\frac{v}{2} + 4\cos v\right\},$$

$$z = \frac{15}{16}\cos\frac{v}{2}.$$

Sie ist von dem sechsten Grade als Durchschnitt des Rotationshyperboloids

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wo

$$a = \frac{1}{8}\sqrt{3}, \qquad c = \frac{3}{8}$$

zu setzen ist, mit dem parabolischen Zylinder dritten Grades

$$\sqrt{15}\,y = z\left[\frac{512}{225}z^2 + \frac{64}{15}z + 2\right] - \frac{\sqrt{15}}{8},$$

der durch Elimination von $\frac{v}{2}$ aus den Ausdrücken für y und z erhalten wird.

3. Dem Werte

$$n = \frac{1}{3}$$

entspricht das Verhältnis

$$\frac{R_0}{r_0} = 4,$$

also die *vierspitzige Epizykloide* als Leitkurve des Zylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt:

$$\xi = \frac{3}{5}p\left[\sin\frac{5}{3}v - \sin\frac{1}{3}v\right],$$

$$\eta = -\frac{3}{5}p\left[\cos\frac{5}{3}v - \cos\frac{1}{3}v\right].$$

$$\zeta = 2\cos\frac{2}{3}v + \frac{4}{3},$$

wobei

$$p = \frac{1}{6}\sqrt{2}$$

ist.

Der Radius des festen Kreises ist

$$R_0 = \frac{12}{5}p,$$

der des beweglichen

$$r_0 = \frac{3}{5}p.$$

Die Schraubenlinie gehört dem Rotationsellipsoid mit den Halbachsen

$$a' = \frac{3}{5}\sqrt{2}, \qquad c' = \frac{6}{5}\sqrt{2}$$

an, die also im Verhältnis $1 : \sqrt{10}$ zueinander stehen.

Die zugehörige Kurve konstanter Krümmung

$$x = \frac{-\sqrt{2}}{15}\left(\sin\frac{5}{3}v + 10\sin\frac{1}{3}v + 5\sin v\right),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{15}\left(\cos\frac{5}{3}v + 10\cos\frac{1}{3}v + 5\cos v\right),$$

$$z = \frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}v$$

liegt auf dem Rotationshyperboloid mit den Halbachsen

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{10}, \quad c = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}.$$

Die höchsten und tiefsten Punkte der Schraubenlinie liegen, den Spitzen der Leitepizykloide entsprechend, auf den Parallelkreisen

$$\zeta_1 = \frac{10}{3},$$

$$\zeta_2 = -\frac{2}{3}$$

des Ellipsoids; die Spitzen der Kurve konstanter Krümmung fallen wie immer mit den tiefsten Punkten der Schraubenlinie zusammen, während ihre Maxima, für die Parameterwerte $v = \frac{(2\varkappa+1)\pi}{2n} = \frac{3}{2}(2\varkappa+1)\pi$ eineintretend, die Koordinaten

$$x = \mp\frac{2\sqrt{2}}{5}, \quad y = 0, \quad z = +\frac{2}{3}$$

besitzen.

4. Die Reihe der leicht beliebig zu vermehrenden Beispiele sei mit dem einfachsten Fall, der für eine Schraubenlinie auf einem Zylinder mit hypozykloidischer Leitkurve eintreten kann, abgeschlossen. In diesem Falle wird das Verhältnis der Radien der erzeugenden Kreise

$$\frac{R_0}{r_0} = \frac{4n}{2n-1}$$

durch die Bedingung eingeschränkt, daß $n < 1$ sein muß. Infolgedessen muß

$$R_0 > 4r$$

sein, so daß die dreispitzige Hypozykloide und die Astroide als Leitkurve des Zylinders nicht in Betracht kommen.

Für

$$n = \frac{3}{4}$$

wird

$$R_0 = 6r_0.$$

Die Schraubenlinie

$$\xi = \frac{2}{5} p \left\{\sin \frac{5}{2} v - \sin \frac{v}{2}\right\}, \qquad p = \frac{9}{64}\sqrt{7},$$

$$\eta = \frac{2}{5} p \left\{\cos \frac{5}{2} v + \cos \frac{v}{2}\right\},$$

$$\zeta = \frac{7}{16} \cos \frac{3}{2} v + \frac{7}{24}$$

gehört dem Rotationshyperboloid

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a'^2} - \frac{\zeta^2}{c'^2} = 1$$

an, dessen Achsen

$$a' = \frac{9}{40}\sqrt{7}, \qquad c' = \frac{7}{40}\sqrt{5}$$

sind. Die für $v = \frac{2\varkappa\pi}{3}$ auftretenden Spitzen verteilen sich auf die Parallelkreise

$$\zeta_1 = \frac{35}{48} \quad \text{und} \quad \zeta_2 = -\frac{7}{48}.$$

Auf dem letzteren liegen auch die Spitzen der entsprechenden Kurve konstanter Krümmung

$$x = -\frac{\sqrt{7}}{160}\left\{\sin \frac{5}{2} v + 35 \sin \frac{v}{2} + 20 \sin v\right\},$$

$$y = \frac{\sqrt{7}}{160}\left\{\cos \frac{5}{2} v - 35 \cos \frac{v}{2} + 20 \cos v\right\},$$

$$z = \frac{7}{48} \cos \frac{3}{2} v,$$

deren höchste Punkte auf dem Parallelkreis

$$z = \frac{7}{48} \quad \text{für} \quad v = \frac{\varkappa\pi}{n} = \frac{4}{3}\varkappa\pi$$

die Koordinaten

$$x = +\frac{7\sqrt{7}}{80} \sin \frac{\varkappa\pi}{3},$$

$$y = +\frac{7\sqrt{7}}{80} \cos \frac{\varkappa\pi}{3}$$

besitzen.

Das Ellipsoid, dem die Kurve angehört, ist durch die Halbachsen

$$a = \frac{27}{40}\sqrt{3}, \qquad c = \frac{9}{40}\sqrt{15}$$

bestimmt.

IV.

Geodätische Linien auf den Tangentenflächen der Schraubenlinien.

Die Kurven konstanter Krümmung, die bisher der Untersuchung unterworfen waren, stellen nur einen Spezialfall der großen Klasse von

Raumkurven dar, die auf den Tangentenflächen von allgemeinen Schraubenlinien als geodätische Linien erscheinen. Will man sie unabhängig von den Flächen, auf denen sie auftreten, definieren, so beachte man, daß ihre Hauptnormalen den Tangenten einer Schraubenlinie parallel zugeordnet waren, daß also die sphärische Indikatrix ihrer Hauptnormalen ein Kreis ist.*)

Die Gleichungen dieser Kurven in kartesischen Koordinaten sind nach den am Anfang des dritten Abschnitts hergeleiteten Ergebnissen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \int f'(v)\,(a' \sin nv + a'' \cos nv)\,dv, \\ y_1 &= \int f'(v)\,(b' \sin nv + b'' \cos nv)\,dv, \\ z_1 &= \int f'(v)\,(c' \sin nv + c'' \cos nv)\,dv, \end{aligned}$$

Formeln, in denen

$$f'(v) = \frac{ds_1}{dv}$$

eine beliebige Funktion von v und

$$\begin{aligned} a' &= -n \sin v, & b' &= n \cos v, & c' &= \frac{-1}{\sqrt{1+m^2}}, \\ a'' &= -\cos v, & b'' &= -\sin v, & c'' &= 0 \end{aligned}$$

die Richtungskosinus der Binormalen und Hauptnormalen der Schraubenlinie, von der wir ausgingen, bedeuten.**) Krümmung und Torsion der Kurve (1) war mit den entsprechenden Größen der Schraubenlinie durch die Gleichungen

$$\varkappa_1 \frac{ds_1}{ds} = \tau \cos nv,$$

$$\tau_1 \frac{ds_1}{ds} = -\varkappa \sin nv$$

verbunden. Hieraus ergibt sich

$$\frac{\tau_1}{\varkappa_1} = -\operatorname{tg} nv.$$

Setzt man nun

$$\operatorname{tg} nv = -t,$$

so wird

$$s_1 = f(v) = \varphi(t),$$

$$\varkappa_1 = \frac{\cos^2 nv}{m\varphi'(t)} = \frac{-1}{m\varphi'(t)\sqrt{(1+t^2)^3}}.$$

Daraus ergibt sich der Satz:

Die natürlichen Gleichungen der geodätischen Linien auf den

*) Die Indikatrix ihrer Tangenten ist eine sphärische Schraubenlinie.

**) Die Quadraturen lassen sich übrigens explizit lösen.

Tangentenflächen von Schraubenlinien erhält man durch Elimination des Parameters aus den Gleichungen

$$\frac{\tau_1}{\varkappa_1} = t,$$

$$\frac{1}{\varkappa_1} = -\,m\,\varphi'(t)\sqrt{(1+t^2)^3},$$

$$s_1 = \varphi(t),$$

in denen φ eine willkürliche Funktion bedeutet.

Die Gleichungen der Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche, einer Schraubenlinie, bei der das Verhältnis von Krümmung und Torsion gleich m ist, ergeben sich aus der allgemeinen Theorie in der Form:

$$\xi_1 = x_1 + \frac{ds_1}{\varkappa_1}\,\frac{\varkappa_1 a_1' - \tau_1 a_1}{d\frac{\tau_1}{\varkappa_1}},$$

$$\eta_1 = y_1 + \frac{ds_1}{\varkappa_1}\,\frac{\varkappa_1 b_1' - \tau_1 b_1}{d\frac{\tau_1}{\varkappa_1}},$$

$$\zeta_1 = z_1 + \frac{ds_1}{\varkappa_1}\,\frac{\varkappa_1 c_1' - \tau_1 c_1}{d\frac{\tau_1}{\varkappa_1}}.$$

Gleichungen, die in unserem Fall sich folgendermaßen umformen lassen:

$$\xi_1 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\,\frac{1}{\varkappa_1}\cos^2 nv \sin v,$$

$$\eta_1 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\,\frac{1}{\varkappa_1}\cos^2 nv \cos v,$$

$$\zeta_1 = z_1 + \frac{1}{m\sqrt{1+m^2}}\,\frac{1}{\varkappa_1}\cos^2 nv.$$

Bestimmt man andererseits die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche der Kurve (x_1, y_1, z_1), so ergibt sich aus den Gleichungen dieser Kurve:

$$\xi_2 = x_1 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2 + \tau_1^2}\,a_1'',$$

$$\eta_2 = y_1 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2 + \tau_1^2}\,b_1'',$$

$$\zeta_2 = z_1 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2 + \tau_1^2}\,c_1''$$

durch Umformung mittels der für die betrachtete Kurve bestehenden Relationen:

$$\xi_2 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\,\frac{1}{\varkappa_1}\cos^2 nv \sin nv,$$

$$\eta_2 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\,\frac{1}{\varkappa_1}\cos^2 nv \cos nv,$$

$$\zeta_2 = z_1 - \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\,\frac{1}{\varkappa_1}\cos^2 nv.$$

Die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche einer geodätischen Linie G auf der Tangentenfläche einer allgemeinen Schraubenlinie liegt auf dem Zylinder, auf dem die Schraubenlinie eine Geodätische ist. Alle drei Kurven treffen sich in den Spitzen der Kurve G.

Entsprechende Punkte der Striktionslinie und der Schraubenlinie liegen in derselben erzeugenden Geraden des Zylinders, im Abstande

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \frac{\cos^2 nv}{n\varkappa_1} = \frac{\varkappa_1}{n(\varkappa_1^2 + \tau_1^2)}$$

voneinander. Die Ebene der rektifizierenden Geraden und Hauptnormalen berührt daher den Zylinder:

Die Hauptnormalen der geodätischen Linien auf der Tangentenfläche einer allgemeinen Schraubenlinie umhüllen den Zylinder, auf dem die Schraubenlinie eine geodätische Linie ist, und berühren ihn längs der Striktionslinie der von ihnen gebildeten Fläche.

Es bietet nachträglich keine Schwierigkeiten, diesen Satz rein geometrisch zu beweisen. Sind $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ benachbarte Punkte auf einer Schraubenlinie des Zylinders C, ist ferner c die Schnittkurve des Zylinders mit einer senkrecht zu den erzeugenden Geraden gelegten Ebene, sind endlich $T_1, T_2, T_3, \ldots$ die Schnittpunkte der Tangenten Q_1Q_2, Q_2Q_3, $Q_3Q_4, \ldots$ mit dieser Ebene, so ist T_1T_2 senkrecht zur Ebene $T_2Q_3q_2$, also auch umgekehrt diese Ebene $T_2Q_3q_3$ senkrecht auf der Ebene $T_1Q_2T_2$, das Lot P_1R_1 auf Q_1T_1 in der Ebene $T_2Q_2T_1$ also eine Flächennormale. Diese trifft den Zylinder C in den Punkten R_1 und R_1' der beiden benachbarten Erzeugenden Q_1q_1 und Q_2q_2. Wählt man in der Umgebung von P_1 auf der benachbarten Erzeugenden Q_2Q_3 der Tangentenfläche einen Punkt P_2, so liegt die Flächennormale dieses Punktes in der Ebene $T_2Q_3q_3$, schneidet also die Ebene

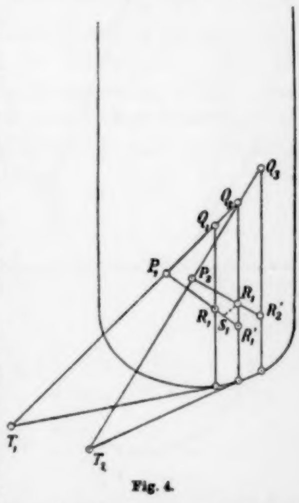


Fig. 4.

$T_1Q_2q_2$ in einem Punkte R_2 der Geraden Q_2q_2. Sieht man nun P_1P_2 als

Linienelement einer geodätischen Linie der Tangentenfläche an, so sind P_1R_1 und P_2R_2 für sie zwei aufeinanderfolgende Hauptnormalen. Ihr kürzester Abstand ist parallel der rektifizierenden Geraden T_1Q_2, liegt also in der Ebene $T_1Q_2q_2$ und wird erhalten, wenn man vom Schnittpunkte R_2 der Geraden P_2R_2 mit dieser Ebene auf P_1R_1 das Lot R_2S_1 fällt. Dies besagt aber nichts anderes als den vorher analytisch hergeleiteten Satz.

Anhang.

Für die Darstellung eignen sich die Kurven, die aus den einfachsten zyklischen Kurven hervorgehen, wenig, da die resultierenden Kurven ungünstige Formen annehmen, die die charakteristischen Gestalten der Kurvenklasse nicht deutlich hervortreten lassen.

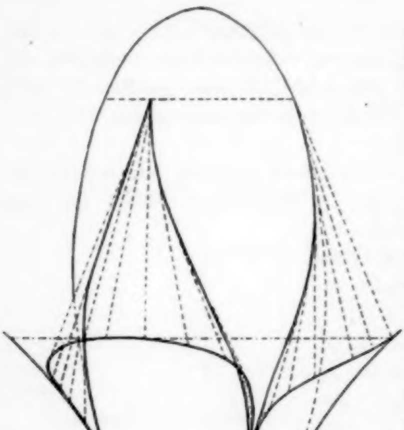


Fig. 5.

In den beigefügten Figuren, die die beiden Haupttypen in orthogonaler Projektion darstellen, sind deshalb zyklische Kurven mit einer größeren Anzahl von Spitzen zugrunde gelegt.

Die Konstruktion geschieht am einfachsten in der Weise, daß nach der Berechnung der Zahlenwerte aller notwendigen Bestimmungsstücke die den Werten R_0, r_0 entsprechende zyklische Kurve dargestellt wird, senkrecht über ihr der Zylinder errichtet und dessen Schnittkurve mit der Rotationsfläche zweiter Ordnung, deren Halbachsen a' und c' sind, bestimmt wird. Diese Schnittlinie ist eine Schraubenlinie, deren Tangenten die Rotationsfläche zweiter Ordnung mit den Halbachsen a, c in den Punkten der gesuchten Kurve konstanter Krümmung schneidet. In den Figuren sind, um den Zusammenhang deutlicher hervortreten zu lassen, die Tangentenflächen durch einzelne ihrer erzeugenden Geraden dargestellt.

Die beiden Rotationsflächen zweiter Ordnung, auf der die Schraubenlinie und die zugehörige Kurve konstanter Krümmung liegen, berühren einander längs des Parallelkreises, auf dem die Spitzen der Kurve konstanter Krümmung liegen.

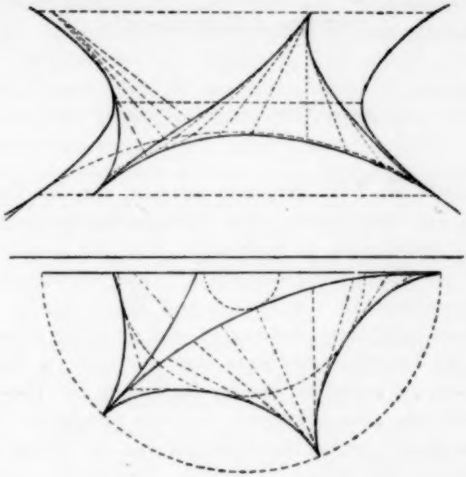


Fig. 6.

Dies folgt schon aus der einfachen geometrischen Überlegung, daß in den Spitzen, in denen sie sich treffen, die Schraubenlinie und die Kurve konstanter Krümmung gemeinsame Tangenten haben müssen; man kann es aber auch aus den Gleichungen der beiden Rotationsflächen in üblicher Weise durch eine Rechnung erschließen, die ihres elementaren Charakters halber hier übergangen werden kann.

Rein geometrische Begründung der Lehre von den Proportionen und des Flächeninhalts.

Von

Karl Kommerell in Stuttgart.

Graßmann*) ist wohl der erste gewesen, der den Versuch machte, die Lehre von den Proportionen ohne Stetigkeitsbetrachtungen, also ohne den Begriff des Irrationalen, zu begründen. Ähnliche Ausführungen finden sich nachher bei Hoppe**), Kupfer***) und in dem neueren Werk über Elementarmathematik von Weber und Wellstein†). Das Gemeinsame in der Darstellung dieser Autoren ist, daß sie durch *Raumbetrachtungen* den Lehrsatz des Desargues gewinnen und von hier aus dann die Lehre von den Proportionen aufbauen. In der Beiziehung des Raumes liegt aber gerade die Schwäche dieser Systeme, da man verlangen muß, die Sätze der ebenen Geometrie unter Beschränkung auf die Ebene zu beweisen. Merkwürdigerweise hält Hoppe (a. a. O. p. 154) es für unmöglich, eine Theorie der Ähnlichkeit auf die Winkelgleichheit zu gründen, ohne die Ebene zu verlassen. Hilbert††) ist es aber gelungen, die Lehre von den Proportionen einwandfrei d. h. ohne Stetigkeitsbetrachtungen und ohne die räumliche Geometrie herbeizuziehen, zu begründen. Im Prinzip kaum verschieden davon sind die späteren etwas vereinfachten Darstellungen von Mollerup†††) und Kneser*†). Hilbert geht von den vier Strecken

*) H. Graßmann, Die Ausdehnungslehre von 1844, §§ 74—79.

**) R. Hoppe, Rein geometrische Proportionslehre, Archiv d. Math. u. Phys. 62, 1878, p. 153 ff.

***) K. Kupfer, Die Darstellung einiger Kapitel der Elementarmathematik, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscherges. 1893, p. 373 ff.

†) H. Weber u. J. Wellstein, Encyklopädie der Elementarmathematik, Bd. II, p. 234 ff.

††) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, II. Aufl., 1903, § 14 ff.

†††) J. Mollerup, Die Lehre von den geometrischen Proportionen, Math. Ann. 1902, p. 277 ff.

*†) A. Kneser, Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre unabhängig vom Archimedischen Axiom und von dem Begriff des Inkommensurabeln. Archiv d. Math. u. Phys., dritte Reihe, Bd. 2, 1902.

S. weiter F. Schur, Zur Proportionslehre, Math. Ann., Bd. 57 (1903), p. 205 ff.; sowie A. Kneser, Zur Proportionslehre, Math. Ann., Bd. 58 (1904), p. 583 ff.

aus, die durch zwei Parallellinien auf den Schenkeln eines *rechten* Winkels erzeugt werden, und beweist durch eine allerdings etwas verwickelte *Streckenrechnung*, daß, wenn die vier Abschnitte auf den Schenkeln eines *beliebigen* Winkels passend abgetragen werden, durch Verbindung der Endpunkte wieder parallele Gerade entstehen (Fundamentalsatz). Diese dem Geiste der Euklidischen Geometrie wenig entsprechende Streckenrechnung ist offenbar nur ein Notbehelf, weil es bis jetzt unmöglich schien*), diesen Fundamentalsatz rein geometrisch zu beweisen. Eine rein geometrische von jeder Streckenrechnung freie Begründung der Proportionen- und Ähnlichkeitslehre scheint mir daher einem wirklichen Bedürfnis zu entsprechen. Dieses Bedürfnis möchte die nachfolgende Arbeit befriedigen. Wir beweisen zuerst den Fundamentalsatz und dann den Lehrsatz des Desargues. Nebenher werden wir zugleich fast alle wichtigen Sätze der Proportionenlehre gewinnen, so daß streng genommen die Benützung von Symbolen unnötig ist. Wenn wir solche trotzdem einführen, so geschieht dies nur der Kürze der Darstellung halber. Aus demselben Grunde benutzen wir auch ausgiebig die Bewegung: der Leser wird erkennen, daß unsere Beweisführungen von der Bewegung gänzlich unabhängig sind. Da endlich in den „Grundlagen" auch die Lehre vom Flächeninhalt mit der Streckenrechnung verknüpft ist, wenigstens was das Inhaltsmaß**) betrifft, so geben wir zugleich an, welche Änderungen hier vorzunehmen sind, um auch die Lehre des Flächeninhalts von der Streckenrechnung zu befreien. Dabei schließen wir uns, was diesen letzten Punkt betrifft, möglichst enge an die Erörterungen Hilberts an und beschränken uns auf das Allernotwendigste.

I. Abschnitt.

Die Lehre von den Proportionen.

§ 1.

Ähnliche Punktreihen. Ähnliche Streckenreihen.

Werden zwei Gerade, die sich im Punkt C unter dem Winkel ω schneiden, von einer Parallellinienschar bezüglich in den Punkten A, A_1; B, B_1; C, C_1; $\cdots$ getroffen, so wird dadurch jedem Punkt A der einen Geraden ein Punkt A_1 der anderen Geraden zugeordnet. Wir wollen sagen: *Die Punktreihe $A, B, C, \cdots$ ist der Punktreihe $A_1, B_1, C_1, \cdots$ ähnlich, oder*

---

*) Siehe hierzu auch Weber und Wellstein a. a. O. p. 246.

**) Hilbert, Grundlagen usw. § 20.

die beiden Punktreihen sind ähnliche Punktreihen. Zwei Punkte wie A, A_1 nennen wir zugeordnete Punkte, die Geraden die Träger der Punktreihen: der Punkt O ist offenbar sich selbst zugeordnet. Wir sagen weiter, daß die beiden ähnlichen Punktreihen sich in *parallel perspektivischer Lage* befinden, und nennen die beiden Punktreihen auch dann noch ähnlich, wenn durch gegenseitige Lagenänderung der Träger diese besondere Lage aufgehoben ist.

Die ähnliche Beziehung zweier Punktreihen drücken wir aus durch das Symbol

$$\text{(I)} \qquad O;\ A,\ B,\ C, \cdots \sim O;\ A_1,\ B_1,\ C_1, \cdots,$$

das wir lesen: Punktreihe $O, A, B, C, \cdots$ ist ähnlich der Punktreihe $O, A_1, B_1, C_1, \cdots$. Durch das Symbol (I) soll also begrifflich ausgesagt werden, daß die Träger der Punktreihen so gegeneinander orientiert werden können, daß sie sich im Punkt O schneiden und AA_1 parallel BB_1 parallel CC_1 etc. läuft. Wir nennen das Symbol kurz eine *Punktordnung* und unterscheiden in dieser eine rechte und linke Seite. Man sieht sofort, daß man in einer Punktordnung die linke und die rechte Seite vertauschen darf, ebenso, daß man mit Ausnahme des Punktes O die Punkte der linken Seite permutieren kann, wenn man die Punkte der rechten Seite derselben Permutation unterwirft.

Durch die Punktreihen sind nun auch gewisse Streckenreihen einander zugeordnet: so z. B. ist die Streckenreihe $OA, OB, OC, \cdots$ der Streckenreihe $OA_1, OB_1, OC_1, \cdots$ zugeordnet. Wir nennen diese zwei Streckenreihen *ähnliche Streckenreihen.* Wir drücken dies kurz aus durch das Symbol

$$\text{(II)} \qquad OA,\ OB,\ OC, \cdots \sim OA_1,\ OB_1,\ OC_1, \cdots$$

das wir lesen: *Streckenreihe $OA, OB, OC, \cdots$ ist der Streckenreihe $OA_1, OB_1, OC_1, \cdots$ ähnlich.**) Damit soll also ausgesagt werden, daß die Träger der ähnlichen Streckenreihen so gegeneinander orientiert werden können, daß AA_1 parallel BB_1 parallel CC_1 etc. wird und daß die Träger im Punkt O sich schneiden.

Wir nennen das Symbol (II) eine *Streckenordnung* und unterscheiden in dieser eine linke und rechte Seite. Die einzelnen Strecken nennen wir die Glieder der Streckenordnung und zwei Glieder wie OC und OC_1 zu-

*) Wir vermeiden mit Absicht sowohl das Wort Proportion, sowie auch die übliche Bezeichnungsweise mit den Doppelpunkten und dem Gleichheitszeichen. Damit soll deutlich zum Ausdruck kommen, daß es sich nicht um das Verhältnis von zwei Maßzahlen handelt, und daß die zu entwickelnde Lehre etwas anderes ist als die in den elementaren Lehrbüchern abgehandelte Proportionenlehre. Das Wort Proportion wird ausschließlich für das Verhältnis der Maßzahlen reserviert.

geordnete Glieder. Es folgt, daß man in einer Streckenordnung die linke mit der rechten Seite vertauschen darf. Außerdem ist es gestattet, die Glieder der linken Seite zu permutieren, wenn man die Glieder der rechten Seite ebenso permutiert.

§ 2.

Fundamentalsatz.

Fundamentalsatz: *Zwei ähnliche Punktreihen, die sich in parallel perspektivischer Lage befinden, bleiben in parallel perspektivischer Lage, auch wenn der eine der Träger um den Schnittpunkt O der Träger gedreht wird.*

Beweis: In der Figur 1 seien $O, A, B, \cdots$ und $O, A_1, B_1, \cdots$ die beiden ähnlichen in parallel perspektivischer Lage sich befindenden Punktreihen, also AA_1 parallel BB_1 etc., ω der Winkel BOB_1. Wir tragen unn an OB_1 im Punkt O auf der anderen Seite von ω den beliebigen Winkel ω_1 an und auf dessen freiem Schenkel der Reihe nach die Strecken $OA_2 \equiv OA$, $OB_2 \equiv OB$ etc. ab. Es ist jetzt zu zeigen, daß A_1A_2 parallel B_1B_2 parallel C_1C_2 etc. ist. Offenbar genügt es, wenn bewiesen ist, daß B_1B_2 parallel A_1A_2 ist. Zu diesem Zwecke setzen wir zunächst voraus, daß ω_1 kleiner als $2R - \omega$ ist, und ziehen jetzt durch B_1 die Parallele zu OB_2, die dann, wie man leicht sieht, sicher die Gerade OB in einem Punkte F_3 schneidet; außerdem ziehe man die Gerade F_3A_1. Auf der Geraden B_1O existiert jetzt sicher ein Punkt F*) derart, daß

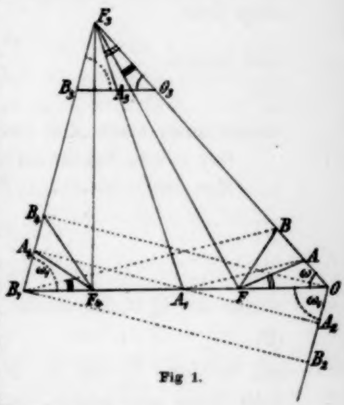


Fig. 1.

$$\sphericalangle AFO \equiv \sphericalangle A_1F_3O \tag{1}$$

ist. Diesen Punkt F verbinde man mit F_3, A und B, ermittle auf F_3O den Punkt O_3 so, daß $F_3O_3 \equiv FO$, und ziehe durch O_3 mit OB_1 die Parallele, die F_3A_1 in A_3, F_3B_1 in B_3 trifft. Wir zeigen nun zunächst, daß $O_3A_3 \equiv OA$ und $O_3B_3 \equiv OB$ ist.

Es ist nämlich

$$\triangle FOA \equiv \triangle F_3O_3A_3$$

weil $\sphericalangle A_3O_3F_3 \equiv \sphericalangle AOF$ (A_3O_3 parallel FO!) und nach (1) $\sphericalangle A_3F_3O_3 \equiv AFO$ und endlich $O_3F_3 \equiv OF$ gemacht worden ist. Es ist also in der Tat

$$O_3A_3 \equiv OA. \tag{2}$$

*) Fällt der Punkt F mit A_1 zusammen, so erleidet das Beweisverfahren einige kleine, leicht ersichtliche Änderungen.

Aus (1) folgt, daß Viereck F_3A_1FA ein Kreisviereck ist, und hieraus

(3) $$\sphericalangle AA_1F \equiv \sphericalangle AF_3F.$$

Weil aber AA_1 parallel BB_1 ist, so hat man auch

(4) $$\sphericalangle AA_1F \equiv \sphericalangle BB_1F.$$

Aus (3) und (4) schließt man

(5) $$\sphericalangle AF_3F \equiv \sphericalangle BB_1F$$

und hieraus, daß Viereck F_3B_1FB ein Kreisviereck ist. In diesem ist

$$\sphericalangle BFO \equiv \sphericalangle B_3F_3O_3.$$

Aus dieser Kongruenz und den beiden schon oben benutzten

$$OF \equiv OF_3, \quad \sphericalangle FOB \equiv \sphericalangle F_3O_3B_3$$

folgt jetzt

$$\triangle\, OBF \equiv \triangle\, O_3B_3F_3$$

und hieraus

(6) $$OB \equiv O_3B_3,$$

womit unser erstes Ziel erreicht ist.

Der zweite Schritt ist nur eine Wiederholung des Bisherigen.

Man bestimme auf B_1F_3 die Punkte A_4B_4 so, daß

(7) $$B_1A_4 \equiv B_3A_3 \equiv BA \equiv B_2A_2,$$

(8) $$B_1B_4 \equiv B_3O_3 \equiv BO \equiv B_2O,$$

weiter auf B_1O den Punkt F_4, daß

(9) $$B_1F_4 \equiv B_3F_3$$

ist, verbinde F_4 mit A_4, B_4, F_3 und weiter A_1 mit A_4, und O mit B_4. Jetzt kann man zeigen, daß A_1A_4 parallel mit OB_4 ist. Aus den Kongruenzen (7), (8), (9) und

$$\sphericalangle F_3B_3O_3 \equiv \sphericalangle F_4B_1B_4$$

folgt nämlich zunächst

(10) $$\triangle\, B_1A_4F_4 \equiv \triangle\, B_3A_3F_3,$$

(11) $$\triangle\, B_1B_4F_4 \equiv \triangle\, B_3O_3F_3.$$

Aus (10) ergibt sich: $\sphericalangle A_4F_4B_1 \equiv \sphericalangle A_3F_3B_3$ und hieraus, daß Viereck $A_4F_4A_1F_3$ ein Kreisviereck ist. Analog folgt aus (11):

$$\sphericalangle B_4F_4B_1 \equiv \sphericalangle B_3F_3O_3$$

und hieraus, daß Viereck $B_4F_4OF_3$ ebenfalls ein Kreisviereck ist.

In den zwei Kreisvierecken ist nun

$$\sphericalangle A_4F_3F_4 \equiv \sphericalangle A_4A_1F_4$$

$$\sphericalangle A_4F_3F_4 \equiv \sphericalangle B_4OF_4.$$

Es folgt, daß die Winkel auf den rechten Seiten kongruent sind, und hieraus, daß A_4A_1 parallel B_4O ist. Nach (7) und (8) ist $A_4B_4 \equiv OA_2$; da weiter die zwei Strecken parallel sind, so ist das Viereck $B_4A_4A_2O$ ein Parallelogramm und somit A_4A_2 parallel B_4O. A_4A_1 ist aber auch parallel mit B_4O, woraus wir schließen, daß die drei Punkte $A_4A_1A_2$ in einer Geraden parallel zu B_4O liegen. Endlich ist das Viereck $B_1B_4OB_2$ ebenfalls ein Parallelogramm [nach (8)], also B_1B_2 parallel B_4O. A_1A_2 und B_1B_2 sind beide mit B_4O parallel, also auch unter sich, w. z. b. w.

Der Beweis gilt für alle Winkel $\omega_1 < 2R - \omega$ und ebenso für alle Winkel $\omega_2 < 2R - \omega_1$, also weil ω_1 beliebig klein sein kann, für alle Winkel $\omega_2 < 2R$, womit der Fundamentalsatz vollständig bewiesen ist.

Wir könnten nun sofort den Lehrsatz von Desargues beweisen, zuvor wollen wir aber noch einige Sätze ableiten.

In der Figur 1 war $O_3A_3 \equiv OA$, $O_3B_3 \equiv OB$, würde man weiter auf O_3B_3 die Strecken $O_3C_3 \equiv OC$, $O_3D_3 \equiv OD$ etc. abtragen, so würden C_1C_3, D_1D_3 etc. ebenso durch F_3 gehen, wie A_1A_3 und B_1B_3. Indem man nun dieselben Schlüsse wie beim Beweis des Fundamentalsatzes, aber nur in anderer Reihenfolge anwendet, findet man den

Satz 2. *Liegen die Träger ähnlicher Punktreihen parallel, so liegen die Punktreihen zentral perspektivisch* (parallel perspektivisch, falls die Punktreihen kongruent sind).

Satz 3 (Umkehrung). *Durch ein Strahlenbüschel werden aus zwei parallelen Geraden ähnliche Punktreihen ausgeschnitten.*

Bisher hatte immer der Punkt O gegenüber den anderen Punkten zweier ähnlicher Punkt- bzw. Streckenreihen eine ausgezeichnete Rolle gespielt. Es zeigt sich aber, daß irgend zwei entsprechende Punkte z. B. A und A_1 zweier ähnlicher Punktreihen mit O identifiziert werden können, indem der Satz gilt:

Satz 4. *Legt man die Träger von zwei ähnlichen Punktreihen so aneinander, daß der Schnittpunkt der Träger zwei entsprechende Punkte sind, so liegen die Punktreihen parallel perspektivisch.*

Es sei $O; A, B, C, \cdots \sim O; A_1, B_1, C_1, \cdots$ und die Punktreihen befinden sich in parallel-perspektiver Lage, so daß AA_1 parallel BB_1 parallel CC_1 etc. ist. Man ziehe nun beispielsweise durch A die Parallele mit OA_1 und schneide diese mit dem Parallelstrahlenbüschel AA_1, BB_1 etc. sowie mit der durch O mit AA_1 gezogenen Parallelen, so ist die Richtigkeit des Satzes unmittelbar evident.

Bemerkung. Hieraus schließt man leicht, daß, wenn die Streckenordnung

$$a, b \sim c, d$$

gilt, auch folgende Streckenordnungen richtig sind:

$$a,\ a+b \sim c,\ c+d,$$
$$a,\ a-b \sim c,\ c-d.$$
$$a+b,\ a-b \sim c+d,\ c-d.$$

Satz 5. *Werden die Schenkel des Winkels O von einer Parallellinienschar bezüglich in den Punkten A, A_1; B, B_1; C, C_1; etc. getroffen, so ist*

$$AA_1,\ BB_1,\ CC_1, \cdots \sim OA,\ OB,\ OC,\ \cdots$$
$$AA_1,\ BB_1,\ CC_1, \cdots \sim OA_1,\ OB_1,\ OC_1, \cdots.$$

Beweis: Verschiebt man die Dreiecke OAA_1, OBB_1 längs OA, bis A und B mit C zusammenfallen, so sieht man die Richtigkeit der ersten Streckenordnung unmittelbar ein; ganz analog zeigt man, daß auch die zweite zu Recht besteht.

Satz 6. *Aus*

$$a,\ b \sim c,\ d,$$
$$a,\ b \sim c,\ e$$

folgt

$$d \equiv e.$$

Oder in Worten: *In jeder viergliedrigen Streckenordnung ist durch die drei ersten Glieder das vierte eindeutig bestimmt.*

Den sehr einfachen Beweis übergehen wir.

§ 3.

Lehrsatz des Desargues.

Wenn zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ so aufeinander bezogen sind, daß die Verbindungslinien homologer Ecken AA_1, BB_1, CC_1 durch einen Punkt O gehen und zwei Paare homologer Seiten wie AB und A_1B_1 bez. AC und A_1C_1 parallel laufen, so läuft auch das dritte Paar homologer Seiten BC und B_1C_1 parallel.

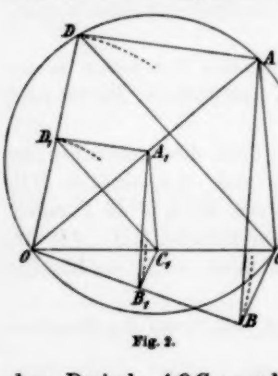


Fig. 2.

Sind zwei der drei Strecken (s. Fig. 2) OA, OB, OC einander gleich, so ist die Richtigkeit des Satzes infolge des Fundamentalsatzes von § 2 evident. Wir setzen also voraus, daß alle drei voneinander verschieden sind und etwa OB die kleinste von ihnen ist. Der um O mit Radius OB beschriebene Kreis wird dann sicher den dem Dreieck AOC umschriebenen Kreis schneiden: Einer der Schnittpunkte heiße D, der nun mit A, C und O verbunden werden möge.

Weiter mache man auf OD $OD_1 \equiv OB_1$ und ziehe D_1A_1 und D_1C_1. Da nun $OD \equiv OB$ und $OD_1 \equiv OB_1$ und außerdem nach Voraussetzung AB parallel A_1B_1 ist, so folgt aus dem Fundamentalsatz, daß AD parallel A_1D_1 ist. Nun ist vorausgesetzt, daß AC parallel A_1C_1 ist, es folgt also, daß

$$\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle D_1A_1C_1$$

ist. In dem Kreisviereck $DOCA$ ergänzen sich die Winkel DAC und DOC zu zwei Rechten, es betragen also auch die Winkel $D_1A_1C_1$ und DOC zusammen zwei Rechte, woraus zu schließen ist, daß auch Viereck $D_1OC_1A_1$ ein Kreisviereck ist. Aus diesen beiden Kreisvierecken ergibt sich

$$\sphericalangle D_1C_1O \equiv \sphericalangle D_1A_1O,$$
$$\sphericalangle DCO \equiv \sphericalangle DAO.$$

Die rechts stehenden Winkel sind aber kongruent, weil oben gezeigt wurde, daß AD parallel A_1D_1 ist: es sind also auch die links stehenden Winkel kongruent und somit ist DC parallel D_1C_1. Da endlich $OB \equiv OD$, $OB_1 \equiv OD_1$ ist, so folgt nach dem Fundamentalsatz

$$BC \text{ parallel } B_1C_1$$

w. z. b. w.

Symbolisch kann der Lehrsatz des Desargues so ausgedrückt werden:

Zusatz 1. Ist

$$a, a_1 \sim b, b_1,$$
$$a, a_1 \sim c, c_1$$

so ist auch

$$b, b_1 \sim c, c_1.$$

Zum Beweis nehme man an, daß in Figur 2 $OA \equiv a$, $OB \equiv b$, $OC \equiv c$ und ebenso $OA_1 \equiv a_1$, $OB_1 \equiv b_1$, $OC_1 \equiv c_1$ ist. Die Anwendung des Desarguesschen Satzes ergibt jetzt sofort die Richtigkeit der Behauptung.

Zusatz 2 (Kommutatives Gesetz)*). Ist

---

*) Hilbert beweist das kommutative Gesetz mit Hilfe des Pascalschen Satzes, s. Grundlagen § 15. Kupfer gab den ersten sehr einfachen Beweis, den auch Kneser und Mollerup wiedergeben (vgl. die Literaturangaben zu Beginn der Arbeit). Zu dem Satz 4 der Mollerupschen Arbeit bemerke ich, daß derselbe allerdings sich aus Satz 3 gewinnen läßt, aber doch nicht so „unmittelbar" wie es an der angeführten Stelle heißt. Bei dem Beweis des Satzes 7, der die Hauptschwierigkeit bildet, hätte auf Hilberts Grundlagen § 16 verwiesen werden müssen; denn der Beweis ist nicht bloß, wie es beiläufig am Schluß der Mollerupschen Arbeit heißt, „dem Hilbertschen ganz analog", sondern er ist, abgesehen von der Bezeichnung, mit dem Beweis von Hilbert identisch.

$$a,\ a_1 \sim b,\ b_1$$

so ist auch

$$a,\ b \sim a_1,\ b_1$$

oder in Worten: *In einer viergliedrigen Streckenordnung darf man die inneren (und ebenso auch die äußeren) Glieder miteinander vertauschen.*

Beweis: In Figur 1 ist nach § 2 Satz 5

$$F_3A_3,\ F_3A_1 \sim B_3A_3,\ B_1A_1,$$
$$F_3A_3,\ F_3A_1 \sim A_3O_3,\ A_1O.$$

Hieraus folgt nach Zusatz 1 dieses Paragraphen

$$B_3A_3,\ B_1A_1 \sim A_3O_3,\ A_1O.$$

Weil weiter $B_3A_3 \equiv BA$, $A_3O_3 \equiv AO$ s. § 2 (7), (8), so folgt

$$BA,\ B_1A_1 \sim AO,\ A_1O.$$

Es ist aber der Definition der ähnlichen Streckenreihen gemäß und nach § 2 Satz 4, Bemerkung

$$BA,\ AO \sim B_1A_1,\ A_1O.$$

Die beiden letzten Streckenordnungen zeigen die Richtigkeit des Satzes, wenn man setzt:

$$BA \equiv a; \quad B_1A_1 \equiv a_1; \quad AO \equiv b; \quad A_1O \equiv b_1.$$

§ 4.

Sätze über Streckenordnungen.

Satz 1 (Sekantensatz). *Schneiden sich zwei Sekanten innerhalb oder außerhalb eines Kreises, so sind die vom Durchschnittspunkte aus gemessenen Abschnitte der einen Sekante innere, die der anderen äußere Glieder einer Streckenordnung.*

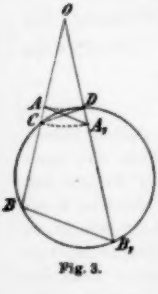


Fig. 3.

Beweis: OCB und ODB_1 (s. Fig. 3) seien die beiden von O ausgehenden Sekanten, es soll bewiesen werden, daß

$$OB,\ OD \sim OB_1,\ OC$$

ist. Auf OB_1 mache man $OA_1 \equiv OC$ und auf OB entsprechend $OA \equiv OD$, dann ist

$$\triangle\, OCD \equiv \triangle\, OA_1A$$

also

$$(1) \qquad \sphericalangle\, OCD \equiv \sphericalangle\, OA_1A.$$

Weil aber Viereck CBB_1D ein Kreisviereck ist, so folgt

$$(2) \qquad \sphericalangle\, OCD \equiv \sphericalangle\, OB_1B.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich, daß AA_1 parallel BB_1 ist, und somit

$$OB,\ OA \sim OB_1,\ OA_1.$$

Hieraus endlich folgt

$$OB,\ OD \sim OB_1,\ OC \quad \text{w. z. b. w.}$$

In der Figur wurde O außerhalb des Kreises angenommen. Liegt O innerhalb, so ist der Beweis bei gleicher Bezeichnung wörtlich derselbe.

Satz 2 (Umkehrung). *Trägt man die inneren Glieder einer Streckenordnung auf dem einen Schenkel eines Winkels von der Spitze aus ab, die äußeren Glieder auf dem anderen Schenkel und zwar beidemal entweder nach derselben oder der entgegengesetzten Richtung, so bilden die Endpunkte ein Keisviereck.*

Beweis ähnlich wie vorher.

Bemerkung: Dreht man in der Figur 3 die Gerade OB_1 um den Punkt O, so bilden nach Satz 2 die vier Punkte CBB_1D in allen Lagen ein Kreisviereck.

Erklärung: Sind in einer Streckenordnung die beiden mittleren Glieder einander kongruent, etwa $\equiv b$, ist also z. B.

$$a,\ b \sim b,\ c$$

so sagen wir: *b ist die mittlere Zugeordnete zu a und c.*

Wie den Satz 1 beweist man leicht folgenden

Satz 3 (Tangentensatz). *Wird eine Kreistangente von einer Sekante geschnitten, so ist der Abschnitt der Tangente mittlere Zugeordnete zu den vom Schnittpunkt aus gemessenen Abschnitten der Sekante.*

Satz 4. *In jedem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete mittlere Zugeordnete zur Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf diese.*

Zum Beweis beschreibe man über der andern Kathete als Durchmesser den Kreis und wende den Tangentensatz (3) an.

Satz 5. *In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe mittlere Zugeordnete zu den beiden Projektionen.*

Zum Beweis suche man den zur Spitze des rechten Winkels bezüglich der Hypotenuse symmetrischen Punkt und wende auf das entstehende Kreisviereck den Sekantensatz (1) an.

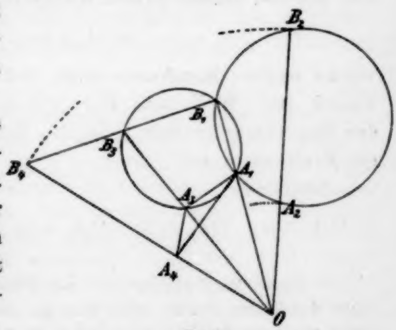


Fig. 4.

Satz 6 (s. Fig. 4). Liegen zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ so, daß A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 durch einen Punkt O der Ebene gehen, und sind die beiden Vierecke $A_1A_2B_2B_1$

und $A_1A_3B_3B_1$ Kreisvierecke, so ist auch das Viereck $A_2A_3B_3B_2$ ein Kreisviereck.*)

Beweis. Man darf voraussetzen, daß die drei Strecken OB_1, OB_2, OB_3 verschieden sind; denn wäre z. B. $OB_1 \equiv OB_2$, so wäre auch offenbar $OA_1 \equiv OA_2$ und der Satz nach der Bemerkung zu Satz 2 evident. Wir nehmen nun an, daß z. B. OB_2 die größte der drei genannten Strecken ist, und beschreiben um O mit dem Radius OB_2 einen Kreis, der dann sicher die Strecke B_1B_3 schneidet. Einer der Schnittpunkte sei B_4; wir ziehen OB_4, tragen auf OB_4 von O aus die Strecke $OA_4 \equiv OA_2$ ab und verbinden die drei Punkte $A_1A_3A_4$ miteinander. Nach der Bemerkung zu Satz 2 bilden die vier Punkte $A_1B_1B_4A_4$ ein Kreisviereck und es ist daher

$$\sphericalangle A_1A_4O \equiv \sphericalangle B_4B_1A_1.$$

Weil weiter das Viereck $A_3A_1B_1B_3$ ebenfalls ein Kreisviereck ist, so folgt

$$\sphericalangle A_1A_3O \equiv \sphericalangle B_4B_1A_1,$$

und aus den letzten beiden Kongruenzen

$$\sphericalangle A_1A_4O \equiv \sphericalangle A_1A_3O.$$

Es ist jetzt also auch das Viereck $A_1A_3A_4O$ ein Kreisviereck und somit

$$\sphericalangle A_4A_3O \equiv \sphericalangle A_4A_1O.$$

Weil nun, wie oben gezeigt wurde, das Viereck $A_1B_1B_4A_4$ ein Kreisviereck ist, so folgt

$$\sphericalangle A_4B_4B_1 \equiv \sphericalangle A_4A_1O,$$

und aus den beiden letzten Kongruenzen

$$\sphericalangle A_4A_3O \equiv \sphericalangle A_4B_4B_1,$$

welche letztere Kongruenz zeigt, daß das Viereck $A_4A_3B_3B_4$ ein Kreisviereck ist. Weil nun $OA_2 \equiv OA_4$ und $OB_2 \equiv OB_4$, so folgt aus der Bemerkung zu Satz 2 in der Tat, daß auch das Viereck $A_2B_2B_3A_3$ ein Kreisviereck ist.

Setzt man

$$OA_1 \equiv a; \quad OB_1 \equiv d; \quad OA_2 = b; \quad OB_2 = c; \quad OA_3 = e, \quad OB_3 = f,$$

*) Dieser Satz erinnert an den Desarguesschen. In der Tat erhält man die Figur des letzten Satzes, wenn man um das Dreieck $A_1A_2A_3$ den Kreis beschreibt; dieser möge die drei von O ausgehenden Strahlen in $C_1C_2C_3$ schneiden. Man zeigt nun unschwer, daß die Seiten des Dreiecks $C_1C_2C_3$ mit denen des Dreiecks $B_1B_2B_3$ entsprechend parallel laufen. Man erhält so ebenfalls einen Beweis für den Satz. Wir haben obige Form gewählt, um umständliche Fallunterscheidungen zu vermeiden.

so können die Voraussetzungen des Satzes mit Satz 1 durch die Streckenordnungen

$$a,\ b \sim c,\ d,$$
$$a,\ e \sim f,\ d$$

ausgedrückt werden.

Der Satz 6 sagt jetzt aus, daß, wenn diese Streckenordnungen bestehen, auch die Streckenordnung

$$b,\ e \sim f,\ c$$

richtig ist. Es gilt also der

Satz 7. *Haben zwei Streckenordnungen dieselben äußeren Glieder, so darf man die äußeren Glieder der einen Streckenordnung durch die inneren Glieder der andern ersetzen.*

Damit ist unser erstes Ziel, eine rein geometrische Darstellung der Lehre von den Proportionen (Streckenordnungen) zu gewinnen, erreicht.

Zu gleicher Zeit haben sich fast alle wichtigeren Sätze der Ähnlichkeitslehre ergeben; der Beweis der übrigen Sätze, z. B. über die ähnlichen Dreiecke bietet selbstverständlich jetzt keine Schwierigkeit mehr. In der Hilbertschen Darstellung der Proportionen spielt die Hauptrolle der Pascalsche Satz; in unseren Entwicklungen ist von demselben niemals die Rede gewesen. Wenn man will, kann man ihn indessen leicht aus Satz 7 gewinnen.

II. Abschnitt.

Von den Flächeninhalten.

Da wir hier nur beabsichtigen, die das Inhaltsmaß betreffenden Entwicklungen in den „Grundlagen" von der Streckenrechnung zu befreien, so nehmen wir Hilberts Darlegungen in § 18 und § 19 der „Grundlagen" unverändert*)

*) Einige Änderungen in den „Erklärungen" des § 18 der Grundlagen halten wir indes doch für notwendig. In der ersten Erklärung wäre es, um Mißverständnisse auszuschließen, deutlicher, wenn es statt „eines Polygons" „eines *einfachen* Polygons" hieße (vgl. § 4 der Grundlagen). Weiter ist in der dritten Erklärung offenbar der Auffassung Raum gegeben, daß zwei einfache Polygone stets zu einem einfachen Polygon zusammengefügt werden können. Dem ist aber nicht so: Man nehme z. B. als erstes Polygon ein Polygon mit vielen spitzen Zacken (zahnradförmig) und als zweites Polygon ein reguläres Vieleck mit passend großen Seiten und passend stumpfen Winkeln, so wird es nicht möglich sein, beide zu einem *einfachen* Polygon zusammenzufügen. Darum ist auch z. B. die erste Folgerung, die aus den Erklärungen p. 40 der Grundlagen gezogen wird: „Durch Zusammenfügung zerlegungsgleicher Polygone entstehen wieder zerlegungsgleiche Polygone" in dieser Allgemeinheit nicht haltbar. Wir verzichten, auf die naheliegenden Änderungen in den Erklärungen näher einzugehen.

an. Die Hauptschwierigkeit in der Lehre von den Flächeninhalten liegt ja in dem Beweis des Satzes, daß zwei inhaltsgleiche Dreiecke mit derselben Grundlinie dieselbe Höhe besitzen. Zum Beweis dieses Satzes benutzt Hilbert die aus seiner Streckenrechnung sich ergebende Tatsache, daß das halbe (symbolische) Produkt aus Grundlinie und Höhe eines Dreiecks davon unabhängig ist, welche Seite des Dreiecks man als Grundlinie wählt, und darum eine für das Dreieck charakteristische Strecke ist. Es ist nun einigermaßen überraschend, daß Hilbert diese als für den *Inhalt* charakteristisch bezeichnet; an und für sich könnte sie z. B. auch für den *Umfang* des Dreiecks eine Rolle spielen. Erst die weiteren Entwicklungen zeigen, daß alle *inhalts*gleichen (nicht etwa *umfangs*gleichen) Dreiecke dieselbe als Inhaltsmaß bezeichnete Strecke besitzen. Dem gegenüber werden wir im folgenden als Inhaltsmaß ein mit dem Dreieck inhaltsgleiches Rechteck, von dem eine Seite eine bestimmte Länge besitzt, bezeichnen. Dadurch wird zugleich erreicht, daß die „Dimension" gewahrt bleibt. Im übrigen werden wir uns so eng wie möglich an die mustergültige Darstellung Hilberts anschließen.

§ 5.

Sätze über den Flächeninhalt.

Satz 1 (Tangentensatz). *Wird eine Tangente an einen Kreis von einer Sekante geschnitten, so hat das Quadrat über der Tangente denselben Inhalt wie das Rechteck, dessen Seiten die vom Schnittpunkt aus gemessenen Sekantenabschnitte sind.**)

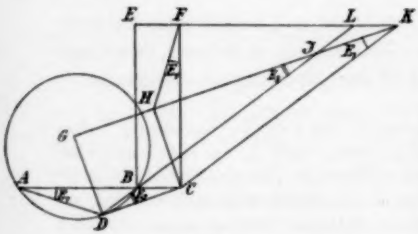


Fig. 5.

Beweis. In der Figur 5 sei CD die Tangente, CA die Sekante, $CDGH$ sei das Quadrat über der Tangente, $BCFE$ das Rechteck aus den beiden Sekantenabschnitten, also $FC \equiv AC$. Um nun zu zeigen, daß das genannte Quadrat dem Rechteck inhaltsgleich ist, verlängere man GH, bis es die Verlängerung von EF in K trifft, weiter möge die Gerade DB die Gerade GK in J, EK in L treffen. Endlich ziehe man HF, CK und AD. Vor allem zeigen wir, daß CK mit DL parallel läuft.

*) Es ist merkwürdig, daß dieser Satz allgemein mit Hilfe der Proportionenlehre (§ 4, Satz 3) und mit Hilfe des Satzes, daß das Produkt aus den inneren Gliedern einer Proportion gleich dem Produkt aus den äußeren Gliedern ist — also mit recht komplizierten Mitteln bewiesen wird, während doch schon Euklid (III. Buch,

Dreht man das Dreieck ACD um den Punkt C um einen Rechten, so fällt es mit dem Dreieck FCH zusammen. Es ist daher

(1) $$\sphericalangle HFC \equiv \sphericalangle DAC \equiv E_1.$$

Da ferner $\sphericalangle CHK \equiv \sphericalangle CFK \equiv 1\,\mathrm{R}$, so ist Viereck $CHFK$ ein Kreisviereck, also

(2) $$\sphericalangle HFC \equiv \sphericalangle HKC = E_1.$$

Weiter ist

(3) $$\sphericalangle GJD \equiv \sphericalangle JDC \equiv E_2,$$

weil GJ parallel zu CD läuft. Nach einem bekannten Satz der Kreislehre ist aber $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BDC$, also

$$\sphericalangle E_1 \equiv \sphericalangle E_2.$$

Aus (2) und (3) folgt, daß $\sphericalangle HKC \equiv \sphericalangle GJD$ ist und daß somit in der Tat CK mit DJ parallel geht. Das Rechteck $BCFE$ ist nun dem Parallelogramm $BCKL$, dieses dem Parallelogramm $DJKC$ und letzteres dem Quadrat $CDGH$ inhaltsgleich; denn je zwei aufeinanderfolgende Parallelogramme haben dieselbe Grundlinie und Höhe. Darum ist das Quadrat mit dem Rechteck inhaltsgleich.

Zieht man vom Punkt C aus eine zweite Sekante CB_1A_1 an den Kreis und wendet auf diese den Satz 1 an, so folgt:

Satz 2 (Sekantensatz). *Zieht man von einem Punkt außerhalb eines Kreises zwei Sekanten, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sekante inhaltsgleich dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen Sekante, wobei die Abschnitte stets vom Schnittpunkte aus zu rechnen sind.*

Aus diesem Satz und dem Satz 2 des § 4 folgt unmittelbar der

Hauptsatz 3. *Das Rechteck aus den inneren Gliedern einer Streckenordnung hat denselben Inhalt wie das Rechteck aus den äußeren Gliedern.*

Jetzt kann man alle Sätze des § 4 anders formulieren: Zunächst sieht man, daß der *Satz* 2 auch gilt, wenn der Punkt, von dem die

---

36. Satz) ihn als Folgerung des Lehrsatzes des Pythagoras erscheinen läßt. Wir sind indessen der Meinung, daß dieser Satz als der allgemeinste dieser Art an die Spitze zu stellen ist. Es scheint aber für diesen Satz bisher keinen direkten Beweis (unabhängig vom Pythagoräischen Lehrsatz) gegeben zu haben. Wir geben unseren Beweis um so lieber, als man von hier aus sehr leicht die Lehre von den Proportionen ohne Stetigkeitsbetrachtungen aufbauen kann, falls man, wie es in der elementaren Darstellung bisher allgemein geschehen ist, das Euklidsche Axiom annimmt, daß zwei inhaltsgleiche Rechtecke mit einem Paar gleicher Seiten auch das andere Paar entsprechend gleich haben. Denn dann kann man den Satz 2 dieses Paragraphen umkehren und erhält dann mit § 4, Satz 1 den Beweis des Fundamentalsatzes des § 2.

Sekanten ausgehen, innerhalb des Kreises liegt. Aus § 4 Satz 4 und dem Hauptsatz ergibt sich

Satz 4. *In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse.*

Aus § 4 Satz 5 und dem Hauptsatz erhält man

Satz 5. *In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den beiden Projektionen.*

In bekannter Weise ergibt sich endlich aus Satz 4

Satz 6 (Lehrsatz des Pythagoras). *In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.*

Anmerkung: Selbstverständlich können die Sätze 4 und 5 auch direkt aus dem Satz 1 und 2 gefolgert werden, gerade so wie die Sätze 4 und 5 des § 4 bewiesen wurden. Daß der Satz 2 dieses Paragraphen auch gilt, wenn der Punkt innerhalb des Kreises liegt, kann auch so bewiesen werden, daß man die Sehnenabschnitte passend aufeinander abträgt: es entsteht dann ein Kreisviereck, auf das man den Satz 2 anwenden kann, weil jetzt der Sekantenschnittpunkt außerhalb des Kreises liegt.

§ 6.

Das Inhaltsmaß.

Die Sätze des vorigen Paragraphen lassen sich nicht umkehren, wenn man nicht wie Euklid die Voraussetzung macht, daß zwei inhaltsgleiche Rechtecke mit einer gemeinschaftlichen Seite auch notwendig in der anderen Seite übereinstimmen. Auch bleibt dahingestellt, ob nicht alle Polygone stets einander inhaltsgleich sind.*) Die Hauptschwierigkeit bietet der Beweis des Satzes: *Daß inhaltsgleiche Dreiecke mit derselben Grundlinie dieselbe Höhe besitzen.*

Um dieser Schwierigkeit Herr zu werden, ist die Einführung des Inhaltsmaßes erforderlich.

Zu diesem Zwecke verwandeln wir alle bei der Zerlegung von Polygonen vorkommenden Dreiecke in Rechtecke, die alle eine bestimmte, an sich willkürliche aber während der ganzen folgenden Betrachtung sich gleich bleibende Seite e gemein haben. Und zwar führen wir die Verwandlung eines einzelnen Dreiecks stets wie folgt aus: Es möge a eine Seite und

*) Vgl. Hilbert, Grundlagen § 19.

h die zugehörige Höhe eines der Dreiecke sein. Wir bestimmen nun eine Strecke $2f$, die folgender Streckenordnung

$$(1) \qquad e,\ a \sim h,\ 2f$$

genügt; diese Strecke ist nach § 2 Satz 6 eindeutig bestimmt. Nach dem Hauptsatz 3 des § 5 ist nun das Rechteck aus den Seiten e und $2f$ inhaltsgleich dem Rechteck aus den Seiten a und h. Daraus folgt, daß das Rechteck aus den Seiten e und f dem Dreieck mit der Grundlinie a und der Höhe h inhaltsgleich ist. Wir nennen deshalb dieses Rechteck *das Inhaltsmaß* des Dreiecks.*) Konstruiert wird die Strecke f entweder nach dem Satz 2 des § 5 oder einfacher so, daß man auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels mit der Spitze B die Strecken $BE \equiv e$ und $BC \equiv a$, auf dem anderen Schenkel eine Strecke $BD \equiv h$ abträgt; zieht man durch C die Parallele zu ED, welche die BD in F treffen möge, so ist $BF \equiv 2f$.**)

Es ist jetzt zu zeigen, daß das Inhaltsmaß unabhängig ist von der gewählten Grundlinie. Sei also a_1 eine andere Seite des Dreiecks, h_1 die zugehörige Höhe, so hat man analog eine Strecke $2f_1$ zu bestimmen, die der Streckenordnung

$$(2) \qquad e,\ a_1 \sim h_1,\ 2f_1$$

genügt. Es ist zu zeigen, daß $f \equiv f_1$ ist. Aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke erhält man offenbar:

$$(3) \qquad a,\ a_1 \sim h_1,\ h$$

und aus (2) und (3) mit Benützung von § 4 Satz 7

$$(4) \qquad e,\ a \sim h,\ 2f_1.$$

Der Vergleich von (1) und (4) zeigt, daß in der Tat $f \equiv f_1$ ist.

Wir machen nun mit Hilbert***) folgende

Erklärung: Eine Strecke, welche eine Ecke eines Dreiecks mit einem Punkte der gegenüberliegenden Seite verbindet, heißt Transversale des Dreiecks; dieselbe zerlegt das Dreieck in zwei Dreiecke mit gemeinsamer Höhe, deren Grundlinien in dieselbe Gerade fallen; eine solche Zerlegung heißt *eine transversale Zerlegung des Dreiecks.*

---

*) Nach Hilbert wäre die Strecke f das Inhaltsmaß.

**) Wählt man speziell einen rechten Winkel, so zeigen ganz einfache, vom § 5 unabhängige Betrachtungen, daß in der Tat das Rechteck aus e und f denselben Inhalt hat wie das Dreieck mit der Grundlinie a und der Höhe h. Offenbar kann man auch so die Sätze des § 5 leicht beweisen.

***) Hilbert, Grundlagen § 20.

Man zeigt nun durch Betrachtungen, die den Darlegungen Hilberts in den Grundlagen p. 34 unten durchaus analog sind, daß das Inhaltsmaß eines beliebigen Dreiecks gleich der Summe der Inhaltsmaße zweier solcher Dreiecke ist, die durch irgendwelche transversale Zerlegung aus jenem Dreieck hervorgehen. Dabei hat man die in der Fußnote **) dieses Paragraphen angegebene Konstruktion für das Inhaltsmaß zu benützen. Wegen des Restes der Beweisführung verweisen wir auf § 20 und § 21 der Grundlagen.

Heilbronn, Mai 1908.

Über die Isogonalflächen eines Strahlenbündels.

Von

Georg Scheffers in Charlottenburg.

Zu der Abhandlung des Herrn **Landsberg** „Über die Klasse der Flächen, welche ein Strahlenbündel unter festem Winkel schneiden" im 2. Hefte des 66. Bandes der Annalen möchte ich bemerken, daß diese Flächen doch schon untersucht worden sind. In einer Arbeit „Über Loxodromen" in den Leipziger Sitzungsberichten vom 12. Nov. 1902 (S. 363—370) habe ich sie als speziellen Fall einer allgemeineren Flächenfamilie behandelt und gezeigt (siehe S. 368):

„Will man alle Raumkurven finden, die ihre von einem festen Punkte O ausgehenden Radienvektoren unter konstantem Winkel treffen, so wählt man auf einer Kugel um O eine Kurve c beliebig. Durch die Punkte P von c legt man darauf die Ebenen, die dort c senkrecht treffen und durch O gehen. In jeder dieser Ebenen konstruiert man darauf diejenige logarithmische Spirale, die O zum asymptotischen Punkt hat, ferner durch den betreffenden Punkt P geht und drittens ihre Radienvektoren unter dem gegebenen Winkel schneidet. Die so konstruierten ∞^1 logarithmischen Spiralen umhüllen die gesuchte Kurve.

Zugleich ist die von den logarithmischen Spiralen gebildete Fläche die allgemeinste Fläche, die alle von O ausgehenden Strahlen unter dem konstanten Winkel trifft. Auf ihr sind die Spiralen Krümmungslinien. Die andere Schar von Krümmungslinien besteht aus denjenigen Kurven, in denen die Fläche von den konzentrischen Kugeln getroffen wird."

Übrigens gebe ich gern zu, daß diese Stelle leicht übersehen werden konnte, auch dann, wenn dem Herrn Verfasser meine Arbeit bekannt gewesen wäre, da diese Stelle nur eine gelegentliche Anwendung allgemeinerer Untersuchungen im Raume auf einen speziellen Fall bedeutet.

Steglitz, am 20. November 1908.

Berichtigung

zu dem Aufsatz von E. Study „Über die reellen Lösungen der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$".
S. 331—336 dieses Bandes.

Auf Seite 333, Zeile 14 v. u. ist nach den Worten „eine Konstante" der Satz einzuschalten: „Wir nehmen (zunächst) an, daß diese Konstante von Null verschieden ist."